

УДК 539.3

ПРИБЛИЖЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФОРМЫ СЖАТОГО ГИБКОГО СТЕРЖНЯ

Н. С. Астапов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Предложена компактная запись алгоритма точного вычисления координат плоской упругой линии продольно сжатого гибкого стержня при любых нагрузках. Получены существенно более точные, чем известные в литературе, приближенные формулы, позволяющие вычислять координаты упругой линии стержня с погрешностью не более 1 % от длины стержня вплоть до нагрузок, превышающих критическую нагрузку Эйлера на 30 %.

Равновесные закритические формы сжатых гибких стержней впервые исследованы Лагранжем и подробно изучены с применением таблиц эллиптических интегралов в [1, 2]. Однако для практического использования приведенные в [1, 2] способы оказываются трудоемкими из-за необходимости вычисления величин, выражаемых через эллиптические интегралы первого и второго рода.

Постановка задачи. Точное решение. Рассмотрим гибкий упругий шарнирно опертый стержень, нагруженный осевой сжимающей силой P , сохраняющей величину и направление при деформации стержня. Предположим, что длина L осевой линии стержня неизменна, а ось может изгибаться только в плоскости (x, y) . Исследуем устойчивую равновесную форму стержня при нагрузке $P > P_* = EI(\pi/L)^2$ (EI — изгибная жесткость стержня), т. е. при нагрузке, превышающей первую критическую нагрузку Эйлера [1–4].

Введем обозначения для неполных и полных эллиптических интегралов первого и второго рода:

$$F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad F = F\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad E(\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi, \quad E = E\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Пусть $\lambda = P/P_*$ — безразмерный параметр нагрузки (сжимающей нагрузки, отнесенной к критической нагрузке Эйлера); a и $f = a/L$ — максимальный размерный и безразмерный прогибы стержня; $t = s/L$ — расстояние от конца стержня до точки оси, отнесенное к длине стержня; $x(t)$ и $y(t)$ — искомые безразмерные (отнесенные к длине L стержня) декартовы координаты точки t , $0 \leq t \leq 1$. Для вычисления с любой точностью координат точки, лежащей на оси изогнутого продольно сжимающей нагрузкой λ стержня на расстоянии s ($0 \leq s \leq L$) от его конца (расстояние считается вдоль оси стержня), можно построить [1–4] следующий алгоритм:

1. По данной нагрузке $\lambda \geq 1$ вычислить параметр k , $0 \leq k < 1$ из уравнения

$$F = \pi\sqrt{\lambda}/2.$$

Параметр k имеет геометрический смысл синуса половины угла между касательной к оси изогнутого стержня в его вершине и первоначально прямолинейным направлением стержня. Например, $k = 0$ для $\lambda = 1$, $k \rightarrow 1$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

2. Вычислить максимальный прогиб, который достигается при $t = 1/2$, т. е. в середине стержня: $f = 2k/(\pi\sqrt{\lambda})$.

3. По заданному значению $t = s/L$ найти амплитуду φ ($-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$) эллиптического интеграла из уравнения

$$F(\varphi) = (1/2 - t)\pi\sqrt{\lambda}.$$

4. Вычислить координату $y(t) = f \cos \varphi$.

5. Вычислить координату $x(t) = 2(E - E(\varphi))/(\pi\sqrt{\lambda}) - t$.

Заметим, что для вычисления максимального прогиба f используется лишь полный эллиптический интеграл первого рода (пп. 1, 2). Существует множество приближенных формул для вычисления максимального прогиба, наиболее точной из них является [5]

$$f = (4/(\sqrt{3}\pi\lambda))\sqrt{\sqrt{6\lambda - 2} - 2}. \quad (1)$$

Однако вычисление координаты $y(t)$ в общем случае требует решения уравнения (п. 3), в котором неизвестное φ стоит под знаком неполного эллиптического интеграла первого рода, а для вычисления координаты $x(t)$ необходимы также значения эллиптических интегралов второго рода (п. 5).

Приближенные формулы. Соответствующих приближенных формул для вычисления координат $x(t)$, $y(t)$ практически не существует, за исключением

$$y(t) = (2\sqrt{2}/\pi)\sqrt{\lambda - 1} \sin \pi t \quad (2)$$

(см. [6]), которая является частным случаем формулы $y(t) = c \sin \pi t + c_1 \sin 3\pi t$, приведенной там же с неверным ($cc_1 \geq 0$) значением коэффициента c_1 . Более точной является полученная методом возмущений формула [7, 8]

$$y(t) = \alpha \sin \pi t - (\pi^2/64)\alpha^3 \sin 3\pi t, \quad (3)$$

где α находится из соотношения $f^2 = \alpha^2(1 + (\alpha\pi)^2/32)$ через f или с помощью (1) непосредственно через λ . В таблице для $\lambda \approx 1,2939$ ($k = \sin 40^\circ$) при различных t приведены точное решение и результаты расчетов по формулам (2), (3),

$$y(t) = \alpha \sin \pi t, \quad (4)$$

которая является усечением (3), а также по формуле

$$y(t) = f \sin \pi t. \quad (5)$$

При $\lambda \approx 1$ из (5) можно получить формулу $y(t) = (2\sqrt{2}/(\pi\lambda))\sqrt{\lambda - 1} \sin \pi t$, более точную, чем (2), но уступающую в точности формулам (3)–(5), поэтому соответствующие результаты расчетов в таблице не представлены. Так как для параметрически заданной кривой при $|y'(t)| < 1$ имеем

$$x(t) = \int_0^t \sqrt{1 - (y'(t))^2} dt = \int_0^t \left[1 - \frac{1}{2} (y'(t))^2 - \frac{1}{8} (y'(t))^4 - \dots \right] dt,$$

то, используя (5), координату $x(t)$ можно приближенно представить в виде

$$x(t) \approx \left[1 - \frac{(f\pi)^2}{4} - \frac{3(f\pi)^4}{64} - \frac{5(f\pi)^6}{256} \right] t - \frac{4 + (f\pi)^2}{32\pi} (f\pi)^2 \sin 2\pi t. \quad (6)$$

Результаты вычислений координаты $x(t)$ по формуле (6), как наиболее удачной из всех опробованных, приведены в таблице.

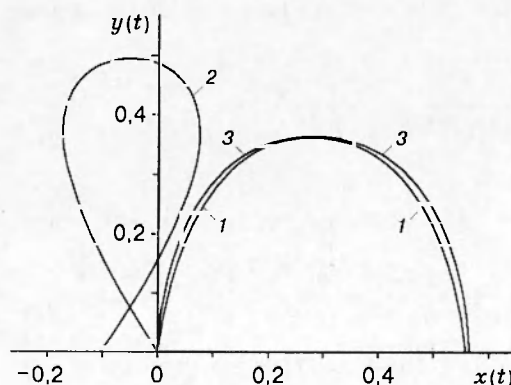
Координаты $x(t)$, $y(t)$ стержня при нагрузке $\lambda = 1,2939$

Координата	Формула	t				
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$y(t)$	(2)	0,1508	0,287	0,395	0,464	0,488
	(3)	0,1036	0,201	0,283	0,340	0,360
	(4)	0,1091	0,207	0,286	0,334	0,353
	(5)	0,1111	0,211	0,291	0,342	0,360
	Точное решение	0,0981	0,193	0,277	0,337	0,360
$x(t)$	(6)	0,0170	0,049	0,105	0,186	0,282
	Точное решение	0,0194	0,051	0,104	0,183	0,280

Сравнение формул. Выводы. Анализ различных приближенных формул показал, что при построении формы упругой линии изогнутого стержня наиболее точными являются формулы (3) и (6) для вычисления координат $y(t)$ и $x(t)$ по заданному t . При этом погрешность вычислений не превышает 1% от длины L стержня при вычислении $y(t)$ и меньше 0,3% при вычислении $x(t)$ вплоть до $\lambda = 1,3$ (см. таблицу). Формулы (3)–(5) существенно точнее формулы (2). Если пользоваться формулой (2), то в указанном диапазоне нагрузок погрешность вычислений координаты $y(t)$ достигает 13%.

На рисунке для нагрузки $\lambda \approx 1,2939$ показаны формы упругих кривых, построенные по точным формулам алгоритма 1–5 (кривая 1), приближенным формулам (2), (6) (кривая 2) и формулам (5), (6) (кривая 3). Кривая 3 всюду лежит выше кривой 1. При вычислении координаты $x(t)$ для построения кривой 2 значение f в формуле (6) полагалось равным наибольшему значению функции (2), т. е. считалось $f = 2\sqrt{2\lambda - 2}/\pi$. Заметим, что если для построения упругой линии воспользоваться формулами (3) и (6), то соответствующая кривая будет лежать между линиями 1 и 3, т. е. несколько ближе к истинной линии 1, чем линия 3. Однако, учитывая незначительность улучшения результата и большую сложность при использовании формул (3) и (4) по сравнению с (5), оказывается рациональным использование формулы (5).

Формулами (1), (5), (6) целесообразно пользоваться для предварительных расчетов в



более сложных задачах, когда стержни являются составными элементами конструкции. Эти формулы могут также оказаться полезными в приборостроении, например для расчетов механических регуляторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. Н. О формах равновесия сжатых стоек при продольном изгибе // Избр. тр. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
2. Попов Е. П. Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986.
3. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. М.: ОГИЗ, 1936.
4. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М.; Л.: ОГИЗ, 1946.
5. Астапов Н. С. Приближенные формулы для прогибов сжатых гибких стержней // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 4. С. 135–138.
6. Динник А. Н. Устойчивость упругих систем. М.; Л.: ОНТИ, 1935.
7. Астапов Н. С. Закритическое поведение стержня // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1989. Вып. 92. С. 14–21.
8. Астапов Н. С., Корнев В. М. Выпучивание эксцентрично сжатого упругого стержня // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 2. С. 162–169.

Поступила в редакцию 23/VI 1997 г.
