ды получено приближенное аналитическое решение. Показана возможность применения резонансного режима для создания в выходном сечении трубы пульсирующей скоростной струи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Войцеховский Б. В., Николаев В. П. и др.** Некоторые результаты разрушения горных пород импульсным водометом // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.— 1963.— Вып. 1, № 2.
2. **Контрактор Д.** Применение переходных режимов жидкости в гидравлической разработке полезных ископаемых // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Теор. основы инж. расчетов.— 1972.— № 2.
3. **Актершев С. П., Федоров А. В., Фомин В. М.** Математическое моделирование испытаний магистральных трубопроводов на герметичность с учетом защемленных объемов воздуха // Динамика многофазных сред/Под. ред. В. М. Фомина.— Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1985.
4. **Zhao T., Sanada K., Kitagawa A., Takenaka T.** On the effect of trapped air in a liquid conduit on the transient flow rate // Bull. JSME.— 1985.— V. 28, N 242.
5. **Martin C.** Entrapped air in pipelines // Proc. 2nd Intern. conf. on pressure surges, London, 1976.— Cranfield, 1977.
6. **Бердников В. В., Козырева Т. С., Пантюхин Б. А.** Исследование процессов заполнения магистралей жидкостью // Изв. вузов. Авиац. техника.— 1982.— № 3.
7. **Актершев С. П., Федоров А. В.** Увеличение давления гидроудара в трубопроводе при наличии локализованного объема газа // ПМТФ.— 1987.— № 6.
8. **Чарный И. А.** Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах.— М.: Недра, 1975.
9. **Атавин А. А., Скребков Г. П.** Упрощенный метод расчета давления в гидросистеме с компенсатором // Вестн. машиностроения.— 1962.— № 8.
10. **Kitagawa A., Takenaka T., Kato Y.** Study on the high pressure generation by means of oil hammer // Bull. JSME.— 1984.— V. 27, N 234.
11. **Найфэ А.** Введение в методы возмущений.— М.: Мир, 1984.
12. **Gear C. W.** The automatic integration of ordinary differential equations // Communs ACM.— 1971.— V. 14, N 3.

г. Новосибирск *Поступила 21/I 1987 г., в окончательном варианте—26/V 1988 г.*

УДК 532.612

Ю. В. Саночкин

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

Теоретическому рассмотрению термокапиллярной конвекции в точной или приближенной постановке посвящен ряд работ. Одномерная модель движения тонкого слоя жидкости, на свободной поверхности которой предполагалось линейное распределение температуры, предложена в [1]. На ее непоследовательность обращено внимание в [2]. Приближенное решение [1] обобщено с учетом замечаний [2] в [3]. Замкнутое решение уравнений свободной конвекции для плоскопараллельного стационарного течения в горизонтальном слое жидкости с постоянным вдоль слоя градиентом температуры дано в [4]. Наряду с обычной тепловой рассматривалась термокапиллярная конвекция. Решение [4]* обобщено в [5, 6] на случай других граничных условий для температуры и в [7] для двух слоев несмешивающихся жидкостей. В [8] рассмотрено течение двух слоев несмешивающихся жидкостей в плоском наклонном канале с неизотермическими параллельными стенками. Учитывалось действие градиента давления, силы тяжести и капиллярной силы на плоской границе раздела жидкостей. Двумерная конвекция в плоской прямоугольной кювете изучалась численно в [9] и ряде последующих работ. При слабом движении задача допускает аналитическое решение [10]. Асимптотический анализ для мелкого канала и малоинтенсивной конвекции проведен в [11]. Указанные работы относятся к случаю, когда нагрев жидкости осуществляется через дно или боковые стенки сосуда. Стационарная конвекция при сосредоточенном нагреве горизонтального слоя жидкости сверху численно моделировалась в [12], а процесс ее установления — в [13]. Выводу уравнений, описывающих нестационарную термокапиллярную конвекцию в тонких слоях жидкости, и их применению к рассмотрению некоторых задач посвящена работа [14]. Точное решение, описывающее стационарное движение жидкости в полупространстве при неоднородном нагреве свободной поверхности, получено в [15]. Задача о пространственно-периодической стационарной

* Критическое обсуждение [4] содержится в [13].

конвекции, обусловленной соответствующим распределением объемного выделения тепла в слое жидкости, рассмотрена в линейном приближении в [16]. Нагрев в прозрачной жидкости может осуществляться вследствие поглощения лазерного излучения. Экспериментально периодические термокапиллярные течения изучаются в [17].

В данной работе рассматриваются примеры других простейших течений, обусловленных термокапиллярным эффектом.

1. Течение Куэтта. Пусть имеются горизонтальные слои легкой ($0 < y < h_1$) и тяжелой ($-h_2 < y < 0$) несмешивающихся жидкостей (жидкости 1 и 2 соответственно). Давление в газе над ними предполагается постоянным. Свободная поверхность жидкости $y = h_1$ характеризуется коэффициентом поверхностного натяжения α_1. Граница раздела жидкостей $y = 0$ имеет поверхностное натяжение α_2. Нижняя граница слоя второй жидкости — твердая поверхность. На способных к деформации границах должны удовлетворяться кинематическое и связывающие компоненты тензора напряжений динамические условия [18]. Хотя плотности $\rho_{1,2}$ и коэффициенты переноса жидкостей считаются не зависящими от температуры, тепловая и динамическая задачи связаны этими условиями.

Можно показать, что границы жидкостей останутся плоскими и градиента давления в горизонтальном направлении не возникнет и при наличии термокапиллярного движения. Уравнения Навье — Стокса и энергии имеют удовлетворяющее граничным условиям точное решение с кусочно-линейным профилем скорости

$$u_1 = u_0 + \frac{\alpha_1'(\beta + \gamma_1 h_1)}{\rho_1\nu_1}y, \quad u_2 = u_0\left(1 + \frac{y}{h_2}\right), \tag{1.1}$$

$$u_0 = \frac{(\alpha_1' + \alpha_2')\beta h_2}{\rho_2\nu_2} + \frac{\alpha_1'\gamma_1 h_1 h_2}{\rho_2\nu_2}, \quad T_{1,2} = -x(\beta + \gamma_{1,2}y) + \theta_{1,2}(y),$$

$$\chi_{1,2}\theta_{1,2}'' + (\beta + \gamma_{1,2}y)u_{1,2} + \frac{\nu_{1,2}}{c_{1,2}}u_{1,2}'^2 = 0,$$

$$\theta_1(0) = \theta_2(0), \quad \varkappa_1\theta_1'(0) = \varkappa_2\theta_2'(0).$$

Здесь $u_{1,2}$ — горизонтальные компоненты скорости; $\alpha_{1,2}' = -d\alpha_{1,2}/dT$; β — градиент температуры вдоль поверхности раздела; γ_1, γ_2 — константы, связанные соотношением $\varkappa_1\gamma_1 = \varkappa_2\gamma_2$; $\varkappa_{1,2}$ — коэффициенты теплопроводности; $\chi_{1,2}$ — коэффициенты температуропроводности; $c_{1,2}$ — теплоемкости жидкостей; $\nu_{1,2}$ — коэффициенты кинематической вязкости; $u_0 = u(0)$ — скорость на границе раздела. Решение (1.1) для температуры совпадает с найденным в [8], из него при $\gamma_{1,2} = 0$ получается решение [4]. Согласно (1.1), течения в слоях оказываются взаимосвязанными, причем поле скоростей не зависит от вида функций $\theta_{1,2}$.

В зависимости от выбора констант β и $\gamma_{1,2}$ могут быть рассмотрены различные случаи, соответствующие разным постановкам тепловых задач. Пусть, например, свободная поверхность первой жидкости имеет постоянную температуру $\beta + \gamma_1 h_1 = 0$. Тогда скорость потока в верхнем слое постоянна ($u_1 = u_0$) и решение от α_1' и ν_1 не зависит. Течение вызывается капиллярной силой, обусловленной неизотермичностью поверхности раздела жидкостей.

Возможен и обратный случай, когда в верхнем слое имеется течение с линейным профилем скорости, а в нижнем скорость постоянна и в силу условия прилипания равна нулю. При этом $(\alpha_1' + \alpha_2')\beta + \alpha_1'\gamma_1 h_1 = 0$ и капиллярные силы на границах жидкостей направлены в противоположные стороны. Режимы течения в слое вязкой жидкости конечной толщины с постоянной скоростью имеют, возможно, прикладной интерес. Движение происходит в сторону уменьшения температуры, и при затвердевании такого потока уровень неоднородностей и местных напряжений в твердой фазе будет понижен.

Если $\beta = 0$, то из решения выпадает зависимость от α_2'. Движение инициируется капиллярной силой на свободной поверхности, вторая жидкость вовлекается в движение вязкими напряжениями. Если $\beta = \gamma_2 h_2$, то изотермическим оказывается дно ванны. Движение жидкости представляет собой наложение течений, вызываемых двумя постоянными сдвиговыми напряжениями на движущихся границах слоев.

В случае, когда дно сосуда $y = -h_2$ наклонено к плоскости горизонта под углом φ, решение (1.1) видоизменяется. Поле температур описывается прежними формулами, а в выражения для скорости добавляются квадратичные по координате члены, обусловленные наличием массовой силы:

$$u_1 = u_0 + \frac{\alpha_1'(\beta + \gamma_1 h_1)}{\rho_1 \nu_1} y + \frac{g h_1^2 \sin\varphi}{2\nu_1} \frac{y}{h_1}\left(2 - \frac{y}{h_1}\right), \tag{1.2}$$

$$u_2 = \frac{g h_2^2 \sin\varphi}{2\nu_2}\left(1 - \frac{y^2}{h_2^2}\right) + \frac{y + h_2}{\nu_2\rho_2}\left[\rho_1 h_1 g \sin\varphi + \alpha_1'(\beta + \gamma_1 h_1) + \alpha_2'\beta\right]$$

(g — ускорение силы тяжести, скорость на границе раздела u_0 находится из второго уравнения). Из (1.2) видны условия, при которых определяющую роль играет капиллярная сила. По-видимому, решение (1.2) может представить интерес в связи с описанием флоут-процесса в производстве стекла, о котором упоминается в [7]. В этом случае происходит стекание слоя стекла по слою расплавленного олова.

2. Стационарная пространственно-периодическая конвекция. Горизонтальный слой несжимаемой жидкости ограничен снизу дном сосуда $y = -h$ и сверху свободной границей $y = 0$. В отсутствие теплового воздействия жидкость покоится, имеет постоянную температуру и равновесное распределение давления $p_0 = -\rho g y + \mathrm{const}$.

Рассмотрим плоское установившееся термокапиллярное движение в слое, обусловленное пространственно-периодическим возмущением температуры свободной поверхности жидкости $T = \Delta T \cos kx$. Оно, как увидим, отличается от исследованного в [16], где конвекция вызывается пространственной модуляцией объемного тепловыделения. Поверхностное тепловое возмущение имеет место, например, при взаимодействии лазерного излучения с непрозрачной жидкостью.

Воспользуемся линеаризованными около исходного равновесного состояния уравнениями движения и энергии, что позволит получить отличающееся простотой и наглядностью аналитическое решение. Граничные условия напишем в приближении недеформируемости поверхности жидкости термокапиллярным движением. Это означает, что на ней учитываются только касательные напряжения, а капиллярным давлением и другими эффектами, связанными с искривлением границы жидкости, пренебрегается. Однако возникающие при движении жидкости градиенты давления имеют самое непосредственное отношение к искривлению свободной поверхности [2]. Поэтому определение поля давлений в приближении плоской границы жидкости малоинтересно и градиент давления следует исключить из уравнений движения. Компоненты скорости удовлетворяют, таким образом, бигармоническому уравнению, а возмущение температуры $T(x, y)$ и напряженность вихря скорости $\Omega(x, y)$ — уравнению Лапласа.

Можно построить $2\pi/k$-периодическое вдоль оси x решение задачи с учетом нелинейных конвективных членов, используя регулярную теорию возмущений с параметром ΔT, как сделано, например, при рассмотрении термогравитационной конвекции в [19]. Это не входит, однако, в цели работы. Приводимое ниже решение, справедливое при достаточно малой амплитуде модуляции температуры на границе слоя, есть первый член указанного разложения:

$$T = \theta(y)\cos kx,\ u = f'(y)\sin kx,\ v = -kf(y)\cos kx, \tag{2.1}$$

$$\Omega = F(y)\sin kx,\ F = k^2 f - f'',\quad (d^2/dy^2 - k^2)^2 f = 0,\quad (d^2/dy^2 - k^2)\theta = 0,$$

$$f(0) = f(-h) = f'(-h) = 0,\ f''(0) = \alpha'\Delta T k/(\nu\rho),$$

$$\theta(0) = \Delta T,\ \theta(-h) = 0.$$

Здесь u — горизонтальная, v — вертикальная компоненты скорости. Принято, что возмущение температуры на нижней границе слоя исчезает. Линии тока, согласно (2.1), определяются уравнением $|f \sin kx| = C$. Движение жидкости имеет характер циркуляции по замкнутым траекториям внутри отдельных ячеек длиной $\Delta x = \pi/k$. Решение уравнений (2.1) дается формулами

$$f = \frac{\alpha' \Delta T}{\nu \rho a} [y \operatorname{sh} kh \operatorname{sh}(kh + ky) - kh(y + h) \operatorname{sh} ky], \tag{2.2}$$

$$\theta = \Delta T \frac{\operatorname{sh}(kh + ky)}{\operatorname{sh} kh}, \quad a = \operatorname{sh} 2kh - 2kh,$$

$$F = \frac{2\alpha' \Delta T k}{\nu \rho a} [kh \operatorname{ch} ky - \operatorname{sh} kh \operatorname{ch}(kh + ky)].$$

Согласно (2.2), $F(-h) \neq 0$, если h конечно. При $h \to \infty$ решение принимает особенно простой вид

$$\theta = \Delta T e^{ky}, \ F = -\frac{\alpha' \Delta T k}{\nu \rho} e^{ky}, \ f = \frac{\alpha' \Delta T}{2\nu \rho} y e^{ky}. \tag{2.3}$$

3. Колебательное термокапиллярное движение. Приведем пример плоского течения, явно зависящего от времени. Пусть несжимаемая жидкость занимает полупространство $y < 0$. Рассмотрим колебательное термокапиллярное движение, вызываемое периодическим возмущением температуры свободной поверхности жидкости $T = \Delta T \cos kx \cos \omega t$. Как и в п. **2**, задача решается в линейном приближении. Имея в виду рассмотреть только термокапиллярный механизм конвекции, не будем учитывать член с архимедовой подъемной силой. К обсуждению этого вопроса вернемся после получения решения. При составлении граничных условий делается предположение о недеформируемости поверхности жидкости термокапиллярным движением. Этим исключается из рассмотрения возбуждение поверхностных и в силу условия абсолютной несжимаемости внутренних волн. При $y \to -\infty$ возмущения всех величин должны исчезать. Решение можно искать в виде (2.1), где теперь θ, f и F суть функции t, y. Искомые $T(x, y, t)$ и $\Omega(x, y, t)$ удовлетворяют уравнению теплопроводности. Решение существенно упрощается благодаря тому обстоятельству, что в полубесконечной области известно второе граничное условие для Ω при $y \to -\infty$. Поэтому можно вначале получить решение для Ω, а затем, воспользовавшись соотношением (2.1) между f и F, найти $f(y, t)$ из уравнения 2-го порядка. Таким путем получаются выражения

$$\theta = \Delta T e^{\delta y} \cos(my + \omega t), \ F = -\frac{\alpha' \Delta T k}{\nu \rho} e^{\delta_1 y} \cos(m_1 y + \omega t), \tag{3.1}$$

$$f = \frac{\alpha' \Delta T k}{\rho \omega} [e^{\delta_1 y} \sin(m_1 y + \omega t) - e^{ky} \sin \omega t],$$

$$2\delta^2 = (k^4 + \omega^2/\chi^2)^{1/2} + k^2, \ 2m^2 = (k^4 + \omega^2/\chi^2)^{1/2} - k^2,$$

$$2\delta_1^2 = (k^4 + \omega^2/\nu^2)^{1/2} + k^2, \quad 2m_1^2 = (k^4 + \omega^2/\nu^2)^{1/2} - k^2.$$

При $\omega \to 0$ решение (3.1) переходит в (2.3). Колебания разных величин согласно (3.1) сдвинуты по фазе друг относительно друга, причем сдвиг изменяется в зависимости от координаты y.

Если вместо температуры задать на границе жидкости плотность теплового потока q, изменяющуюся по тому же закону, то решение отличается от (3.1) сдвигом фаз колебаний на величину $\Delta\varphi = \operatorname{arctg}(m/\delta)$ и заменой $\Delta T \to \Delta q / \varkappa (k^4 + \omega^2/\chi^2)^{1/4}$. Таким образом, колебаниям с одинаковыми амплитудами температуры в разных жидкостях отвечают разные значения теплового потока. Амплитуда колебаний скорости пропорциональна амплитуде теплового возмущения и зависит, как и сдвиг фаз, от теплофизических свойств жидкости.

Масштаб длины в горизонтальном направлении задается граничным условием. Решение (3.1) характеризуется экспоненциальным затуханием возмущений в глубь жидкости и напоминает решение известной задачи

Стокса [18]. При этом глубины проникновения для разных величин оказываются, вообще говоря, разными. Для компонент скорости характерный вертикальный масштаб длины является (поскольку $\delta_1 > k$) величиной $\sim k^{-1}$, как и в горизонтальном направлении. При больших k, когда δ, $\delta_1 \simeq k$, глубины проникновения для температуры и ротора скорости также оказываются величинами $\sim k^{-1}$. Напротив, при малых k, когда $\delta \sim (\omega/\chi)^{1/2} \gg k$, $\delta_1 \sim (\omega/\nu)^{1/2} \gg k$, они малы по сравнению с k^{-1}.

Как известно (см., например, [4]), пренебречь термогравитационной конвекцией можно, если толщина слоя жидкости не превышает критического значения h_*. Таким образом, при $kh_* \gg 1$ термокапиллярный механизм конвекции будет играть определяющую роль.

Нетрудно сформулировать критерий применимости проведенного рассмотрения. При выполнении условий

$$\omega^2 \gg \frac{\alpha' \Delta T k^3}{\rho}, \quad \omega \gg \frac{\alpha' \Delta T k}{\nu\rho} \begin{cases} 1, & \Pr \leqslant 1, \\ \Pr, & \Pr > 1 \end{cases}$$

отброшенные нелинейные члены малы по сравнению с производными по времени или диффузионными членами соответственно. Здесь Pr — число Прандтля. Согласно (3.1), отклик системы на колебательное возмущение граничного условия не имеет резонансного характера. Это связано, как отмечалось, с предположением о «жесткости» свободной поверхности в поперечном направлении. В реальных условиях колебательное тепловое воздействие на границу жидкости приведет к возбуждению и, по-видимому, в некоторых случаях к раскачке волн. Можно говорить, следовательно, о применимости проведенного рассмотрения лишь вдали от резонансных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Левич В. Г.** Физико-химическая гидродинамика.— М.: Физматгиз, 1959.
2. **Yih C.-S.** Fluid motion induced by surface-tension variation // Phys. Fluids.—1968. — V. 11, N 3.
3. **Levich V. G., Krylov V. S.** Surface-tension-driven phenomena // Ann. Rev. Fluid Mech.— Palo-Alto, Calif., 1969.— V. 1.— P. 302.
4. **Бирих Р. В.** О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ.— 1966.— № 3.
5. **Гончаренко Г. Н., Уринцев А. Л.** Об устойчивости движения жидкости, вызванного термокапиллярными силами // ПМТФ.— 1971.— № 6.
6. **Кирдяшкин А. Г.** Термокапиллярная и термогравитационная конвекция в горизонтальном слое жидкости // Гидромеханика и процессы переноса в невесомости.— Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983.
7. **Попов В. В.** Смешанная конвекция в двухслойной жидкости // Теорет. основы хим. технологии.— 1981.— Т. 15, № 3.
8. **Napolitano L. G.** Plane Marangoni — Poiseuille flow of two immiscible fluids // Acta-Astronaut.— 1980.— V. 7, N 4—5.
9. **Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. и др.** Гидромеханика невесомости.— М.: Наука, 1976.
10. **De Socio L. M.** Convection driven by non-uniform surface tension // Lett. Heat and Mass Transfer.— 1979.— V. 6.— P. 375.
11. **Sen A. K., Davis S. H.** Steady thermocapillary flows in two-dimensional slots // J. Fluid Mech.— 1982.— V. 121.— P. 163.
12. **Саночкин Ю. В., Тухватуллин Р. С., Филиппов С. С.** Численное моделирование термокапиллярной конвекции в слое жидкости при локальном нагреве ее свободной поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1987.— № 4.
13. **Pimputkar S. M., Ostrach S.** Transient thermocapillary flow in thin liquid layers // Phys. Fluids.— 1980.— V. 23, N 7.
14. **Копбосынов Б. К., Пухначев В. В.** Термокапиллярное движение в тонком слое жидкости // Гидромеханика и процессы переноса в невесомости.— Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983.
15. **Саночкин Ю. В.** О движении жидкости под воздействием поверхностной силы // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1987.— № 3.
16. **Акопян Р. С., Зельдович Б. Я.** Термокапиллярный механизм конвекции в жидкостях, обусловленный поглощением пространственно-периодического лазерного излучения // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1985.— № 5.
17. **Kirdyashkin A. G.** Thermocapillary periodic flows // Intern. J. Heat and Mass Transfer.— 1987.— V. 30, N 1.

18. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Гидродинамика.— М.: Наука, 1986.
19. **Батищев В. А., Колесов В. В. и др.** Влияние пространственной модуляции температурного поля на устойчивость двумерного стационарного течения в горизонтальном слое жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1983.— № 3.

г. Москва *Поступила 7/XII 1987 г., в окончательном варианте — 11/V 1988 г.*

УДК 532.546

Э. Н. Береславский

О РЕЖИМЕ ГРУНТОВЫХ ВОД ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ИЗ ОРОСИТЕЛЯ ИРРИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

В [1, 2] исследована задача о плоской установившейся фильтрации (по закону Дарси) в однородном изотропном грунте из оросителя бороздового типа при наличии капиллярности грунта в предположении, что на большой глубине (теоретически бесконечной) имеется дренирующий пласт, поглощающий воду. Случай конечной глубины залегания дренирующего слоя рассмотрен в работе [3], в которой отмечается, что испарение оказывает обычно относительно малое влияние на фильтрационные характеристики рассматриваемого течения. В настоящей работе строится решение задачи фильтрации из бороздового оросителя через слой грунта, когда в основании находится сильноводопроницаемый пласт с напорными водами. Исследован характер зависимости фильтрационного расхода из оросителя и радиуса капиллярного растекания воды в стороны от оросителя от мощности слоя, диаметра оросителя, величины подпора и капиллярности грунта.

На рис. 1 схематично представлена правая половина области движения из оросителя через слой грунта толщиной T в подстилающий его сильноводопроницаемый напорный горизонт, напор воды в котором H считается от границы раздела между ним и слоем фильтрации. Ороситель наполнен водой до уровня поверхности земли, принимаемой за горизонтальную плоскость.

При первоначальном рассмотрении ороситель заменим точечным источником, расположенным в точке A. Предположим, что $\psi|_{AF} = 0$. На кривой депрессии должны выполняться условия $\varphi = -y + h_{\text{к}}$, $\psi = Q/2$, где $\omega = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал течения, отнесенный к коэффициенту фильтрации грунта, $h_{\text{к}}$ — высота капиллярного поднятия воды в грунте, Q — искомый фильтрационный расход из оросителя, также отнесенный к коэффициенту фильтрации. Тогда вдоль сильнопроницаемого слоя $\varphi = T - H$. При решении задачи, кроме расхода Q, большой практический интерес представляет радиус L капиллярного растекания воды в стороны от оросителя.

Произведем конформное отображение области комплексного потенциала ω (рис. 2) и области $dz/d\omega$ (рис. 3) — инверсии годографа скорости — на верхнюю полуплоскость переменной ξ (рис. 4).

По формуле Кристоффеля — Шварца найдем

$$\omega = T - H - \frac{Q}{\pi}\operatorname{arsh}\sqrt{\frac{a-\xi}{(1-a)\xi}}; \tag{1}$$

$$\frac{dz}{d\omega} = -\frac{2i}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}} + A\sqrt{\frac{\xi}{1-\xi}}\right). \tag{2}$$

Здесь

$$a = \operatorname{th}^2\frac{\pi(T-H-h_{\text{к}})}{Q}, \quad A = b - 1 \quad (0 \leqslant A < +\infty) \tag{3}$$

(a и b — параметры конформного отображения (рис. 4)).

Отметим, что непосредственное исключение параметра ξ из соотношений (1) и (2) не позволяет полностью решить задачу. Введем новую вспомогательную переменную τ, полагая

$$\xi = \sin^2\tau. \tag{4}$$