УДК 532.5

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ВИХРЬ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Е. Ю. Мещерякова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: helenmesh@gmail.com

Рассматриваются уравнения вращательно-симметричного движения идеальной несжимаемой жидкости. Выделен класс решений этих уравнений, описываемый с помощью гиперболического уравнения четвертого порядка с одной пространственной переменной, для которого ставится начально-краевая задача. С использованием нового класса точных решений уравнений Эйлера описан нестационарный цилиндрический вихрь в идеальной жидкости.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, вращательно-симметричное движение, нестационарный цилиндрический вихрь.

Введение. Ранее было исследовано стационарное осесимметричное течение несжимаемой вязкой жидкости внутри неограниченного цилиндра (на боковой границе задано условие прилипания, одно из поперечных сечений закрыто непроницаемой перегородкой) [1, 2], а также в зазоре между двумя коаксиальными цилиндрами [3]. В [3] показано, что в рассматриваемом классе решений имеет место следующий режим движения жидкости: жидкость опускается вдоль внешней стенки зазора и поднимается вдоль внутренней. Этот режим сходен с одним из режимов, обнаруженных в [1]. В настоящей работе рассмотрен нестационарный класс решений вращательно-симметричного движения идеальной несжимаемой жидкости, который допускает постановку начально-краевой задачи для течения жидкости в зазоре между двумя коаксиальными цилиндрами с непроницаемой перегородкой ($z = 0$). С использованием данного класса решений описано течение идеальной несжимаемой жидкости с закруткой.

1. Решение, построенное на основе частично инвариантного решения. Исследуются точные решения уравнений вращательно-симметричного движения идеальной несжимаемой жидкости, записанные в виде [4]

$$\begin{gathered}
r^3(u_t + uu_r + wu_z + \rho^{-1}p_r) - \Omega = 0,\\
w_t + uw_r + ww_z + \rho^{-1}p_z = 0,\\
u_r + r^{-1}u + w_z = 0,\\
\Omega_t + u\Omega_r + w\Omega_z = 0,
\end{gathered} \qquad (1)$$

где $\Omega = (rv)^2$ — квадрат циркуляции окружной компоненты скорости; u, v, w — проекции вектора скорости на оси r, θ, z цилиндрической системы координат соответственно;

Работа выполнена в рамках программы Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН (код проекта 2.13.2).

p, ρ — давление и плотность жидкости. Уравнения (1) содержат две пространственные переменные r, z и время t. Дополнительное понижение размерности задачи возможно на основе теоретико-группового подхода [5].

Один из классов частично инвариантных решений изучен в [6–8]. В данной работе исследуется новый класс решений, которые не являются частично инвариантными решениями, но могут быть получены на их основе с использованием эвристического подхода к построению точных решений [4]. Полагая в (1) $\Omega = 0$, получаем "укороченную" систему, которая допускает трехпараметрическую группу G, образованную операторами $\{\partial_z,\ t\partial_z + \partial_w,\ \partial_p\}$. Для указанной группы в [4] найдено частично инвариантное решение ранга 2 и дефекта 2. С помощью полученного частично инвариантного решения "укороченной" системы построено новое решение полной системы (1). Полагая $u = U(r,t)$ и интегрируя по z второе и третье уравнения (1), находим

$$w = \Psi(r,t)z, \qquad -\frac{p}{\rho} = (\Psi_t + U\Psi_r + \Psi^2)\,\frac{z^2}{2} + X(r,t), \tag{2}$$

где Ψ, X — новые искомые функции переменных r, t, причем

$$\Psi = -U_r - r^{-1}U. \tag{3}$$

В результате подстановки полученных выражений для искомых функций u, w, p в первое уравнение системы (1) имеем представление функции Ω

$$\Omega = -r^3(\lambda z^2/2 + \nu), \tag{4}$$

где

$$\lambda = (\Psi_t + U\Psi_r + \Psi^2)_r; \tag{5}$$

$$\nu = \mathrm{X}_r - U_t - UU_r. \tag{6}$$

Подставляя (4) в последнее уравнение системы (1), получаем еще два уравнения

$$\lambda_t + U\lambda_r + (2\Psi + 3r^{-1}U)\lambda = 0; \tag{7}$$

$$\nu_t + U\nu_r + 3r^{-1}U\nu = 0, \tag{8}$$

которые вместе с (3), (5), (6) образуют замкнутую систему для определения пяти функций переменных r, t. Эта система обладает рекуррентной структурой, что значительно упрощает ее анализ.

В подсистеме (3), (5), (7), которая может быть решена независимо от остальных уравнений, осуществлен переход к новой пространственной переменной — лагранжевой координате ξ, определяемой соотношениями

$$t > 0\colon\quad \frac{dr}{dt} = U(r,t), \qquad t = 0\colon\quad r = h(\xi), \tag{9}$$

где $h(\xi)$ — функция, удовлетворяющая условиям $h(\xi) \in C^2[\xi_1, \xi_2]$, $h(0) \geqslant 0$, $h'(\xi) > 0$ при $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$. Далее будем считать $r = \xi$ при $t = 0$.

Введем обозначение $l(\xi,t) = \lambda[r(\xi,t),t]$. Тогда в силу (3), (7) и соотношений $\lambda_t + U\lambda_r = l_t$, $U_r = r_{\xi t}/r_\xi$, следующих из определения $l(\xi,t)$, получаем соотношение

$$\frac{l_t}{l} + \frac{r_t}{r} - \frac{2r_{\xi t}}{r_\xi} = 0,$$

которое интегрируется по t:

$$\frac{rl}{r_\xi^2} = \sigma(\xi)$$

(σ — произвольная функция ξ).

Опуская тривиальный случай $\sigma = 0$, решение задачи в окрестности каждой точки, где функция σ сохраняет знак, можно свести к случаю $\sigma = 1$ или $\sigma = -1$ с помощью перенормировки лагранжевой координаты [4]. Итак, получено равенство

$$l = \sigma r^{-1} r_\xi^2. \tag{10}$$

Переходя аналогично к лагранжевой координате для ν, введем обозначение $n(\xi, t) = \nu[r(\xi, t), t]$. Тогда уравнение (8) можно записать в виде

$$n_t + 3r^{-1} r_t n = 0,$$

откуда следует равенство

$$n = k(\xi)/r^3 \tag{11}$$

(k — произвольная функция ξ).

С использованием новой искомой функции

$$y(\xi, t) = r^2/8 \tag{12}$$

исследуемая подсистема (3), (5), (7) была сведена к гиперболическому уравнению четвертого порядка [4]

$$\left(\frac{y_{\xi\xi}}{y_\xi}\right)_{tt} = \left[\left(\frac{y_{\xi t}}{y_\xi}\right)^2\right]_\xi - \sigma\,\frac{y_\xi^3}{y^2}, \tag{13}$$

где σ — произвольная функция ξ.

2. Начально-краевая задача для уравнения (13). Как известно, в случае несжимаемой жидкости система уравнений Эйлера является системой составного типа: у нее имеются как вещественные, так и комплексные характеристики. При рассматриваемой редукции этих уравнений их гиперболическая составляющая отделяется от эллиптической. Ранее были исследованы другие гиперболические движения идеальной несжимаемой жидкости. В [6–8] была рассмотрена редукция исходной системы к t-гиперболической системе уравнений, для которой исследовалась задача Коши. Предлагаемая редукция позволяет свести исходную систему к гиперболическому, но не к t-гиперболическому уравнению, которое допускает различные постановки краевых задач.

Естественной начально-краевой задачей для (13) является следующая:

$$y(\xi, 0) = y_0(\xi), \quad y_t(\xi, 0) = y_1(\xi), \quad \xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2; \tag{14}$$

$$y(\xi_1, t) = c_1, \quad y(\xi_2, t) = c_2, \quad t > 0. \tag{15}$$

Здесь ξ_1, ξ_2 и $c_2 > c_1 > 0$ — заданные постоянные; $y_0(\xi) > 0$, $y_1(\xi)$ — заданные функции. Далее полагается, что $y_0 \in C^2[\xi_1, \xi_2]$, $y_1 \in C^1[\xi_1, \xi_2]$ и, кроме того, выполнены условия согласования $y_0(\xi_i) = c_i$, $y_1(\xi_i) = 0$ $(i = 1, 2)$ и условие монотонности $y_0'(\xi) > 0$ при $\xi \in [\xi_1, \xi_2]$. Условия (14), (15) имеют ясный физический смысл. Из (14) и соотношений $r = 2(2y)^{1/2}$, $r_t = U$ следует, что при $t = 0$ выполнены равенства $r = 2[2y_0(\xi)]^{1/2}$, $rU = 4y_1(\xi)$. Исключая из этих равенств параметр ξ, получаем начальное распределение радиальной компоненты скорости $U(r, 0) = U_0(r)$ при $2\sqrt{2c_1} \leqslant r \leqslant 2\sqrt{2c_2}$. Равенства (15) означают, что при $r_i = 2\sqrt{2c_i} = \xi_i$ выполнены условия непротекания $r_{i,t} = U(r_i, t) = 0$, $i = 1, 2$. Это позволяет рассматривать изучаемое решение уравнений Эйлера как решение, описывающее движение в цилиндрическом слое с непроницаемыми стенками $\xi_2 > \xi_1 > 0$, возникающее при заданном начальном состоянии. В силу первой формулы (2) можно считать, что поперечное сечение $z = 0$ представляет собой непроницаемое дно цилиндрического слоя.

Заметим, что в начальный момент времени r совпадает с ξ. Тогда в силу определения $y(\xi, t) = r^2/8$, $y \to 0$ при $\xi \to 0$. Таким образом, последнее слагаемое в правой части (13)

$\sigma y_\xi^3/y^2$ имеет особенность, которой можно избежать, используя произвол функции σ. Для этого достаточно положить $\sigma = \pm\xi^2$.

В [9] установлена локальная по времени разрешимость начально-краевой задачи (13)–(15). Кроме того, для уравнения (13) рассмотрена обобщенная задача Гурса. Получены достаточные условия разрушения ее решения за конечное время, а также условия существования классического решения в случае, когда оно определено для всех значений радиальной координаты. Установлено, что в классе изучаемых решений уравнений Эйлера задание начального поля скоростей во всем пространстве не определяет однозначно решение задачи Коши.

3. Численное решение задачи (13)–(15). Задача (13)–(15) решалась численно. Заметим, что (13) можно упростить. Для этого рассмотрим следующие члены из (13):

$$\Big(\frac{y_{\xi\xi}}{y_\xi}\Big)_t = \frac{y_{\xi\xi t}}{y_\xi} - \frac{y_{\xi\xi} y_{\xi t}}{y_\xi^2}, \qquad \Big[\Big(\frac{y_{\xi t}}{y_\xi}\Big)^2\Big]_\xi = 2\,\frac{y_{\xi t}}{y_\xi}\Big(\frac{y_{\xi\xi t}}{y_\xi} - \frac{y_{\xi t} y_{\xi\xi}}{y_\xi^2}\Big). \tag{16}$$

С учетом (16) уравнение (13) принимает вид

$$\Big[\Big(\frac{y_{\xi\xi}}{y_\xi}\Big)_t\Big]_t - 2\,\frac{y_{\xi t}}{y_\xi}\Big(\frac{y_{\xi\xi}}{y_\xi}\Big)_t + \sigma\,\frac{y_\xi^3}{y^2} = 0. \tag{17}$$

Введем обозначение

$$f(\xi, t) = \Big(\frac{y_{\xi\xi}}{y_\xi}\Big)_t. \tag{18}$$

Тогда уравнение (17) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - 2\,\frac{y_{\xi t}}{y_\xi}\,f + \sigma\,\frac{y_\xi^3}{y^2} = 0.$$

Аппроксимируя производную f_t конечными разностями, получаем

$$\frac{f^{(n+1)} - f^{(n)}}{\tau} - 2\,\frac{y_{\xi t}^{(n)}}{y_\xi^{(n)}}\,f^{(n)} + \sigma\,\frac{(y_\xi^3)^{(n)}}{(y^2)^{(n)}} = 0, \tag{19}$$

где τ — шаг по времени; $f^{(i)}$, $y^{(i)}$ — значения функций f, y на i-м слое. Уравнение (19) записывается в виде

$$f^{(n+1)} = \Big[1 + 2\tau\Big(\frac{y_{\xi t}}{y_\xi}\Big)^{(n)}\Big] f^{(n)} - \tau\sigma\,\frac{(y_\xi^3)^{(n)}}{(y^2)^{(n)}}. \tag{20}$$

В силу (18) имеем

$$f^{(n+1)} = \frac{1}{\tau}\Big[\Big(\frac{y_{\xi\xi}}{y_\xi}\Big)^{(n+1)} - \Big(\frac{y_{\xi\xi}}{y_\xi}\Big)^{(n)}\Big],$$

откуда находим

$$\Big(\frac{y_{\xi\xi}}{y_\xi}\Big)^{(n+1)} = \Big(\frac{y_{\xi\xi}}{y_\xi}\Big)^{(n)} + \tau f^{(n+1)}. \tag{21}$$

Уравнения (20), (21) представляют собой алгоритм численного решения. При получении численного решения был рассмотрен случай, когда жидкость заполняет цилиндрический слой с непроницаемыми стенками $\xi_1 = 0{,}01$ и $\xi_2 = 2$. Заметим, что, для нахождения

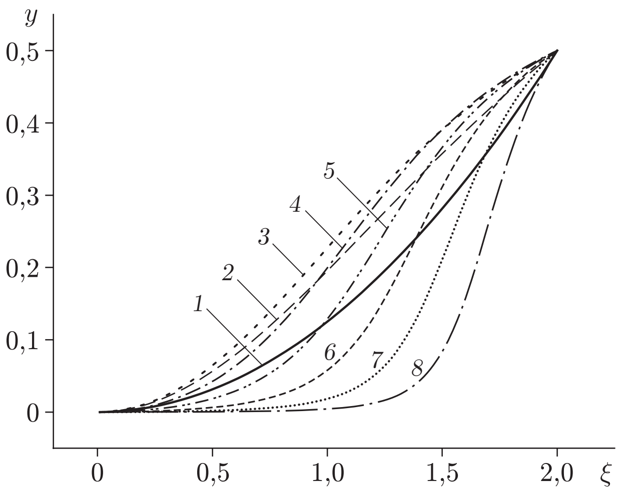

Рис. 1. Решение $y(\xi, t)$ задачи (13)–(15) в различные моменты времени:
1 — $t = 0$; *2* — $t = 5$; *3* — $t = 10$; *4* — $t = 15$; *5* — $t = 20$; *6* — $t = 25$; *7* — $t = 30$; *8* — $t = 35$

решения необходимо задать функции $y_0(\xi)$, $y_1(\xi)$, $\sigma(\xi)$, $k(\xi)$ и краевые условия c_1, c_2. Заметим также, что, поскольку в начальный момент времени лагранжевы и эйлеровы координаты неразличимы, в силу (12) можно положить $y_0(\xi) \equiv y(\xi, 0) = \xi^2/8$. При выбранных параметрах задачи ξ_1, ξ_2 в (15) $c_1 = \xi_1^2/8 = 1{,}25 \cdot 10^{-5}$, $c_2 = \xi_2^2/8 = 0{,}5$. Напомним, что на стенках внутреннего и внешнего цилиндров функция $y_1(\xi)$ должна обращаться в нуль. Функции $\sigma(\xi)$ и $k(\xi)$ произвольны, однако они должны обеспечивать положительность Ω. В расчетах, приведенных ниже, $y_1(\xi) = 0{,}05(\xi^2 - c_1^2)(c_2^2 - \xi^2)$, $\sigma(\xi) = -\xi^2$, $k(\xi) = -\xi^4$, кроме того, использовались малые шаги по времени и пространству: $\tau = 0{,}001$, $h \approx 0{,}000\,28$ соответственно.

Вычисляя с помощью начальных данных значение функции f на нулевом слое, по формуле (20) определяем значение данной функции на первом слое. По формуле (21) найдем $y_{\xi\xi}/y_\xi$ на $(n+1)$-м слое, после чего можно вычислить значение функции $y^{(n+1)}(\xi, t)$ путем решения соответствующей системы уравнений методом прогонки с использованием краевых условий (15). Повторяя описанный алгоритм необходимое количество раз, находим значение функции $y(\xi, t)$ на всех слоях (рис. 1). По функции $y(\xi, t)$ восстанавливается все поле скоростей, а также главный член в выражении для давления в изучаемом течении идеальной жидкости.

4. Движение в цилиндрическом слое. Проведем анализ соотношения (4). Поскольку Ω есть квадрат циркуляции окружной скорости, выражение, стоящее в правой части (4), не может быть отрицательным. Это означает, что $\lambda z^2/2 + \nu \leqslant 0$, т. е. возможны следующие случаи: 1) функции λ и ν не положительны; 2) функции λ и ν имеют противоположные знаки (в этом случае требование выполнения неравенства $\lambda z^2/2 + \nu \leqslant 0$ накладывает ограничения на величину $|z|$).

Случай 1. Данный случай соответствует течению с завихренностью во всем цилиндрическом слое. Выразим давление и компоненты скорости через $y(\xi, t)$. В силу (9), (12) получаем выражение для радиальной скорости

$$U = \sqrt{2}\,\frac{y_t}{\sqrt{y}}.$$

В силу (3), (12) находим

$$\Psi = -U_r - \frac{U}{r} = -\frac{(rU)_r}{r} = -\frac{((r^2)_t)_r}{2r} = -\frac{y_{\xi t}}{y_\xi}. \qquad (22)$$

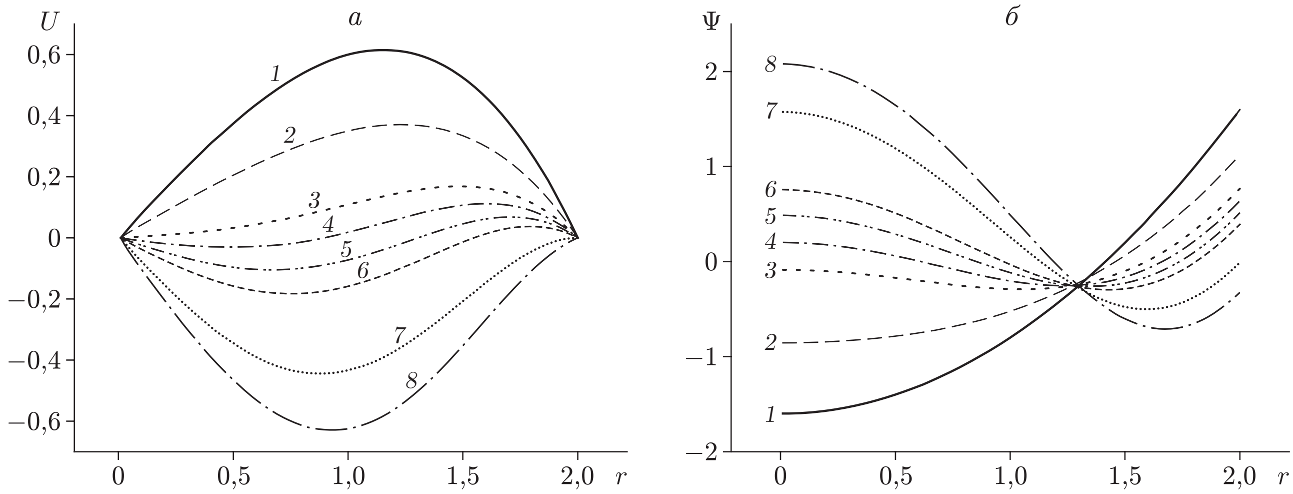

Рис. 2. Зависимости радиальной U (*а*) и осевой Ψ (*б*) скорости от координаты r в различные моменты времени:
1 — $t = 0$; *2* — $t = 5$; *3* — $t = 8$; *4* — $t = 9$; *5* — $t = 10$; *6* — $t = 11$; *7* — $t = 15$; *8* — $t = 20$

Из первой формулы (2) следует, что Ψ определяет зависимость осевой скорости w от r и t, при этом зависимость w от z является линейной. В силу (12) эйлерова координата r выражается через лагранжеву ξ следующим образом: $r = 2\sqrt{2y(\xi, t)}$. Следовательно, имеем параметрическое представление для всех искомых функций. На рис. 2 представлены зависимости $U(r)$ и $\Psi(r)$ в различные моменты времени t.

Величина Ω задана формулой (4). Функции λ и ν, входящие в ее представление, с учетом обозначений $l(\xi, t) = \lambda[r(\xi, t), t]$ и $n(\xi, t) = \nu[r(\xi, t), t]$, введенных выше, заданы формулами (10) и (11) соответственно. В силу (10), (12) находим

$$l(\xi, t) = \frac{\sigma(\xi) y_\xi^2}{\sqrt{2}\, y^{3/2}}.$$

Из (11), (12) следует

$$n(\xi, t) = \frac{k(\xi)}{16\sqrt{2}\, y^{3/2}}.$$

При малых значениях z основной вклад в величину Ω вносит функция $\nu(r)$, при больших — $\lambda(r)$. Найдя функцию Ω, нетрудно получить окружную скорость $v(r, t)$. На рис. 3 приведена зависимость $v(r, t)$ при $z = 1$.

Согласно второй формуле в (2) главный член в выражении для давления имеет вид $\Psi_t + U\Psi_r + \Psi^2$ (в лагранжевых координатах — $\tilde{\Psi}_t + \tilde{\Psi}^2$). С помощью формулы (22) выразим этот член через функцию $y(\xi, t)$:

$$\tilde{\Psi}_t + \tilde{\Psi}^2 = \frac{2y_{t\xi}^2 - y_\xi y_{\xi tt}}{y_\xi^2}.$$

На рис. 4 представлена зависимость главного члена в выражении для давления от координаты r в различные моменты времени.

Анализ течения показывает, что при малых временах жидкость опускается вдоль внутренней стенки цилиндрического слоя и поднимается вдоль внешней (режим 1). При больших временах картина меняется: жидкость опускается вдоль внешней стенки цилиндрического слоя и поднимается вдоль внутренней (режим 2). Переход из одного режима в

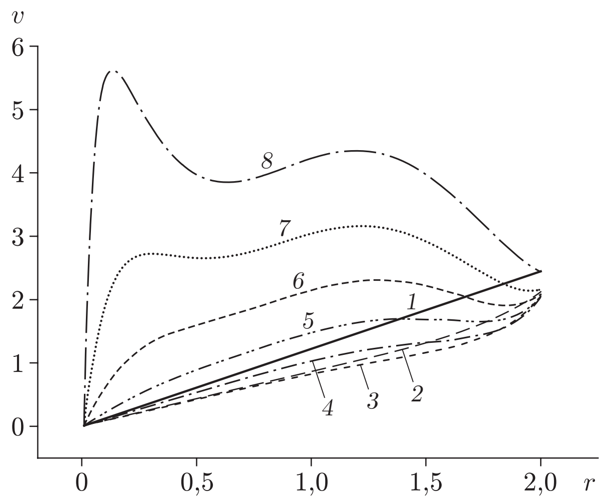

Рис. 3

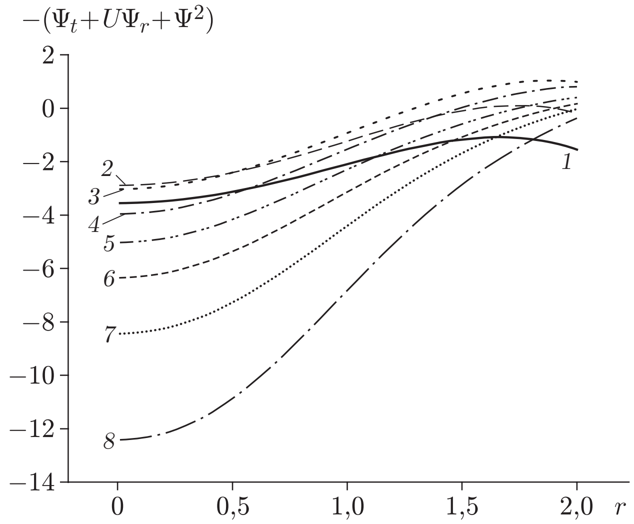

Рис. 4

Рис. 3. Зависимость окружной скорости v от координаты r в различные моменты времени при $z = 1$:
1 — $t = 0$; *2* — $t = 5$; *3* — $t = 10$; *4* — $t = 15$; *5* — $t = 20$; *6* — $t = 25$; *7* — $t = 30$; *8* — $t = 35$

Рис. 4. Зависимость главного члена в выражении для давления $-(\Psi_t+U\Psi_r+\Psi^2)$ от координаты r в различные моменты времени:
1 — $t = 0$; *2* — $t = 5$; *3* — $t = 10$; *4* — $t = 15$; *5* — $t = 20$; *6* — $t = 25$; *7* — $t = 30$; *8* — $t = 35$

другой реализуется в моменты времени $t = 10 \pm 2$. На рис. 2 при $t = 8 \div 11$ можно проследить эволюцию перехода: от внутреннего цилиндра отделяется цилиндрический слой, в котором реализован режим 2, в то время как между границей этого слоя и внешним цилиндром по-прежнему сохраняется режим 1, т. е. в течение некоторого промежутка времени во всем цилиндрическом слое реализуется двухъячеистый режим. По мере расширения цилиндрического слоя в направлении от оси режим 2 полностью сменяет режим 1. Такое движение, по-видимому, объясняется тем, что режим 1 (начальное инерциальное течение) сменяется режимом 2 под действием растущего градиента давления, которое уменьшается вблизи внутреннего цилиндра в рассматриваемом цилиндрическом слое и увеличивается в окрестности внешнего. Полученные результаты хорошо согласуются с решениями, приведенными в работе [1], и, кроме того, описывают смену режимов течения.

Случай 2. В данном случае внутри цилиндрического слоя существует поверхность, на которой $\Omega = 0$. Тогда по одну сторону от этой поверхности $\Omega > 0$, а по другую $\Omega < 0$, что не имеет физического смысла, так как величина Ω должна быть положительной по определению. Таким образом, с использованием рассматриваемого класса решений нельзя описать решение во всем цилиндрическом слое в случае, когда функции λ и ν имеют противоположные знаки.

Автор выражает благодарность В. В. Пухначеву за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Аристов С. Н.** Стационарный цилиндрический вихрь в вязкой жидкости // Докл. РАН. 2001. Т. 377, № 4. С. 477–480.
2. **Аристов С. Н., Пухначев В. В.** Об уравнениях вращательно-симметричного движения вязкой несжимаемой жидкости // Докл. РАН. 2004. Т. 394, № 5. С. 611–614.
3. **Аристов С. Н., Князев Д. В.** Вязкий вихрь между коаксиальными цилиндрами // Тр. 33-й Регион. молодеж. конф. "Проблемы теоретической и прикладной математики", Екатеринбург, 28 янв. — 1 февр. 2002 г. Екатеринбург: Ин-т математики и механики УрО РАН, 2002. С. 84–88.
4. **Пухначев В. В.** Точные решения уравнений гидродинамики, построенные на основе частично инвариантных // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 3. С. 18–25.
5. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
6. **Пухначев В. В.** Новый класс точных решений уравнений Эйлера // Докл. РАН. 2002. Т. 382, № 6. С. 777–780.
7. **Мещерякова Е. Ю.** Точные решения уравнений вращательно-симметричного движения идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 3. С. 66–75.
8. **Мещерякова Е. Ю.** О новых стационарных и автомодельных решениях уравнений Эйлера // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 4. С. 3–9.
9. **Мещерякова Е. Ю.** Разрешимость начально-краевых задач в гиперболической модели движения идеальной несжимаемой жидкости // Сиб. электрон. мат. изв. 2007. Т. 4. С. 282–291.

Поступила в редакцию 28/III 2013 г.