

ДИНАМИКА ОТСТУПАЮЩЕГО МЕНИСКА ЖИДКОСТИ В КАПИЛЛЯРЕ С УЧЕТОМ СПЕЦИФИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТОНКИХ ПЛЕНОК

Б. В. Железный

(Ленинград)

Излагается теория отступающего мениска ньютоновской жидкости для капиллярного режима течения в области малых скоростей мениска, когда проявляются термодинамические и реологические особенности тонких смачивающих пленок. Рассмотрены два случая: термодинамически устойчивая смачивающая пленка с повышенной вязкостью в пристенном слое на полностью смачиваемой твердой поверхности и термодинамически неустойчивая пленка на ограниченно смачиваемой твердой поверхности, когда имеет место эффект скольжения жидкости.

При исследовании свойств смачивающих пленок капиллярным методом [1] определяется зависимость толщины h_* пленки, остающейся на стенках цилиндрического капилляра за отступающим мениском жидкости, от скорости движения v последнего. Экстраполяция зависимостей $h_*(v)$ на нулевую скорость позволяет найти толщины равновесных с мениском пленок в капиллярах различных радиусов R и тем самым определить основную термодинамическую характеристику равновесных смачивающих пленок — изотерму расклинивающего давления. Кроме того, зависимость $h_*(v)$ несет в себе информацию о реологических свойствах смачивающих пленок. Чтобы иметь возможность расшифровать эту информацию и правильно экстраполировать зависимость $h_*(v)$ на нулевую скорость, нужно иметь теорию отступающего мениска с учетом специфических свойств тонких пленок.

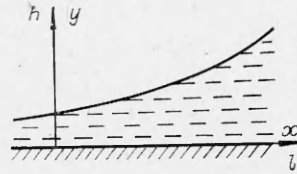
Динамика отступающего мениска смачивающей жидкости в предположении, что оставляемая на твердой поверхности пленка обладает свойствами объемной жидкой фазы (коэффициенты вязкости η_0 и поверхностного натяжения σ задаются таблицами), рассмотрена в работах [2—4]. Различными способами получено уравнение

$$(1) \quad \sigma d^3h/dl^3 = 3\eta_0 v (1/h^2 - h_*/h^3),$$

описывающее стационарное течение одного направления в полой пленке ньютоновской жидкости на плоской (или круговой цилиндрической) твердой поверхности, если течение происходит только под действием капиллярных сил (капиллярный режим течения). В уравнении (1) h_* — конечная толщина смачивающей пленки, остающейся на твердой поверхности далеко позади мениска; h — текущее значение толщины пленки при текущем значении координаты l , отсчитываемой вдоль твердой поверхности в направлении движения мениска; система координат привязана к мениску, т. е. центр последнего принимается неподвижным, а твердая поверхность движется в отрицательном направлении оси l со скоростью $|v|$.

Уравнение (1) является соотношением между движущей силой течения (градиентом капиллярного давления) и стационарным потоком через данное сечение полой пленки. Покажем это при выводе аналогичного уравнения, учитывающего специфические свойства тонких пленок. Рас-

смотрим течение в направлении x в полой смачивающей пленке на плоской поверхности (фиг. 1). Пусть толщина пленки постоянна в направлении z , перпендикулярном плоскости чертежа; «профиль» пленки, т. е. кривая $h(x)$, сохраняет неизменное положение во времени и в пространстве, а твердая поверхность движется со скоростью $-v$. Такое стационарное состояние реализуется вблизи движущегося с постоянной скоростью мениска жидкости в капилляре, если рассматривать систему в указанной выше системе координат.



Фиг. 1

Пусть движущей силой течения является некоторая объемная сила G (градиент давления), а касательное напряжение на свободной поверхности пленки отсутствует. При соблюдении условия пологости

$$(2) \quad dh/dl \ll 1$$

можно пренебречь составляющей скорости течения в направлении оси y , перпендикулярной твердой поверхности, и рассматривать течение как однонаправленное. Если жидкость в пленке обладает постоянным коэффициентом вязкости и справедливо условие прилипания к стенке, то решение уравнения Навье — Стокса для рассматриваемого случая приводит к выражению

$$q = Gh^3/3\eta_0 - vh,$$

где q — полный поток на единицу длины в направлении z ; $Gh^3/3\eta_0$ — составляющая потока, вызванная силой G ; $-vh$ — составляющая потока, связанная только с выбором подвижной системы координат. Если G определяется только капиллярными силами, то на удалении от мениска, там, где пленка приобретает постоянную толщину h_* , $G = 0$ и $q = -vh_*$, т. е. пленка движется как единое целое вместе со стенкой со скоростью $-v$. Поскольку в стационарном состоянии поток q одинаков для всех сечений, для произвольного сечения имеем

$$(3) \quad Gh^3/3\eta_0 = v(h - h_*).$$

Для обычных капиллярных сил в случае полой пленки справедливо соотношение [2]

$$(4) \quad G = -dp/dl \approx \sigma d^3h/dl^3,$$

где p — капиллярное давление, принимаемое отрицательным для вогнутого (в сторону газовой фазы) мениска. Подставляя (4) в (3), приходим к (1).

При распространении теории на случай тонких пленок необходимо учитывать возможные изменения их термодинамических и реологических свойств. Термодинамические особенности тонких пленок проявляются в возникновении дополнительного к обычному капиллярному расклинивающего давления Π . Способ учета этого давления в уравнениях движения тонких слоев жидкостей предложен в [5]. В настоящее время этот способ широко используется [6, 7] и принят здесь без изменений. Согласно [5], действие расклинивающего давления на течение в полой пленке формально отождествляется с действием равного по величине, но противоположного по знаку внешнего давления, т. е. с действием некоторой

дополнительной силы того же характера, что и обычное капиллярное давление. При этом допускается, что локальное значение расклинивающего давления в данном сечении пологой пленки, как и в случае плоской пленки, зависит лишь от толщины $\Pi = \Pi(h)$, но не зависит от формы поверхностей, ограничивающих пленку в окрестностях данного сечения. Таким образом, вместо (4) следует написать

$$(5) \quad G = -d(p - \Pi)/dl.$$

В выражение для G можно включить также объемные силы типа сил тягести, однако в тех случаях, когда проявляются специфические свойства тонких пленок, роль этих сил обычно несущественна и потому здесь не учитывается.

Для того, чтобы использовать (5) при интегрировании уравнения (3), нужно знать зависимость $\Pi(h)$, называемую изотермой расклинивающего давления. Во многих случаях справедлива степенная зависимость типа

$$(6) \quad \Pi = -A/6 \pi h^n,$$

где $A = \text{const}$; $n = \text{const} > 1$. При $n=3$ формула (6) выражает известный закон Гамакера для незапаздывающего дисперсионного взаимодействия, A в этом случае называют константой Гамакера (численный множитель 6π фигурирует именно в формуле Гамакера, здесь он сохранен для общности при произвольном n). В данной работе для зависимости $\Pi(h)$ использована формула (6) при $n=3$ и 2. Эти два значения n соответствуют экспериментально найденным изотермам $\Pi(h)$ для смачивающих пленок низкополярных и высокополярных жидкостей [1].

Знак константы A определяется характером энергетического взаимодействия жидкости с твердой поверхностью. Сильному взаимодействию соответствует $A < 0$, этот случай реализуется для лиофильной (полностью смачиваемой) твердой поверхности и соответствует термодинамически устойчивым полимолекулярным жидким пленкам. Слабому взаимодействию соответствует $A > 0$, этот случай реализуется для лиофобной (ограниченно смачиваемой) твердой поверхности, характеризуемой существенно отличным от нуля равновесным углом смачивания. На такой поверхности полимолекулярные жидкие пленки термодинамически неустойчивы.

Учет реологических особенностей тонких пленок произведен с помощью двух реологических моделей, соответствующих различным типам энергетического взаимодействия жидкости с твердой поверхностью. Для термодинамически устойчивых пленок (лиофильная твердая поверхность) принята модель прилипания, в которой предполагается отсутствие скольжения жидкости по поверхности и однозначная зависимость локального коэффициента вязкости в пристенном слое от расстояния до твердой поверхности.

Для термодинамически неустойчивых пленок (лиофобная поверхность) принята модель скольжения, в которой предполагается наличие проскальзывания жидкости при движении вдоль твердой поверхности, причем скорость проскальзывания принимается пропорциональной величине касательного напряжения на твердой поверхности, а коэффициент вязкости жидкости внутри пленки (коэффициент внутреннего трения) — постоянным и равным η_0 . Для обеих моделей сохраняется пропорциональность между величинами движущей силы и потока при стационарном течении, в частности, можно использовать формулу (3) при замене η_0 на эффективный коэффициент вязкости пленки η_e , зависящий

от толщины последней h . Можно показать, что для достаточно больших h зависимость $\eta_e(h)$ в модели прилипания описывается формулой

$$(7) \quad \eta_e = \eta_0(1 + k/h),$$

а для модели скольжения при всех h справедливо

$$(8) \quad \eta_e = \eta_0(1 + k/h)^{-1},$$

где $k = \text{const} \geq 0$; величины коэффициентов k в формулах (7), (8) определяются конкретными физическими свойствами систем.

Основанием для выбора реологической модели прилипания послужили экспериментальные результаты, полученные в [8], для выбора модели скольжения — результаты, полученные в [9]. Более подробное изложение вопроса об эффективном коэффициенте вязкости тонкой пленки (слоя) будет дано в другом сообщении.

Следует отметить, что на лиофобной поверхности невозможно существование равновесной с мениском полимолекулярной («жидкой») пленки [10]. Лишь при движении отступающего мениска с достаточной скоростью за ним на ограниченном участке поверхности может оставаться однородная по толщине пленка. Эта пленка термодинамически неустойчива и вскоре распадается на отдельные капли жидкости. Однако, если однородная по толщине пленка существует хотя бы короткое время на некотором удалении от мениска, то при исследовании динамики мениска процесс распада этой пленки можно исключить из рассмотрения, поскольку в этом случае он не оказывает влияния на форму мениска и на величину h_* (после распада пленки величина h_* будет характеризовать общую массу жидкости, оставленной в виде отдельных капель на лиофобной поверхности). Модель скольжения соответствует условиям течения именно в такой «короткоживущей» смачивающей пленке.

Полагая зависимости (6) — (8) справедливыми во всем интервале исследуемых толщин пленок ($h \geq h_*$), для случая лиофильной твердой поверхности из (3), (5) — (7) получим

$$(9) \quad \sigma d^3h/dl^3 + nA/6\pi h^{n+1} \cdot dh/dl = (3\eta_0 v/h^3) (1 + k/h) (h - h_*),$$

где $A < 0$. Для случая лиофобной твердой поверхности из (3), (5), (6), (8) следует

$$(10) \quad \sigma d^3h/dl^3 + nA/6\pi h^{n+1} \cdot dh/dl = (3\eta_0 v/h^3) (h - h_*)/(1 + k/h),$$

где $A > 0$.

Модель пленки, описываемую формулой (9), назовем «устойчивой» пленкой, а модель, описываемую формулой (10), — «неустойчивой» пленкой. Заметим, что используемые для обозначения этих моделей термины «устойчивая» и «неустойчивая» нетождественны аналогичным термодинамическим понятиям. С точки зрения равновесной термодинамики устойчивость пленки определяется лишь знаком производной $\partial \Pi / \partial h$: плоская пленка устойчива при $\partial \Pi / \partial h < 0$ и неустойчива при $\partial \Pi / \partial h > 0$ [11]. Используемые здесь модели описывают не состояние равновесия, а процесс течения тонкой пленки и предполагают, во-первых, конкретный вид изотермы $\Pi(h)$, во-вторых, определенный характер реологических свойств пленки.

Формулы (9), (10) являются аналогами уравнения (1) для случая устойчивых и неустойчивых тонких смачивающих пленок соответственно.

Пленку, обладающую обычными свойствами объемной жидкой фазы, т. е. для которой $A = 0, k = 0$, назовем идеальной. Для идеальной пленки (9), (10) вырождаются в (1).

Конечной целью теории является нахождение зависимости $h_*(v, R)$. Для этого надо путем интегрирования уравнений (9), (10) найти профиль отступающего мениска в области пологости и связать эту часть профиля с профилем центральной части мениска, в которой нарушается условие (2) и формулы (9), (10) становятся неприменимыми.

Способ интегрирования (9), (10) аналогичен способу интегрирования уравнения (1), согласно [2]. Путем введения безразмерных переменных $y = h/h_*, x = (3v\eta_0/\sigma)^{1/3}l/h_*$ и параметров

$$(11) \quad \alpha = -\frac{nA}{6\pi\sigma N h_*^{n-1}};$$

$$(12) \quad \beta = k/h_*,$$

где $N = (3v\eta_0/\sigma)^{2/3}$, представим (9), (10) в безразмерном виде

$$(13) \quad d^3y/dx^3 = \alpha/y^{n+1} \cdot dy/dx + (1 + \beta/y)(1/y^2 - 1/y^3);$$

$$(14) \quad y''' = \alpha y'/y^{n+1} + [1/(y + \beta)](1/y - 1/y^2).$$

Начальные условия интегрирования уравнений (13), (14) соответствуют плавному переходу пологой части мениска в пленку постоянной толщины

$$(15) \quad y \rightarrow 1, y' \rightarrow 0, y'' \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty.$$

Уравнения (13), (14) при условиях (15) интегрировались численным способом на ЭЦВМ М-222 и БЭСМ-4. В качестве начальных участков интегральных кривых $y(x)$ использовались аналитические решения линейных уравнений

$$(16) \quad z''' = \alpha z' + (1 + \beta)z;$$

$$(17) \quad z''' = \alpha z' + z/(1 + \beta),$$

в которые переходят соответственно (13), (14) при $y \rightarrow 1$ после замены $z = y - 1$. При условиях (15) частное решение уравнений (16), (17) имеет вид

$$z = C \exp(\varepsilon x),$$

где ε — действительный корень соответствующего характеристического уравнения; C — постоянная интегрирования, величина которой определяется выбором начала отсчета по оси x . Поскольку этот выбор в данной задаче произволен, константе C может быть придано любое отличное от 0 значение, что не повлияет на конечный результат.

Из вида уравнений (13), (14) следует для $n > 1$, что $y''' \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$. Поэтому при $y \rightarrow \infty$ интегральная кривая $y(x)$ для любого частного решения этих уравнений (соответствующего конкретным значениям параметров α и β) неограниченно приближается к некоторой предельной параболе, описываемой уравнением $y'' = C(\alpha, \beta) = \text{const}$. Это предельное значение второй производной используется при сопряжении профилей пологой и центральной частей мениска. Способ «сшивания» обеих частей профиля в общем виде сформулирован в [12]. В рассматриваемых здесь случаях $h_* \ll R$ и радиус кривизны центральной части мениска в пло-

Т а б л и ц а 1

$\alpha \backslash \beta$	0	0,1	0,3	1	3	10	30
0	0,6430	0,6740	0,7392	0,9945	1,8524	5,2073	15,1213
0,1	0,6643	0,6956	0,7611	1,0165	1,8713	5,2195	15,1286
0,3	0,7060	0,7378	0,8039	1,0594	1,9084	5,2437	15,1430
1	0,8439	0,8767	0,9443	1,1998	2,0329	5,3273	15,1936
3	1,1897	1,2237	1,2930	1,5479	2,3542	5,5587	15,3369
10	2,1399	2,1748	2,2453	2,4985	3,2695	6,2984	15,8267
30	4,1222	4,1575	4,2284	4,4799	5,2247	8,0645	17,1418

скости xu практически равен радиусу цилиндрического капилляра R или полуширине плоского капилляра. В этом случае имеем [12]

$$(18) \quad h_* = C(\alpha, \beta)RN,$$

где коэффициент $C(\alpha, \beta)$ является функцией параметров α и β . При известной функции $C(\alpha, \beta)$ система уравнений (11), (12), (18) дает параметрическую зависимость h_* от v и R .

В табл. 1 приведены коэффициенты $C(\alpha, \beta)$, полученные в результате численного интегрирования (13) при различных значениях α и β для случая $n = 2$, в табл. 2 — то же для $n = 3$, в табл. 3 — аналогичные резуль-

Т а б л и ц а 2

$\alpha \backslash \beta$	0	0,1	0,3	1	3	10	30
0	0,6430	0,6604	0,6971	0,8453	1,3738	3,5561	10,1307
0,1	0,6643	0,6818	0,7189	0,8675	1,3931	3,5688	10,1384
0,3	0,7060	0,7239	0,7615	0,9101	1,4311	3,5941	10,1536
1	0,8439	0,8625	0,9013	1,0502	1,5580	3,6815	10,2068
3	1,1897	1,2092	1,2493	1,3982	1,8842	3,9923	10,3574
10	2,1399	2,1601	2,2011	2,3491	2,8073	4,6860	10,8707
30	4,1222	4,1427	4,1840	4,3308	4,7694	6,4871	12,2395

таты интегрирования (14) для $n = 3$. При $\alpha = 0$ и $\beta = 0$ коэффициент $C(\alpha, \beta) \equiv \equiv C_0 = 0,643$ и формула (18) описывает известную зависимость $h_*(v, R)$ для идеальной пленки [2, 3]

$$(19) \quad h_* = 0,643RN.$$

Случай $\alpha = 0, \beta \neq 0$ соответствует пленке с вязкостью, измененной по сравнению с идеальной пленкой, но тождественной с последней по тер-

Т а б л и ц а 3

$\alpha \backslash \beta$	0	0,1	0,3	1	3	10	30
0	0,6430	0,6265	0,5955	0,5097	0,3841	0,2499	0,1578
0,1	0,6227	0,6064	0,5760	0,4933	0,3741	0,2455	0,1560
0,3	0,5874	0,5715	0,5423	0,4648	0,3562	0,2375	0,1527
1	0,4999	0,4851	0,4588	0,3944	0,3098	0,2147	0,1426
3	0,3733	0,3602	0,3385	0,2929	0,2375	0,1737	0,1219
10	0,2286	0,2176	0,2026	0,1769	0,1481	0,1151	0,08666
30	0,1298	0,1210	0,1117	0,09223	0,08374	0,06777	0,05387

динамическим свойствам ($\Pi \equiv 0$). В этом случае $C(\alpha, \beta) \equiv C(\beta)$ (см. второй столбец табл. 1—3) и зависимость $h_*(v, R)$ дается формулой

$$(20) \quad 1/\beta = C(\beta) (R/k)N,$$

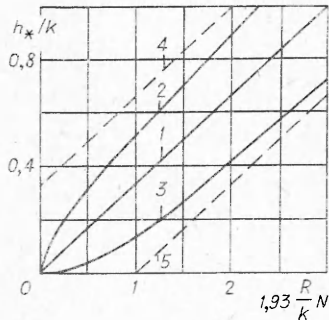
следующей из (12), (18).

Зависимости $h_*(N, R)$ для этого случая приведены на фиг. 2, где кривая 1 соответствует идеальной пленке; 2 — модели прилипания (7); 3 — модели скольжения (8). Существенно, что все три кривые проходят через начало координат.

При $\beta \rightarrow 0$ ($h_* \rightarrow \infty$) зависимость $C(\beta)$ выражается формулой

$$(21) \quad C(\beta) = C_0 \pm (C_0/3)\beta,$$

где знак последнего члена определяется выбранной реологической моделью. Из (20), (21) следует, что при $N \rightarrow \infty$ зависимости $h_*(N, R)$ в рассматриваемом случае ($\Pi \equiv 0$) стремятся к асимптотам, параллельным



Ф и г. 2

прямой, соответствующей линейной зависимости ($h_*/k = 1,93RN/k$) для идеальной пленки, и отстоящим от нее на расстоянии $k/3$ по ординате (фиг. 2, кривые 4, 5). Заметим, что эти асимптоты соответствуют зависимости $h_*(N, R)$ для идеальной пленки, если начало отсчета по оси h (см. фиг. 1) смещено на расстояние $+k/3$ от твердой поверхности. Это означает, что при достаточно больших h (т. е. малых отличиях η_e от η_0) изменение вязкости пленки можно формально представить как результат уменьшения (в модели прилипания) или увеличения (в модели скольжения) эффективной толщины пленки на величину $k/3$ при нор-

мальной вязкости (η_0) пленки. Аналогичный результат можно получить из теории зависимости $\eta_e(h)$.

Согласно (11), если $A \neq 0$, то $|\alpha| \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow 0$. Для устойчивых пленок, как следует из табл. 1, 2, при $\alpha \rightarrow \infty$ $C(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha/n$, что вместе с (11), (18) дает соотношение

$$(22) \quad h_* \rightarrow h_0 = |AR/6\pi\sigma|^{1/n} \text{ при } v \rightarrow 0.$$

Величина h_0 , получаемая из гидродинамического уравнения как предел толщины устойчивой пленки при $v \rightarrow 0$, оказывается равной толщине термодинамически равновесной с мениском пленки. Величину h_0 можно получить чисто термодинамическим путем, что доказывает принципиальную правильность используемого подхода.

С помощью h_0 можно преобразовать систему уравнений (11), (12), (18) к виду, более удобному для практического использования. Введем величину $N_0 = h_0/C_0R$, где C_0 — некоторая константа, и обозначим $H = h_*/h_0$; $W = N/N_0$; $\gamma = k/h_0$. В качестве C_0 целесообразно выбрать коэффициент 0,643, выходящий в (19). Из (11), (12), (18) теперь следует

$$(23) \quad H = [nC(\alpha, \beta)/\alpha]^{1/n};$$

$$(24) \quad W = [C_0/C(\alpha, \beta)]H = [0,643/C(\alpha, \beta)]H;$$

$$(25) \quad \gamma = \beta H = \beta [nC(\alpha, \beta)/\alpha]^{1/n}.$$

Система (23) — (25) эквивалентна системе (11), (12), (18). Величина γ предполагается заданной. Значения коэффициентов $C(\alpha, \beta)$, входящих в (23), (24), находят путем решения уравнения (25) при заданных γ и α с помощью соответствующей таблицы коэффициентов.

Система (23) — (25) позволяет построить универсальные зависимости $H(W, \gamma)$. В частности, при $\gamma=0$ (реологические свойства тонкой пленки тождественны свойствам идеальной пленки) для изотерм $\Pi(h)$ типа (6) при данном n имеется единственная зависимость $H(W)$, инвариантная по отношению к радиусу капилляра и величине констант σ, η, A .

На фиг. 3 представлено семейство кривых $H(W, \gamma)$ для устойчивых пленок при $n=3$ и значениях $\gamma=0; 1; 3; 10$ (кривые 2—5 соответственно). При $W \rightarrow 0$ все кривые, кроме 1, соответствующей идеальной пленке, сходятся в одну точку ($H=1$), соответствующую равновесной пленке. Существенно, что это происходит независимо от степени изменения реологических свойств пленки. В случае $\gamma=0$ кривая $H(W)$ при $W \rightarrow \infty$ асимптотически приближается к прямой $H=W$, соответствующей идеальной пленке. В случае $\gamma \neq 0$ кривые $H(W)$ при $W \rightarrow \infty$ стремятся к асимптотам, параллельным упомянутой прямой и отстоящим от нее на расстоянии $\gamma/3$ по ординате, т. е. к тем же асимптотам, что и в рассмотренном выше случае пленки, термодинамически тождественной идеальной (асимптоты кривых 3—5 изображены штриховыми линиями 6—8 соответственно).

Таким образом, при достаточно больших толщинах пленок (соответственно скоростях мениска) h_* перестает зависеть от изотермы $\Pi(h)$, но влияние изменения вязкости в пристенном слое сохраняется при всех толщинах. Однако ввиду того, что $h_*/h_i \rightarrow 1$ при $v \rightarrow \infty$ (h_i — толщина идеальной пленки при тех же значениях скорости и радиуса капилляра), эффект изменения вязкости практически также не может быть экспериментально обнаружен при больших толщинах пленок. При малых толщинах пленок (скоростях мениска), наоборот, влияние термодинамических особенностей тонких пленок более существенно, чем влияние реологических особенностей, так как приводит к качественно новому результату: появлению равновесной толщины пленки для устойчивых пленок и критической скорости смачивания для неустойчивых пленок.

При $\alpha \rightarrow \infty$ ($W \rightarrow 0, H \rightarrow 1$) зависимость $C(\alpha, \beta)$ для устойчивых пленок можно выразить формулой

$$C(\alpha, \beta) = \alpha/n + (C_1 + C_2\beta)/\sqrt{\alpha},$$

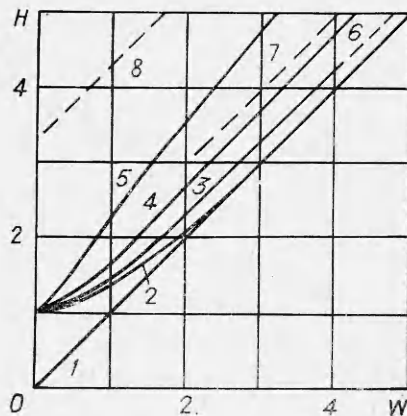
где C_1 и C_2 — константы, слабо зависящие от n . Используя это выражение в (23) — (25), получаем для зависимости $H(W)$ вблизи $W=0$ выражение

$$(26) \quad H=1 + (C + C_*\gamma)V,$$

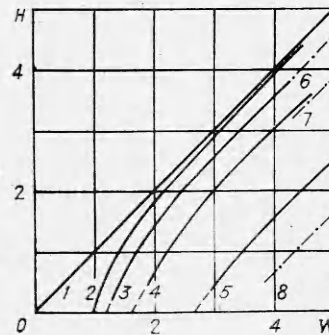
где C и C_* — константы, определяемые величиной n ; $V=W^{3/2}=v/v_i$ (v_i — скорость мениска, при которой h_* для идеальной пленки оказывается равной h_0). При $n=3$ $C=0,271$, $C_*=0,157$; при $n=2$ $C=0,465$, $C_*=0,274$.

Согласно (26), зависимость $h_*(v)$ в области малых скоростей линейна, что важно для экстраполяции экспериментальной зависимости $h_*(v)$ на нулевую скорость с целью нахождения h_0 . Кроме этого, по углу наклона прямой $H(V)$ при малых скоростях можно найти величину γ , т. е. определить степень изменения реологических свойств пленки.

Кривые $H(W)$ для неустойчивых пленок, построенные с помощью табл. 3, приведены на фиг. 4, где соответствие кривых 1—8 такое же, как на фиг. 3. В этом случае величина h_0 имеет лишь математический смысл,



Фиг. 3



Фиг. 4

поскольку никакой равновесной с мениском смачивающей пленки не существует. Однако величина h_0 , определяемая по (22), позволяет и здесь воспользоваться системой (23) — (25) для построения универсальных кривых $H(W)$. При $W \rightarrow \infty$ эти кривые, как и в случае устойчивых пленок, стремятся к асимптотам, параллельным прямой $H=W$ и отстоящим от нее на расстоянии $\gamma/3$ по ординате. Каждая кривая пересекает ось абсцисс при некотором критическом значении $W=W_0$, зависящем от γ . При меньших скоростях мениска на лиофобной поверхности вообще не остается смачивающей пленки.

Вблизи W_0 , т. е. при $\alpha \rightarrow -\infty$ и $\beta \rightarrow \infty$, решение уравнения (14) становится неустойчивым, поэтому значения W_0 не могут быть определены с высокой точностью. Очевидно, существует однозначная зависимость $W_0(\gamma)$. Эту зависимость можно установить путем анализа функции $C(\alpha, \beta)$ при β и $|\alpha| \rightarrow \infty$, учитывая следующие соображения. При $W \rightarrow W_0$, т. е. при $h_* \rightarrow 0$, зависимость $C(\alpha, \beta)$ в силу (18) должна иметь такой вид, чтобы после подстановки вместо α и β соответствующих выражений по (11), (12) результат можно было выразить формулой

$$(27) \quad C(\alpha, \beta) = h_* f(\omega, k),$$

где $\omega = A/\sigma W_0$; $f(\omega, k)$ — некоторая функция переменных ω и k , не зависящая от h_* . Кроме того, вблизи W_0 соответствующие значения параметров α и β для каждой точки кривой $H(W)$ (для данного γ) связаны выражением

$$(28) \quad \alpha/\beta^{n-1} = 0,643n/\gamma^{n-1}W_0,$$

вытекающим из (11), (12).

Формулы (27), (28) позволяют установить зависимость $W_0(\gamma)$ для неустойчивых пленок. Из табл. 3 следует, что при больших γ зависимость $C(\alpha, \beta)$ при $|\alpha|$ и $\beta \rightarrow \infty$, по-видимому, подчиняется формуле

$$(29) \quad C(\alpha, \beta) \approx C/\alpha^s \beta^t,$$

где C, s, t — постоянные. В силу (27), (28) показатели степени при α и β в (29) должны быть связаны соотношением $s(n-1) + t = 1$. На основании значений коэффициентов в правом нижнем углу табл. 3 можно принять

$s=0,2$; $t=0,6$; $C=0,8$. Используя эти значения, из (18), (29) получаем для больших γ

$$W_0 \approx 0,93 \sqrt{\gamma}.$$

При $\gamma=0$ (отсутствие скольжения) зависимость $C(\alpha, \beta) \equiv C(\alpha)$ для неустойчивой пленки выражается строкой табл. 3, соответствующей $\beta=0$. На основе (27) при $\alpha \rightarrow -\infty$ эта зависимость должна выражаться формулой $C(\alpha) = C/\sqrt{\alpha}$, где C — константа. Анализ табл. 3 позволяет установить более точное выражение

$$(30) \quad C(\alpha) = 0,98/(\sqrt{\alpha} + 0,72).$$

Для зависимости $H(W)$ вблизи W_0 при $\gamma=0$ из (18), (30) следует

$$(31) \quad H = 2,17(V - V_0),$$

где $V_0 = W_0^{3/2} = 0,912$.

Согласно (31), зависимость $H(W)$ вблизи W_0 слабо выпукла в сторону оси W , тогда как при больших значениях W , как видно из фиг. 4, кривая $H(W)$ слабо вогнута в сторону этой оси. Таким образом, вблизи W_0 имеется точка перегиба, а общий характер зависимости $H(W)$ в этой области близок к линейному. Есть основания полагать, что такой же характер имеют зависимости $H(W)$ вблизи W_0 и при отличных от 0 значениях γ . Это допущение позволяет линейно экстраполировать зависимости $H(W)$ до пересечения с осью абсцисс в области малых толщин пленок, где нахождение точного вида зависимости $H(W)$ затруднено ввиду упомянутой неустойчивости решения уравнения (14). Построенные таким образом участки кривых $H(W)$ на фиг. 4 изображены штрихом.

Неустойчивость решения уравнения (14) при $|\alpha| \rightarrow \infty$ и $\beta \rightarrow \infty$ отражает тот факт, что вблизи критической скорости смачивания $V_0(\gamma)$ (т. е. при $H \rightarrow 0$) процесс распада остающейся на лиофобной поверхности пленки начинается уже вблизи отступающего мениска. Исследование этого явления выходит за рамки данного сообщения.

Автор выражает благодарность А. Г. Гривцову и В. С. Юценко за ценную помощь при расчетах на ЭЦВМ.

Поступила 15 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Железный Б. В. Исследование смачивающих пленок капиллярным методом. — В кн.: Поверхностные явления в жидкостях. Л., изд. Ленинград. ун-та, 1975, вып. 3, с. 30.
 2. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Изд-во АН СССР, 1952.
 3. Дерягин Б. В., Леви С. М. Физико-химия нанесения тонких слоев на движущуюся подложку. М., Изд-во АН СССР, 1959.
 4. Friz G. Über den dynamischen Randwinkel im Fall der vollständigen Benetzung. — «Z. angew. Phys.», 1965, Bd 19, N 4, S. 374—378.
 5. Нерпин С. В., Дерягин Б. В. Кинетика течения и устойчивости тонких слоев жидкостей на твердой подкладке с учетом сольватной оболочки как особой фазы. — «Докл. АН СССР», 1955, т. 100, № 1;
Дерягин Б. В. К вопросу об определении понятия и величины расклинивающего давления и его роли в статике и кинетике тонких слоев жидкостей — «Коллоидн. журн.», 1955, т. 17, № 2.
 6. Бувеч Ю. А., Липкина Э. Х. Об истечении жидкости из тонких пленок под действием сил молекулярного притяжения. — «Изв. АН СССР. МЖГ», 1974, № 3.
- 6 ПМТФ, № 3, 1976

7. **Воннов О. В.** К теории утоньшения свободных пленок вязкой жидкости. — ПМТФ, 1974, № 3.
8. **Зорин З. М., Соболев В. Д., Чураев Н. В.** Измерение капиллярного давления и вязкости в кварцевых микрокапиллярах. — Докл. АН СССР, 1970, т. 193 № 3.
9. **Барбин М. Б.** О скорости и удельном коэффициенте скольжения жидкости о стенку. — Коллоидн. журн., 1973, т. 35, № 2.
10. **Железный Б. В.** К теории равновесного краевого угла. — Журн. физич. химии, 1974, т. 48, № 11.
11. **Френкель Я. И.** Кинетическая теория жидкостей. М., Изд-во АН СССР, 1946.
12. **Железный Б. В.** К гидродинамике наступающего мениска смачивающей жидкости. — Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 1.

УДК 532.5 : 532.13

О ВЛИЯНИИ ВЯЗКОУПРУГИХ СВОЙСТВ ЖИДКОСТИ НА ДИНАМИКУ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА

С. П. Левицкий, А. Т. Листров

(Воронеж)

Вопросам динамики газовых пузырьков в вязкоупругих жидкостях посвящен ряд работ, из которых отметим [1—4]. В [1, 2] численно изучены радиальные колебания газового пузырька в несжимаемой вязкоупругой жидкости модели Олдройда [5]. В работе [3] и независимо от нее в [4] найдено точное решение уравнения малых колебаний полости в среде Олдройда при периодическом изменении давления на бесконечности. Анализ колебаний пузырька в вязкоупругой жидкости осложняется особенностями предельных переходов в реологическом уравнении среды, представляющими существенный интерес для рассматриваемой задачи. Ниже обсуждаются эти особенности и на основе численного анализа точного решения, полученного в [3], исследуются характеристики малых колебаний пузырька в среде Олдройда.

Основные характеристики малых колебаний пузырька в вязкоупругой жидкости, полученные в [3], после приведения к безразмерной форме примут вид

$$(1) \quad D = \left\{ \frac{[\omega(\omega^2 - b) + (\lambda_1^{-1} + s_1)2\omega\delta]^2 + [(a\omega^2 - c) + (\lambda_1^{-1} + s_1)(\omega^2 - \delta^2 - \mu^2)]^2}{[4\omega^2\delta^2 + (\omega^2 - \delta^2 - \mu^2)^2][\omega^2(\omega^2 - b)^2 + (a\omega^2 - c)^2]} \right\}^{1/2};$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha = & - \frac{2\omega\delta[\omega^2(\omega^2 - b)^2 + (a\omega^2 - c)^2] + \omega(\omega^2 - b)(\lambda_1^{-1} + s_1) \times}{(\omega^2 - \delta^2 - \mu^2)[\omega^2(\omega^2 - b)^2 + (a\omega^2 - c)^2] +} \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{\times [4\omega^2\delta^2 + (\omega^2 - \delta^2 - \mu^2)^2]}{+ (\lambda_1^{-1} + s_1)(a\omega^2 - c)[4\omega^2\delta^2 + (\omega^2 - \delta^2 - \mu^2)^2]}, \end{aligned}$$

$$a = \lambda_1^{-1} + 4\eta_0\lambda_2\lambda_1^{-1}, \quad b = 3k + 2\sigma(3k - 1) + 4\eta_0\lambda_1^{-1},$$

$$c = \lambda_1^{-1}[3k + 2\sigma(3k - 1)], \quad s_1 = A + B - a/3,$$

$$\mu = \sqrt{3}(A - B)/2, \quad \delta = -1/2(A + B) - a/3, \quad A = (-q/2 + \sqrt{Q})^{1/3},$$

$$B = (-q/2 - \sqrt{Q})^{1/3}, \quad Q = (p/3)^3 + (q/2)^2, \quad q = 2(a/3)^3 - 1/3ab + c,$$

$$p = b - 1/3a^2, \quad \sigma = \sigma^* (R_0^* p_\infty^*)^{-1}, \quad p_0 = p_0^* / p_\infty^*,$$