

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ВНЕШНИМ ПОТОКОМ, ОБУСЛОВЛЕННОЕ ЛУЧИСТЫМ ТЕПЛОБМЕНОМ

В. В. Лунев, А. Н. Румынский

(Москва)

Рассматривается ламинарный пограничный слой на поверхности клина, обтекаемого гиперзвуковым потоком излучающего газа, в предположении, что влияние излучения на течение газа в возмущенной области мало.

Предполагается, что излучение газа не влияет на его движение перед скачком уплотнения. Рассматривается лишь такой диапазон температур, когда радиационным давлением и плотностью лучистой энергии можно пренебречь. В этом случае влияние излучения на движение газа происходит лишь за счет притока тепла вследствие излучения и поглощения лучистой энергии движущимися частицами газа. В такой постановке задача обтекания клина идеальным излучающим газом решена в работе [1].

Для выделения эффекта взаимодействия пограничного и ударного слоя, обусловленного лучистым теплообменом, пограничный слой считается тонким и пренебрегается влиянием его толщины вытеснения на форму и параметры ударного слоя. Температура поверхности клина T_w , число Прандтля P и произведение вязкости газа на его плотность приняты постоянными.

1. В работах [1, 2] указано, что параметром, характеризующим относительное влияние излучения на параметры течения газа, является величина $K = 8 \alpha_1 B l / U^3$, где α_1 и $B = (\sigma / \pi) T^4$ — средний массовый коэффициент поглощения и интенсивность излучения абсолютно черного тела при температуре T , характерной для рассматриваемой области, l — характерный размер тела, U — скорость набегающего потока, σ — постоянная Стефана — Больцмана.

В общем случае обтекания тел излучающим газом возникает необходимость, помимо механического взаимодействия, учитывать еще лучистое взаимодействие различных областей течения, т. е. поглощение газом в одной области лучистой энергии, излучаемой другой областью.

Радиационное поле, создаваемое ударным слоем, будет влиять на течение в пограничном слое как непосредственно за счет переноса лучистой энергии, так и вследствие изменения параметров газа на внешней границе пограничного слоя [1]. С другой стороны, лучистое поле, создаваемое пограничным слоем, также влияет на параметры течения во всей возмущенной области. Поэтому, для того чтобы возмущения, вносимые в течение излучением, были малы в каком-либо слое, необходимо, чтобы условие $K \ll 1$ выполнялось одновременно для пограничного и ударного слоев.

При обтекании тел идеальным излучающим газом механизм влияния излучения сводится в основном к изменению полной энтальпии и плотности газа. В свою очередь изменение плотности газа вызывает появление звуковых волн, которые взаимодействуют с поверхностью тела и скачком уплотнения и приводят к изменению давления, скорости и других величин, образуя адиабатическую составляющую решения. Однако роль этой адиабатической составляющей мала по сравнению с общим влиянием излучения [1], так что будем ею пренебрегать и считать, что влияние излучения на движение газа в ударном слое сводится лишь к изменению его температуры и плотности при постоянном давлении.

В случае необходимости, влияние градиента давления, возникающего на поверхности клина за счет излучения, на характеристики пограничного слоя в линейной постановке, легко может быть учтено методом работы [3].

При законе вязкости $\mu\rho = C\mu_1 \cdot \rho_1$ уравнения движения сохраняют свой прежний вид и решаются независимо от уравнения энергии (в переменных Дородницына или Крокко). В этом случае уравнение баланса энергии в ламинарном пограничном слое на клине, обтекаемом гиперзвуковым потоком излучающего и поглощающего газа, с учетом изложенного может быть представлено в виде

$$\frac{1}{P} \frac{\partial^2 i}{\partial \xi^2} + \varphi \frac{\partial i}{\partial \xi} - 2x\varphi' \frac{\partial i}{\partial x} + \frac{\varphi''^2}{4} = -Kxq_R \quad (1.1)$$

Здесь iU^2 — энтальпия, xl — координата вдоль поверхности клина, ξ — переменная Блазиуса, φ — функция Блазиуса.

$$\xi = \frac{\eta \sqrt{VR}}{2\sqrt{x}}, \quad \eta = \int_0^y \rho dy, \quad \varphi''' + \varphi\varphi'' = 0, \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(\infty) = 2$$

где η — переменная Дородницына, yl — координата по нормали к образующей клина, $R = \rho_1 Ul / \mu_1$ — число Рейнольдса, $\rho\rho_1$ — плотность. Индексом «1» отмечены параметры за скачком уплотнения, определенные без учета излучения, штрих означает дифференцирование по ξ ; величина $Kq_R U^3 / 4l$ представляет собой скорость притока тепла в единице массы за счет излучения.

Радиационное поле в пограничном слое можно считать осесимметричным. Действительно, из обычных оценок пограничного слоя для изменения интенсивности излучения J_ν вдоль луча l , составляющего угол ϑ с осью y , имеем

$$\frac{\partial J_\nu}{\partial l} = \cos \vartheta \frac{\partial J_\nu}{\partial y} \left[1 + O\left(\frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\sqrt{R}}\right) \right] \quad \left(\frac{\partial J_\nu / \partial x}{\partial J_\nu / \partial y} \approx \frac{1}{\sqrt{R}} \right) \quad (1.2)$$

Отсюда следует, что осесимметричность радиационного поля имеет место для всех лучей, для которых выполнено неравенство $\operatorname{tg} \vartheta / \sqrt{R} \ll 1$. Это неравенство нарушается только в очень узком диапазоне изменения угла ϑ вблизи $\vartheta = \pi/2$, где $\cos \vartheta \approx 1/\sqrt{R}$. Однако легко видеть, что при этом $\partial J_\nu / \partial l \approx 1/\sqrt{R}$, т. е. переносом лучистой энергии в этой области можно пренебречь как величиной $\sim 1/R$. В этом случае величина q_R может быть представлена в виде [2]

$$q_R = I_1(\delta, \xi) + I_2(\xi) + I_3(\delta, \xi) \quad (1.3)$$

$$I_1(\delta, \xi) = \int_0^\infty \alpha_\nu B_{\nu 1} \int_0^{\pi/2} [1 - \varepsilon_\nu(\vartheta, x, \delta)] \exp \left[-S \sqrt{x} \frac{\tau_\nu(\xi_\delta, \xi)}{\cos \vartheta} \right] d\vartheta d\nu$$

$$I_2(\xi) = \int_0^\infty \alpha_\nu \int_0^\xi B_\nu' E_2 [S \sqrt{x} \tau_\nu(\xi, \xi^*)] d\xi^* d\nu, \quad E_n(t) = \int_1^\infty t^{-n} e^{-tz} dz$$

$$I_3(\delta, \xi) = - \int_0^\infty \alpha_\nu \int_\xi^\delta B_\nu' E_2 [S \sqrt{x} \tau_\nu(\xi^*, \xi)] d\xi^* d\nu$$

Здесь $B_\nu \sigma T_1^4 / \pi$ — функция Планка, характеризующая распределение интенсивности излучения абсолютно черного тела по спектру; α_ν, α_1 — массовый монохроматический коэффициент поглощения; ϑ — угол между направлением луча и нормалью к поверхности клина; $\varepsilon_\nu(\vartheta, x, \delta) B_{\nu 1}$ интенсивность излучения, падающего на внешнюю границу пограничного слоя под углом ϑ в точку с координатой x ; δ — толщина пограничного слоя. Индекс δ относится к параметрам на внешней границе

пограничного слоя, $S\sqrt{x}\tau_v(\xi, \xi^*)$ — оптическая толщина слоя $\Delta = (y - y^*)l$, S — параметр, характеризующий самопоглощение в пограничном слое

$$\tau_v(\xi, \xi^*) = \int_{\xi^*}^{\xi} \alpha_v d\xi, \quad S = \frac{2\alpha_1 \rho_1 l}{\sqrt{R}}$$

При составлении соотношений (1.3) принято, что поверхность пластины абсолютно черная и интенсивность выходящих из поверхности лучей не зависит от направления.

Зависимость функции $\epsilon_v(\vartheta, x, \delta)$ определяется формой ударного слоя и распределением параметров в нем. В рассматриваемом случае присоединенного скачка функция $\epsilon_v(\vartheta, x, y)$ определяется решением уравнения переноса в области с постоянными параметрами, ограниченной поверхностями клина $y = 0$ и скачка уплотнения $y = x \operatorname{tg} \theta$. Для лучей, идущих от поверхности скачка, указанное решение может быть представлено в виде [1]

$$\epsilon_v(\vartheta, x, y) = 1 - \exp\left(-\frac{\rho_1 \alpha_1 \alpha_{v1} lh}{\cos \gamma}\right) \quad (1.4)$$

где $lh(x, y) = x \sin \theta - y \cos \theta$ — расстояние от точки до поверхности скачка уплотнения, γ — угол между лучом и нормалью к скачку.

Справедливо соотношение (φ — угол азимута луча)

$$\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \theta + \sin \vartheta \sin \theta \cos \varphi \quad (1.5)$$

При гиперзвуковых скоростях $\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta \ll 1$, поэтому второе слагаемое правой части соотношения (1.5) сравнимо с первым лишь при $\cos \varphi \approx 1$ и $|\operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} \theta| \approx 1$, т. е. в узкой области вблизи $\hat{\vartheta} = \pi/2$. Перенос излучения в которой пренебрежимо мал [1]. На этом основании при подстановке (1.4) в интеграл $I_1(\delta, \xi)$ можно принять $\cos \gamma = \cos \vartheta \times \cos \theta \approx \cos \vartheta$, в результате чего формула (1.3) для $I_1(\delta, \xi)$ может быть приведена к виду

$$I_1(\delta, \xi) = \int_0^{\infty} \alpha_v B_{v1} E_2 \left[N \alpha_{v1} \frac{h(x, \delta) - (\delta - y)}{\sin \theta} + S \sqrt{x} \chi_v(\xi, \xi^*) \right] dv$$

$$\chi_v(\xi, \xi^*) = \int_{\xi^*}^{\xi} \left(\alpha_v - \frac{\alpha_{v1}}{\rho} \right) d\xi^*, \quad N = \alpha_1 \rho_1 l \sin \theta \quad (1.6)$$

Решение задачи будем искать в виде ряда по степеням K , ограничиваясь при этом лишь двумя первыми членами разложения

$$i = i_0(\xi) + K i_1(\xi, x) + \dots \quad (1.7)$$

где $i_0(\xi)$ — известное решение для неизлучающего пограничного слоя [4]

$$i_0(\xi) = \frac{1}{8} \theta_1(\xi) + \frac{C}{8}(\xi) + i_1 \quad (1.8)$$

$$\theta_1(\xi) = 2P \int_{\infty}^{\xi} (\varphi''(\xi^*))^P d\xi^* \int_0^{\xi^*} |\varphi''(\xi^*)|^{2-P} d\xi^*$$

$$\theta_2(\xi) = \int_{\infty}^{\xi} |\varphi''(\xi^*)|^P d\xi^*, \quad C = -\frac{8(i_1 - i_w) + \theta_1(0)}{\theta_2(0)}$$

Подставляя (1.7) в (1.1), для функции $i_1(\xi, x)$ получим уравнение

$$\frac{1}{P} \frac{\partial^2 i_1}{\partial \xi^2} + \varphi \frac{\partial i_1}{\partial \xi} - 2x \varphi' \frac{\partial i_1}{\partial x} = \{I_1(\delta, \xi) + I_2(\xi) + I_3(\delta, \xi)\} x \quad (1.9)$$

При этом интегралы в правой части зависят лишь от профиля температуры в пограничном слое, вычисленного без учета излучения.

Таким образом, задача сводится к нахождению решения уравнения (1.9), удовлетворяющего (при постоянной температуре поверхности) граничному условию $i_1(0) = 0$. На внешней границе пограничного слоя при $\xi = \xi_8$ это решение должно непрерывно переходить в решение для идеального газа [1].

Влияние излучения на параметры частицы газа может сказаться лишь по истечении некоторого времени пребывания ее в возмущенной области с высокой температурой. Поэтому искомое решение должно удовлетворять условию $i_1(0, \xi) = 0$.

2. В строгой постановке задачи о пограничном слое на телах, обтекаемых излучающим газом, в формулу для определения скорости притока тепла q_R в общем случае должна входить конечная оптическая толщина пограничного слоя, так как характер лучистого поля зависит от многочисленных краевых условий и не будет следовать асимптотическому характеру пограничного слоя. Формально это обстоятельство выражается в том, что при неограниченном возрастании ξ аргумент функции E_2 в интегралах (1.3) не стремится к определенному пределу.

Однако в рамках принятых в работе допущений о малой толщине пограничного слоя уравнение (1.9) можно свести к уравнению асимптотического пограничного слоя. Для этого заметим, что при $\delta \ll h$ в формуле (1.6) в пограничном слое можно принять

$$h(x, \delta) + (\delta - y) = h(x, 0) [1 + O(\delta/h)] \approx x \sin \theta \quad (2.1)$$

Кроме того, так как при $\xi \rightarrow \infty$ функция $i_0' \approx \exp(-P\xi^2/4)$, то, предполагая гладкую зависимость коэффициента поглощения от температуры и учитывая равенство $B' = (dB/di)i_0'$, будем иметь

$$\begin{aligned} \chi(\delta, \xi) &\approx \chi(\infty, \xi) = \chi(\xi) \\ I_1(\delta, \xi) &\approx I_1(\infty, \xi) = I_1(\xi), \quad I_3(\delta, \xi) \approx I_3(\infty, \xi) = I_3(\xi) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Сумма интегралов $I_1(\xi) + I_3(\xi)$ характеризует приток тепла лучистой энергии в рассматриваемой точке пограничного слоя, обусловленный излучением ударного и верхней частью пограничного слоя. Интегралы $I_3 \rightarrow 0$, $\chi \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$ и, следовательно, $I_1(\xi) + I_3(\xi)$ переходит в составляющую решения работы [1], обусловленную излучением газа, заключенного между скачком уплотнения и рассматриваемым сечением ударного слоя с координатной y при $y \rightarrow 0$. Таким образом, составляющие решения уравнения (1.9), обусловленные присутствием в правой части интегралов I_1, I_3 , носят асимптотический характер.

Что касается интеграла $I_2(\xi)$, то в общем случае он будет зависеть от конечной оптической толщины пограничного слоя. Его значение при $\xi = \xi_8$ будет отличаться от предельного значения, так как при этом $E_2 \rightarrow 0$. Однако с некоторыми дополнительными ограничениями и в этом случае можно воспользоваться схемой асимптотического пограничного слоя. Примем, что оптическая толщина $\tau_{v1}(\delta, 0)$ слоя газа шириной порядка δ и с коэффициентами поглощения, равными их значениям вне пограничного слоя α_v , пренебрежимо мала, так что $E_2[\tau_{v1}(\delta, 0)] \approx 1$. В этом случае интеграл $I_2(\xi)$ может быть представлен в виде¹ ($\xi \leq \xi_8$)

$$\begin{aligned} I_2(\xi) &= \int_0^\infty \alpha_v \int_0^\xi B_v' E_2 [S \sqrt{x} \chi_v(\xi, \xi^*) + \tau_{v1}(y, y^*)] d\xi^* dv \approx \\ &\approx \int_0^\infty \alpha_v \int_0^\xi B_v' E_2 [S \sqrt{x} \chi_v(\xi, \xi^*)] d\xi^* dv \end{aligned} \quad (2.3)$$

¹ Здесь не пренебрегается оптической толщиной тонкого пограничного слоя, так как во многих случаях последняя может быть конечной вследствие загрязнения пограничного слоя какими-либо поглощающими примесями.

Так как в силу (2.2) имеем $\chi_v(\xi_s, \xi^*) \approx \chi_v(\infty, \xi^*)$, то $I_2(\xi_s) \approx I_2(\infty)$ и составляющая решения уравнения (1.9), обусловленная наличием в правой части интеграла $I_2(\xi)$ также будет иметь асимптотический характер.

Таким образом, в рассматриваемом случае задачи о пограничном слое в излучающем газе может быть использована схема асимптотического пограничного слоя¹. При этом решение уравнения (1.9) при $\xi \rightarrow \infty$ будет переходить в соответствующее решение для идеального газа в ударном слое при $y \rightarrow 0$. Это решение, согласно [1], может быть представлено в виде $i_1 = i_{11} + i_{12}$, где i_{11} — адиабатическая составляющая, которая, как было указано выше, мала по сравнению с i_{12} — изменением полной энтальпии газа за счет излучения. Величина i_{12} имеет вид [1]:

$$i_{12} = \int_{x_0}^x q_R(x, y) dx \quad (x_0 = y / \operatorname{tg} \theta) \quad (2.4)$$

Без учета влияния пограничного слоя эта функция вычислена в работе [1]. Исходя из вышеизложенного, легко получить выражение для i_{12} и при наличии пограничного слоя. В этом случае подынтегральная функция в (2.4) может быть представлена в виде

$$q_R(x, y) = -I_1^*(x, y) - I_2^*(x, y) \quad (2.5)$$

$$I_1^*(x, y) = \int_0^\infty \alpha_{v1} B_{v1} E_2 \left[\frac{N \alpha_{v1} (x \sin \theta - y \cos \theta)}{\sin \theta} \right] dv$$

$$I_2^*(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \alpha_{v1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I_v(x, y, \varphi, \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dv$$

$$I_v(x, y, \varphi, \vartheta) = \int_0^\infty B_v' \exp \left[-\frac{S \sqrt{x'} \chi_v(\xi^*) + N \alpha_{v1} y / \sin \theta}{\cos \vartheta} \right] d\xi^*$$

$$x' = x + y \cos \varphi \operatorname{tg} \vartheta$$

Легко видеть, что $I_1^*(x, 0) = I_1(\infty)$, $I_2^*(x, 0) = I_2(\infty)$ при $y \rightarrow 0$, т. е. (2.5) автоматически переходит в правую часть (1.9) при $\xi \rightarrow \infty$.

При $\xi \rightarrow \infty$ члены уравнения (1.9), содержащие частные производные i_1 по ξ , пропадают² и уравнение (1.9) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого, обращающееся в нуль при $x = 0$, определяется формулой (2.3) с $x_0 = 0$. Отсюда следует, что при формулировании краевой задачи для уравнения (1.9) достаточно потребовать ограниченности решения при $\xi \rightarrow \infty$ и это решение автоматически будет переходить в решение задачи для идеального газа, т. е. автоматически будет выполняться условие на внешней границе пограничного слоя.

Заметим, что решение уравнения (1.9), удовлетворяющее поставленным краевым условиям, единственно. В самом деле, так как решение этого уравнения при $\xi \rightarrow \infty$ определяется единственным образом, то для доказательства нашего утверждения достаточно показать, что решение однородного уравнения (1.9), обращающееся при $x \leq x_0$ в нуль на границах $x = 0$, $\xi = 0$ и $\xi = \infty$ тождественно равно нулю всюду в полуплоскости $\xi \geq 0$, $0 \leq x \leq x_0$. Последнее же с очевидностью вытекает из принципа максимального значения для однородного уравнения (1.9), справедливость которого

¹ Заметим, что использование схемы асимптотического пограничного слоя возможно также и в том случае, когда коэффициенты поглощения газа пренебрежимо малы или в ударном или в пограничном слое.

² Обращение в нуль первого члена уравнения (1.9) очевидно; второй член обращается в нуль в силу того, что $\varphi(\xi) \approx \xi$ при $\xi \rightarrow \infty$ и, если $\varphi i_1 = \operatorname{const} \neq 0$, то $i_1 \approx \ln \xi \rightarrow \infty$, что невозможно.

в силу неравенства $\varphi' > 0$ в любой внутренней точке области следует из справедливости принципа максимального значения для обычного уравнения теплопроводности [5].

3. Для решения уравнения (1.9) воспользуемся известным разложением [6]

$$E_2(t) = 1 + t \lg Ct + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)n!} t^n \quad (\lg C = 0.42278 \dots) \quad (3.1)$$

При этом в общем случае возникают дополнительные трудности, связанные с тем, что аргумент E_2 в интеграле I_1 представляет собой сумму членов с разными степенями x , вследствие чего первый член (3.1) будет неоднородной функцией x , что препятствует разделению переменных.

Для простоты ограничимся рассмотрением предельных случаев

$$N\alpha_{v1} \gg S\sqrt{x}\chi_v(\infty), \quad N\alpha_{v1} \ll S\sqrt{x}\chi_v(\infty) \quad (3.2)$$

Первый случай имеет место при оптической толщине ударного слоя, значительно превышающей последнюю в пограничном слое. В этом случае решение уравнения (1.9) с учетом (3.1) и (3.2) будет иметь вид

$$i_1(\xi, x) = x \{g_0(\xi) + Sx^{1/2} [g_1(\xi) \lg(CS\sqrt{x}) + g(\xi)] + N\alpha_{v1} [H_1(\xi) \lg(CxN) + H(\xi)] + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)n!} [g_n(\xi) S^n x^{n/2} + H_n(\xi) (Nx)^n]\} \quad (3.3)$$

Коэффициенты g_n, g, H_n, H удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} g_n'' + P\varphi g_n' - P(n+2)\varphi'g_n &= P\Phi_n & (n=0, 1, 2, \dots) \\ g'' + P\varphi g' - 2P\varphi'g &= P\Phi & (3.4) \\ H_n'' + P\varphi H_n' - 2P(n+1)\varphi'H_n &= PF_n & (n=1, 2, \dots) \\ H'' + P\varphi H' - 2P\varphi'H &= PF \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= 2\alpha(T, T)T^4 - \alpha(T, T_w)T_w^4, & \Phi &= J - \varphi'g_1 \\ \Phi_n &= J_1^{(n)} + J_2^{(n)} & (n=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_1^{(n)} &= \int_0^{\infty} \alpha_v \int_0^{\xi} B_v' \chi_v^n(\xi, \xi^*) d\xi^* dv, & J_2^{(n)} &= - \int_0^{\infty} \alpha(v) \int_{\xi}^{\xi^*} B_v' \tau_v^n(\xi^*, \xi) d\xi^* dv \\ J &= \int_0^{\infty} \alpha_v \int_0^{\xi} B_v' \chi_v(\xi, \xi^*) \lg \chi_v(\xi, \xi^*) d\xi^* dv - \int_0^{\infty} \alpha_v \int_{\xi}^{\xi^*} B_v' \tau_v(\xi^*, \xi) \lg \tau_v(\xi^*, \xi) d\xi^* dv \\ \alpha(T_j, T_k) &= \int_0^{\infty} \alpha_v(T_j) p_v(T_k) dv, & p_v &= B_v/T^4 \\ F_n &= \int_0^{\infty} \alpha_v(T) p_v(T_1) \alpha_{v1}^n dv, & F &= \int_0^{\infty} \alpha_v(T) p_v(T_1) \alpha_{v1} \lg \alpha_{v1} dv \end{aligned} \quad (3.5)$$

Так как уравнения для всех коэффициентов ряда (3.3) однотипны, достаточно ограничиться подробным анализом лишь одной, например, первой группы уравнений (3.4).

Пусть $Y_n(\xi)$ — решения однородных уравнений, соответствующих системе (3.4) и при $\xi = 0$ удовлетворяют условиям $Y_n(0) = 1, Y_n'(0) = 0$.

Тогда общие решения уравнений (3.5) будут иметь вид

$$g_n = -Y_n P \int_{\xi}^{\infty} Y_n^{-2} \exp\left(-P \int_0^{\xi} \varphi d\xi\right) \int_0^{\xi} Y_n \Phi_n \exp\left(P \int_0^{\xi} \varphi d\xi\right) d\xi d\xi - \\ - C_1 Y_n \int_{\xi}^{\infty} Y_n^{-2} \exp\left(-P \int_0^{\xi} \varphi d\xi\right) d\xi + C_2 Y_n \quad (3.6)$$

Частные решения $Y_n(\xi)$, удовлетворяющие указанным выше условиям, затабулированы в [3]. Подробный анализ решений типа (3.6) и асимптотическое поведение функций Y_n даны в работах [3,7]. При $\xi \rightarrow \infty$ функции Y_n неограниченно возрастают. Требуя ограниченности решения на бесконечности (см. § 2), получим $C_2 = 0$. При $\xi \rightarrow \infty$ имеем $Y_n \approx \xi^{n+2}$. Исходя из этого, легко показать [3], что при ограниченных Φ_n первое слагаемое решения (3.9) ограничено, причем при $\Phi_n \rightarrow 0$ оно стремится к нулю.

Из (3.5) следует, что все Φ_n ограничены при $\xi \rightarrow \infty$, поэтому Φ_n можно представить в виде

$$\Phi_n = \left(\Phi_n - \frac{1}{2} \Phi_{n\infty} \varphi\right) + \frac{1}{2} \Phi_{n\infty} \varphi \quad (3.7)$$

При $\xi \rightarrow \infty$ первое слагаемое правой части (3.7) стремится к нулю пропорционально функции $\exp(-\xi^2)$, второму же слагаемому соответствуют частные решения уравнений (3.4), имеющие вид

$$g_n^* = -\frac{\Phi_{n\infty}}{2(n+2)} \quad (3.8)$$

Определяя постоянную C_1 из условия $g_n(0) = 0$, с использованием (3.7), (3.8) можно представить решение (3.6) в окончательном виде:

$$g_n = \left[P I_2^{(n)}(0) + \frac{\Phi_{n\infty}}{2(n+2)} \right] Y_n \frac{I_1^{(n)}(\xi)}{I_1^{(n)}(0)} - Y_n P I_2^{(n)}(\xi) - \frac{\Phi_{n\infty}}{2(n+2)} \quad (3.9)$$

$$I_1^{(n)}(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} Y_n^{-2} \varphi^{nP} d\xi, \quad (3.10) \\ I_2^{(n)}(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \varphi^{nP} Y_n^{-2} \int_0^{\xi} Y_n \left(\Phi_n - \frac{1}{2} \Phi_{n\infty} \varphi'\right) \varphi^{n-P} d\xi d\xi$$

Аналогичное решение легко получается для второй группы уравнений (3.4); при этом частное решение, соответствующее решению (3.8), имеет вид $H_n^* = -F_{n\infty}/4(n+1)$.

Из (3.10) следует ограниченность всех функций g_n , H_n при $\xi \rightarrow \infty$ и, в частности, ограниченность g_1 . H_1 необходимая для ограниченности правых частей уравнений для g и H .

Решение задачи при выполнении второго условия (3.2) получается из (3.3) заменой в нем множителя $(Nx)^n$ при коэффициентах H_n на $(S\sqrt{x})^n$. При этом вторая группа уравнений (3.4) переходит в первую, а F_n и F в $\Phi_n(\chi)$ и $\Phi(\chi)$, определяемые из равенств

$$\Phi_n(\chi) = \int_0^{\infty} \alpha_\nu(T) P_\nu(T_1) \chi_\nu^n d\nu, \quad \Phi(\chi) = \int_0^{\infty} \alpha_\nu(T) P_\nu(T_1) \chi_\nu \lg \chi_\nu d\nu \quad (3.11)$$

Решение задачи в общем случае легко получается, если в преобразованиях интеграла I_1 воспользоваться приближенным равенством [2]

$$E_3(t) \approx \frac{1}{2} e^{-\beta t} \quad (1.5 \leq \beta \leq 2) \quad (3.12)$$

В этом случае в интеграле I_1 вместо ряда (3.1) используется разложение

$$E_2 [N x \alpha_{v1} + S \sqrt{x} \chi_v(\xi)] = \frac{\beta}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+m} \frac{(\beta N x \alpha_{v1})^n}{n!} \frac{(\beta S \sqrt{x} \chi_v)^m}{m!} \quad (3.13)$$

При этом устраняются трудности, связанные с неоднородностью функций по x , благодаря чему метод решения задачи для общего случая ничем не отличается от изложенного выше.

Для доказательства сходимости полученного решения рассмотрим поведение функций $g_n(\xi)$ при больших n . Если в уравнениях (3.4) правая часть всюду отрицательна, то решения этих уравнений будут положительными, так как в противном случае эти решения имели бы отрицательный минимум, что, как легко видеть из структуры уравнений (3.4), невозможно.

Пусть G_n — решение уравнений (3.4) при $\Phi_n = -1$. Тогда в силу указанного свойства этих уравнений имеем

$$\Phi_{n\max} G_n > g_n > \Phi_{n\min} G_n, \quad \text{или} \quad |g_n| < M_n G_n \quad (3.14)$$

где M_n — максимум модуля Φ_n .

Функции G_n образуют убывающую с возрастанием n последовательность. В самом деле, разность $G_{nm} = G_n - G_m$ удовлетворяет уравнению

$$G_{nm}'' + P\Phi G_{nm}' - (n+2)P\Phi' G_{nm} = (n-m)P\Phi' G_m, \quad (G_{nm}(0) = 0) \quad (3.15)$$

из которого следует, что $G_n > G_m$ при $n < m$.

Далее из (3.5) имеем

$$M_n \leq \text{const } Z^n, \quad Z \leq \max \{\tau_v, \chi_v\}$$

Следовательно, ряд (3.3) мажорируется рядом с общим членом $Z^n/n!$ и поэтому равномерно сходится вместе со своими производными.

Таким образом, показано, что ряд (3.3) во всем диапазоне изменения параметров N и S , т. е. при любых оптических толщинах будет решением уравнения (1.9), удовлетворяющим поставленным начальным и граничным условиям.

Предельный случай абсолютно непрозрачного ударного слоя автоматически получается из вышеизложенного, если в интеграле (1.6) устремить параметр N к бесконечности, сохраняя при этом по параметру S разложение (3.4). Решение задачи для этого случая отличается от полученного лишь тем, что в ряде (3.3) все коэффициенты $H_n \equiv 0$, а в функции Φ_0 (см. (3.5)) появляется дополнительный член $-\alpha(T, T_1)T_1^4/2$. В общем случае, когда коэффициент черноты поверхности клина $\epsilon_w \leq 1$, эта функция может быть представлена в виде

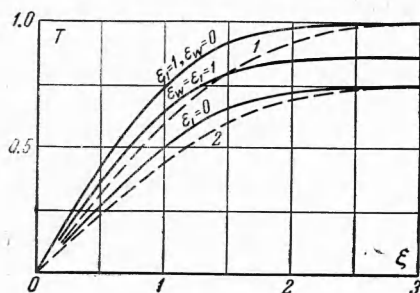
$$\Phi_0 = 2\alpha(T, T)T^4 - \alpha(T, T_w)\epsilon_w T_w^4 - \epsilon_1(2 - \epsilon_w)\alpha(T, T_1) \cdot T_1^4 \quad (3.16)$$

где следует положить $\epsilon_1 = 1$. В пренебрежении зависимостью эффективного коэффициента черноты ударного слоя ϵ_1 от x (см. (1.4)) выражение (3.16) может быть использовано для всех промежуточных значений ϵ_1 от нуля до единицы, при этом все $H_n \equiv 0$.

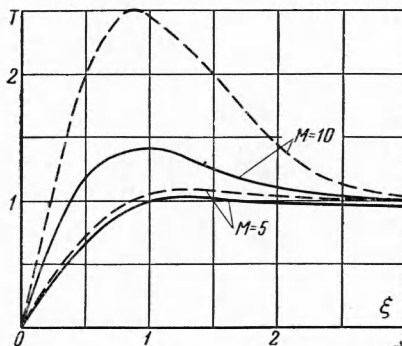
Так как здесь $\epsilon_w \leq 1$, то в решении (3.3) появляются дополнительные члены, учитывающие ослабление отраженного от поверхности клина излучения в нижних слоях пограничного слоя. Эти члены нетрудно учесть, если в исходном уравнении (1.1) воспользоваться для скорости притока тепла лучистой энергии его выражением, записанным для произвольного коэффициента черноты поверхности клина [2,8]. В пренебрежении самопоглощением в пограничном слое указанные члены исчезают.

4. Для иллюстрации эффекта влияния излучения на тепловые потоки и профиль температуры в пограничном слое на клине рассмотрим несколько примеров. Для получения качественной картины будем считать коэффициенты поглощения постоянными во всей возмущенной области. Оптическую толщину пограничного слоя будем считать малой¹, т. е. в решении (3.3) сохраним лишь первый член разложения по S .

На фиг. 1 приведены профили температуры T в пограничном слое при $M=1$, $\gamma=1.2$, $Kx=0,5$ с учетом и без учета (пунктир 1) излучения для двух предельных случаев очень малой ($\epsilon_1=0$) и очень большой ($\epsilon_1=1$) оптической толщины ударного слоя и для различных значений коэффициента черноты интенсивно охлаждаемой поверхности клина ($T_w \approx 0$). Из приведенных результатов следует, что при $\epsilon_1=1$ температура в пограничном слое выше, чем при $\epsilon_1=0$, что объясняется, с одной стороны, уменьшением охлаждения газа в ударном слое при возрастании его оптической толщины, с другой, — поглощением в пограничном слое энергии, излученной ударным слоем. Этот эффект возрастает с уменьшением степени черноты поверхности ϵ_w . При этом на внешней границе приращение температуры пропорционально ϵ_w и в случае $\epsilon_w=0$ оно равно нулю. В пограничном же слое температура значительно возрастает. Это увеличение температуры приводит к увеличению тепловых потоков. Для рассматриваемого примера при $\epsilon_w=\epsilon_1=1$ относительное приращение теплового потока $\Delta q_w/q_{w0}Kx=0.5415$, а при $\epsilon_w=0$ это приращение равно 1.0020.



Фиг. 1



Фиг. 2

Если при больших оптических толщинах ударного слоя ($\epsilon_1=1$) определяющую роль играет эффект поглощения газом в одной области лучистой энергии, излучаемой другой областью, то при малых оптических толщинах ($\epsilon_1=0$) основным является эффект высвечивания газа. В отличие от эффекта перепоглощения энергии высвечивание приводит к понижению температуры во всей возмущенной области и, соответственно, к снижению тепловых потоков.

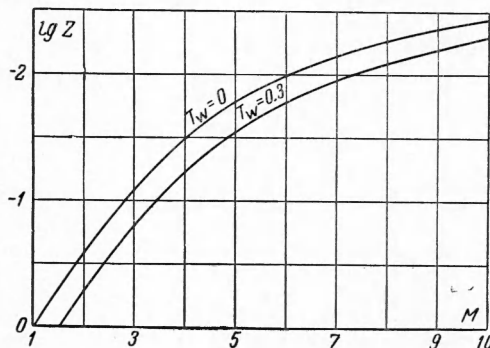
В нашем примере при $\epsilon_1=0$ величина $\Delta q_w/q_{w0}Kx$ равна -0.1875 . Заметим, что при $\epsilon_1=0$ и $T_w \ll T_e$ величина ϵ_w не влияет на профиль температуры в возмущенной области.

Таким образом, в зависимости от того, какой из указанных эффектов играет преобладающую роль, наличие радиационного поля в газовом потоке может приводить как к увеличению, так и к уменьшению конвективных потоков.

На фиг. 2 построены профили температуры в пограничном слое с учетом и без учета (пунктир) излучения для $M=5$ и 10 , $\gamma=1.2$, $Kx=0.1$, $T_w \approx 0$. В этих случаях температура ударного слоя относительно невелика, поэтому основную роль играет высвечивание пограничного слоя ($\epsilon_1=0$).

¹ Случай больших оптических толщин в пограничном слое рассмотрен в работе [9].

С ростом M в ударном слое (уменьшением угла раствора клина) суммарный эффект излучения на конвективный теплообмен с сильной степени уменьшается. Это объясняется, во-первых, тем, что при больших M в силу резко выраженного максимума в профиле температур излучает лишь относительно небольшая область высокотемпературного пограничного слоя; во-вторых, значительным снижением (в несколько раз) максимума температуры при интенсивном охлаждении, что вследствие зависимости $q_R \approx T^4$ может привести к снижению эффекта на порядки величин. С ростом температуры стенки температура в пограничном слое возрастает, а следовательно, возрастает влияние излучения. Влияние числа M и T_w на относительное приращение конвективного потока



Фиг. 3

$Z = \Delta q_w / q_{w0} K_0 x$ за счет высвечивания ($\epsilon_1 = 0$) ударного и пограничного слоев показано на фиг. 3. Здесь величина $K_0 = K(T_1 / T_{00})^4 (U_{\max} / U)^3$ построена по параметрам торможения потока T_{00} и U_{\max} .

В заключение отметим, что при наличии радиационного поля профиль температуры в заданном сечении пограничного слоя не характеризуется ее локальным значением на внешней границе. Частицы газа, находящиеся в определенный момент в рассматриваемом сечении, попадают в область пограничного слоя значительно ниже по потоку с температурой гораздо большей, чем ее значение на внешней границе указанного сечения. В результате этого вместо ожидаемого, согласно методу локального подобия профиля температуры (пунктир 2 на фиг. 1) реализуется профиль с большими значениями температуры по сечению пограничного слоя.

Таким образом, при наличии излучения нельзя определять конвективные потоки по обычным формулам пограничного слоя для неизлучающего газа с подстановкой в них локального значения энтальпии на внешней границе, вычисленной с учетом излучения ударного слоя [1], т. е. нельзя пользоваться методом локального подобия. Исключение может составлять лишь окрестность критической точки тупоносого тела, так как в этом случае температура на внешней границе пограничного слоя постоянна [8, 10].

Поступила 3 VIII 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Лунев В. В. Обтекание клина гиперзвуковым потоком излучающего газа. ПМТФ, 1960, № 2.
2. Румынский А. Н. Пограничный слой в излучающих и поглощающих средах. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 2.
3. Лунев В. В. Применение метода малых возмущений к задачам ламинарного пограничного слоя. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 5.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкостей и газов. ГТТИ, 1950.
5. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. ГТТИ, 1950.
6. Кузнецов Е. С., Овчинский Б. В. Результаты численного интегрирования уравнения теории рассеяния света в атмосфере. Тр. геофиз. ин-та, Изд-во АН СССР, 1949, № 4.
7. Лунев В. В. Обтекание конуса вязким теплопроводным газом с большими сверхзвуковыми скоростями. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 6.
8. Румынский А. Н. Теплообмен в лобовой точке, омываемой излучающей средой. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 1.
9. Румынский А. Н. Пограничный слой с подслоем непрозрачного газа. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 3.
10. Лунев В. В., Мурзинов И. Н. Влияние излучения на течение в окрестности критической точки тупого тела. ПМТФ, 1961, № 2.