

ЛИТЕРАТУРА

1. Davidson G. A. A Burgers equation approach to finite amplitude acoustic in aerosol media.— J. Sound and Vibr., 1975, vol. 38, N 4.
2. Marble F. E. Dynamics of dusty gases.— In: Ann. Rev. Fluid Mech. Vol. 2. N. Y., 1970.
3. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., Наука, 1964.
4. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., Мир, 1964.
5. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., Наука, 1975.
6. Гасенко В. Г., Накоряков В. Е., Шрейбер И. Р. Приближение Бюргерса — Кортевега — де Вриза в волновой динамике газожидкостных систем.— В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск, 1977.
7. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., Наука, 1973.

УДК 532.69

ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОЕ ДВИЖЕНИЕ В ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ

О. В. Воинов, В. В. Пухначев

(Москва, Новосибирск)

1. Уравнения движения. Пусть в области пространства Ω находится вязкая несжимаемая жидкость с газовыми пузырьками. Число пузырьков достаточно велико, так что можно указать такое число $a \ll d$, где d — диаметр Ω , что любой шар радиуса a , принадлежащий Ω , содержит число пузырьков $N \gg 1$. Пузырьки считаются сферическими одинакового радиуса R . Если характерное расстояние между центрами пузырьков l достаточно мало по сравнению с характерным расстоянием L , на котором меняются средние параметры смеси, то применимы представления механики гетерогенных сред (см., например, [1]).

Если внешние массовые силы малы и ускорение жидкости также мало, то основным источником движения является неоднородность температурного поля в жидкости и порождаемый ею термокапиллярный эффект [2].

Обозначим через c объемную концентрацию газа, через \mathbf{u} и \mathbf{v} — осредненные скорости газовой и жидкой фаз соответственно и через T — температуру. Точное (в рамках представлений сплошной среды) уравнение неразрывности для жидкой фазы имеет вид

$$(1.1) \quad \partial(1 - c)/\partial t + \operatorname{div}[(1 - c)\mathbf{v}] = 0.$$

Если допустить, что плотность газа $\rho_g = \text{const}$, то уравнение неразрывности для газовой фазы подобно (1.1):

$$(1.2) \quad \partial c/\partial t + \operatorname{div}(c\mathbf{u}) = 0.$$

Возможный процесс обмена газом между пузырьком и жидкостью за счет процессов растворения во внимание не принимается. Для простоты не будем учитывать и более важные процессы коагуляции пузырьков, что до некоторой степени оправдано в случае разреженной системы.

Учитывая, что сдвиговая вязкость суспензии газовых пузырьков равна $(1 + c)\nu$, где ν — вязкость жидкости, и пренебрегая квадратичными членами порядка c^2 в вязких напряжениях, можно записать уравнение импульсов жидкости

$$(1.3) \quad (1 - c)d\mathbf{v}/dt = -\rho^{-1}\nabla p + (1 - c)\mathbf{g} + 2 \operatorname{div}[(1 + c)\nu S],$$

где S — тензор скоростей деформаций; p — давление; \mathbf{g} — ускорение внешней массовой силы. Уравнение (1.3) справедливо при малых числах Рейнольдса обтекания пузырьков и при достаточно больших характерных временах движения, когда можно пренебречь эффектом присоединенных масс пузырьков.

Уравнение (1.3) есть одновременно уравнение импульсов смеси, так как плотность газа ρ_g мала по сравнению с плотностью жидкости ρ . Существенно, что термокапиллярный эффект не дает непосредственного вклада в (1.3), поскольку в квазистационарном приближении сила, действующая на газовый пузырек, равна нулю [2].

Переходя к уравнению переноса тепла, естественно считать, что теплопроводность газа κ_g мала по сравнению с теплопроводностью жидкости κ . Для случая $\kappa_g \ll \kappa$ коэффициент теплопроводности смеси, определяемый по формуле Максвелла [3, 4], равен

$$(1.4) \quad \kappa' = \kappa(1 - 3c/2).$$

На перенос тепла, вообще говоря, может влиять конвективный перенос при обтекании жидкостью отдельных пузырьков. Неоднородность поля скоростей жидкости, вызванная движением пузырьков, мало влияет на перенос тепла, если достаточно мало число Пекле, рассчитанное по характерной скорости пузырьков относительно жидкости w и среднему расстоянию l между центрами пузырей:

$$(1.5) \quad \text{Pe}_l = wl/\chi \ll 1$$

(χ — коэффициент температуропроводности жидкости). При условии (1.5) теплопроводность газожидкостной смеси определяется формулой (1.4), справедливой в отсутствие относительного движения фаз.

Известно [5, 6], что плотность, теплопроводность и теплоемкость жидкостей зависят от температуры на два порядка слабее, чем вязкость, и значительно слабее, чем поверхностное натяжение. Поэтому в уравнении переноса тепла можно не учитывать изменение теплоемкости и теплопроводности, и в итоге получается следующее уравнение для температуры:

$$(1.6) \quad (1 - c) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \chi \operatorname{div} \left[\left(1 - \frac{3}{2} c \right) \nabla T \right].$$

Термокапиллярный эффект имеет смысл рассматривать при малых числах Рейнольдса и Пекле

$$\text{Re} = wR/\nu \ll 1, \quad \text{Pe} = wR/\chi \ll 1.$$

Последнее условие выполнено ввиду (1.5). Условие малости числа Рейнольдса обычно выполнено при малых числах Марангони

$$M = \frac{R^2}{\rho\nu^2} \left| \frac{d\sigma}{dT} \right| |\nabla T|.$$

Так как размер пузырька мал по сравнению с масштабом потока ($R \ll L$), то изменение σ вдоль его поверхности относительно мало и следует ограничиться постановкой, в которой коэффициент поверхностного натяжения σ линейно изменяется с ростом температуры (обычно убывает).

Для данной пары жидкость — газ условия $M < 1$ можно добиться, выбирая достаточно малым $R^2 |\nabla T|$. Например, для чистой воды вблизи $T = 20^\circ\text{C}$ число Марангони $M < 1$, если $R^2 |\nabla T| < 10^{-3}$ см·град. Для жидкой меди вблизи температуры плавления $M < 1$ при $R^2 |\nabla T| < 1,3 \times 10^{-4}$ см·град. При малых M величины относительной скорости w и ∇T свя-

заны линейной зависимостью, имеющей в соответствии с теорией подобия и размерности [7] следующий вид:

$$(1.7) \quad \mathbf{w} = K \nabla T, \quad \mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v},$$

где $K = \varphi(c) |d\sigma/dT| R/2\mu$ с точностью до членов порядка Re , Pe и отношений динамических вязкостей и теплопроводностей газа и жидкости μ_g/μ и κ_g/κ . Для малых объемных концентраций газа ($c \ll 1$) формула должна переходить в формулу для скорости термокапиллярного движения отдельного пузырька [2]. Поэтому $\varphi = 1$ при $c = 0$.

Подчеркнем, что коэффициент K в (1.7) существенно зависит от температуры. Причем в первую очередь из-за зависимости вязкости ν от температуры.

Система (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) содержит номинально девять скалярных уравнений для девяти неизвестных: c , трех компонент \mathbf{u} и \mathbf{v} , p , T . Фактически же равенство (1.7) является конечным соотношением между \mathbf{u} и \mathbf{v} и позволяет снизить число искомым функций до шести.

Произведем уточнение (1.7), связанное с учетом влияния возможного разброса скоростей отдельных пузырьков.

2. Учет влияния хаотического движения. Скорости движения даже ближайших пузырьков в газожидкостной смеси, вообще говоря, существенно различаются между собой и не равны средней скорости пузырьков. Причиной флуктуаций является невозможность устойчивых стационарных состояний. Можно показать, что стационарные состояния термокапиллярного движения упорядоченной системы пузырьков экспоненциально неустойчивы даже при малых числах Рейнольдса. Это ясно уже из рассмотрения устойчивости термокапиллярного движения неограниченной цепочки пузырьков, движущихся перпендикулярно оси цепочки. Естественно поэтому предположить, что в такой системе за счет гидродинамических сил устанавливается хаотическое движение пузырьков. Известно, что одной из причин стохастизации динамической системы является неустойчивость ее стационарных состояний.

Стохастизация движения за счет гидродинамических сил является, по-видимому, общим свойством двухфазных сред при наличии относительного движения фаз. Она имеет место при произвольных числах Рейнольдса и различных силах, вызывающих относительное движение. Экспоненциальная неустойчивость движения упорядоченной системы частиц в идеальной жидкости доказана в работе [8]. Колебательные движения пузырьков, всплывающих в тяжелой жидкости при конечных числах Рейнольдса, неоднократно наблюдались в экспериментах [9].

Хаотичность движения пузырьков в неоднородной задаче должна давать поправки диффузионного типа к уравнению (1.7):

$$(2.1) \quad w_i = K \nabla_i T - c^{-1} D_{ij} \nabla_j c, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Вид тензора $D_{ij} = D_{ij}(c, w)$ однозначно определяется соображениями размерности и изотропией пространства

$$D_{ij} = R |\mathbf{w}| [f_{\perp}(c) \delta_{ij} + (f_{\parallel}(c) - f_{\perp}(c)) w_i w_j / |\mathbf{w}|^2].$$

Важно отметить, что второе слагаемое в (2.1) имеет малый порядок $R/L \ll 1$, где L — масштаб изменения средних величин. Вообще говоря, в (2.1), кроме ∇c , может дать вклад ∇w . Однако имеет смысл ограничиться физически ясной зависимостью (2.1).

До сих пор в теории двухфазных сред отсутствовали замкнутые выражения типа (2.1), где коэффициенты D_{ij} зависят только от c и относительной скорости фаз (или от ∇T с той же точностью). Диффузионный член в выражении для скорости относительного движения или в силе взаимо-

действия фаз имеет принципиальное значение в задачах устойчивости среды.

Порядок коэффициентов D_{ij} в (2.1) определяется гидродинамическим взаимодействием в системе. Очевидно поэтому, что $D_{ij} \rightarrow 0$ при $c \rightarrow 0$, когда система пузырьков разрежена.

Оценим приближенно порядок коэффициента диффузии пузырьков в разреженной системе, когда радиус пузырьков R значительно меньше среднего расстояния между их центрами. Очевидно, $D \sim w_* s$, где w_* — среднеквадратичная флуктуация скорости пузырька, s — характерное расстояние, на котором происходит характерная флуктуация скорости w_* . Возмущение ∇T в данной точке, производимое из-за наличия на расстоянии r пузыря, имеет порядок r^{-3} . Такой же порядок r^{-3} имеет возмущение скорости, производимое этим пузырьком (член типа «стокслета», убывающий как r^{-1} , отсутствует). Поэтому возмущение термокапиллярной скорости пузырька, вызванное присутствием соседнего пузырька, имеет порядок r^{-3} . Принимая характерное значение $r \sim l$, найдем $w_* \sim |\mathbf{w}| R^3 / l^3$. Если принять величину $s \sim l$, то окончательно получим оценку

$$(2.2) \quad D \sim w_* s \sim |\mathbf{w}| R c^{2/3}.$$

3. Одномерные движения. Наиболее простые классы решений системы (1.1)—(1.3), (1.6) и (1.7) описывают одномерные движения с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами. Для одномерных движений система допускает дальнейшее понижение порядка. Во-первых, уравнения (1.1), (1.2), (1.6) и (1.7) образуют в этом случае замкнутую подсистему, после решения которой давление находится из (1.3) квадратурой. Во-вторых, складывая (1.1) и (1.2) и интегрируя по пространственной координате, получим линейное соотношение между скоростями фаз. Выражая из этого соотношения и равенства (2.1) указанные скорости через c и ∇T , ∇c и подставляя результат в (1.1), (1.6), получим два связанных уравнения для концентрации и температуры, оба второго порядка, если $D \neq 0$. Приведем эту систему для движения с плоскими волнами (обозначения очевидные):

$$(3.1) \quad c_t + [(KcT_x - Dc_x - f)(1 - c)]_x = 0;$$

$$(3.2) \quad (1 - c)[T_t - (KcT_x - Dc_x - f)T_x] = (\chi' T_x)_x.$$

Здесь $f = f(t)$ — произвольная функция времени, которая должна быть определена вместе с решением из дополнительных условий; χ' — коэффициент температуропроводности смеси, зависящий, вообще говоря, от c .

Для системы квазилинейных уравнений (3.1), (3.2) можно ставить различные начально-краевые задачи. Приведем постановку простейшей из них. Предположим для простоты, что $D = 0$, а K и χ' — положительные постоянные. Требуется найти функции $c(x, t)$, $T(x, t)$ в прямоугольнике $0 < x < L$, $0 < t < t_0$ и функцию $f(t)$ на интервале $0 < t < t_0$ так, чтобы удовлетворялись уравнения (3.1), (3.2), начальные условия

$$(3.3) \quad c(x, 0) = c_0(x), \quad T(x, 0) = T_0(x);$$

краевые условия при $x = 0$

$$(3.4) \quad T_x(0, t) = \psi_0(t), \quad f(t) = Kc(0, t)\psi_0(t);$$

краевые условия при $x = L$

$$(3.5) \quad T_x(L, t) = \psi_L(t), \quad f(t) = Kc(L, t)\psi_L(t).$$

Предположим, что выполнены следующие условия: $c_0 \in C^{1+\alpha}[0, L]$ ($0 < \alpha < 1$), $0 \leq c_0 \leq 1$ для $0 \leq x \leq L$; $T_0 \in C^{3+\alpha}[0, L]$, $dT_0/dx > 0$

для $0 \leq x \leq L$; $\psi_0 \in C^{(3+\alpha)/2}[0, t_0]$, $\psi_L \in C^{(3+\alpha)/2}[0, t_0]$, $c_0(0)\psi_0(0) = c_0(L) \times \times \psi_L(0)$. Тогда существует такое $t_0 > 0$, что задача (3.1)–(3.5) имеет единственное решение, причем $0 \leq c \leq 1$ и $T_\infty > 0$ при всех $x \in [0, L]$, $t \in [0, t_0]$.

Физическая интерпретация задачи такова. Газожидкостная смесь заполняет пространство между параллельными твердыми непроницаемыми плоскостями $x = 0$ и $x = L$. В начальный момент задано распределение концентрации и температуры, зависящее от x . На границах $x = 0$ и $x = L$ задан тепловой поток (первые два условия (3.4), (3.5)) и условие непротекания для жидкой фазы $v = 0$ (вторые два условия). Если тепловой поток на границах не зависит от координат вдоль плоскостей, то возникающее термокапиллярное движение будет одномерным.

Задача (3.1)–(3.5) принадлежит к классу так называемых «обратных задач», в которых наряду с решением системы дифференциальных уравнений находятся и неизвестные коэффициенты этой системы (в нашем случае — функция $f(t)$). Иногда функция может быть найдена априори. Такая ситуация возникает, например, в задаче о сферически-симметричном движении внутри сферы, на свободной границе которой задано условие теплообмена с окружающим газом. Пусть теперь u и v обозначают радиальные компоненты скорости газовой и жидкой фаз и $r = |x|$. Из условия $u = v = 0$ при $r = 0$ находим $f = 0$, что приводит к выражениям $u = (1 - c)KT_r$, $v = -cKT_r$. При $D = 0$ задача сводится к отысканию функции $s(t)$, определяющей свободную границу, и функций $c(r, t)$, $T(r, t)$ из соотношений $c_t + r^{-2}[Kr^2c(1 - c)T_r]_r = 0$ при $0 < r < s(t)$, $(1 - c)(T_t - KcT_r^2 = r^{-2}(\chi'r^2T_r)_r$; $s(0) = s_0 > 0$, $c(r, 0) = c_0(r)$, $T(r, 0) = T_0(r)$; c, T ограничены, $c_r, T_r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$; $T_r = -q[T - T_s(t)]$ при $r = s(t)$, $ds/dt = -KcT_r$ при $r = s(t)$. В предпоследнем условии $q = q(T)$ — коэффициент межфазного теплообмена, $T_s(t)$ — заданная температура внешней среды. Последнее условие означает, что свободная граница $r = s(t)$ ограничивает жидкий объем. Можно ожидать, что при условиях $T'_0(r) \geq 0$, $T'_s(t) \geq 0$ и надлежащих условиях гладкости и согласования входных данных сформулированная задача поставлена корректно, хотя доказать это пока не удалось. Монотонное возрастание функций T_0 и T_s при этом должно гарантировать положительность u и в конечном счете обеспечить очистку жидкой сферы от пузырьков.

Если $f\sqrt{t} = \text{const}$ и $D = 0$, то система (3.1), (3.2) допускает автомодельные решения

$$c = c(x/\sqrt{t}), \quad T = T(x/\sqrt{t}).$$

При $f = 0$ в этом классе содержится решение следующей задачи: газожидкостная смесь заполняет полупространство $x > 0$ и имеет при $t = 0$ постоянные значения параметров $c = c_0$, $u = v = 0$, $T = T_0$. В начальный момент температура на плоскости $x = 0$ повышается скачком до значения T_1 , которое затем поддерживается постоянным. Возникающее движение пузырьков в сторону плоскости $x = 0$ определяется из системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая здесь не приводится.

Простейшее из нетривиальных решений системы (3.1), (3.2) с $D \neq 0$ допускается в случае не зависящего от T коэффициента K . Оно соответствует $f = KGc_0$ и имеет вид

$$(3.6) \quad c = c_0, \quad T = Gx,$$

где c_0 и G — постоянные, причем $0 < c_0 < 1$. Ему отвечает движение с постоянными давлением и скоростью газовой фазы KG и нулевой скоростью

жидкой фазы. Ниже решение (3.6) исследуется на устойчивость по отношению к одномерным возмущениям.

4. Устойчивость термокапиллярного движения. Рассмотрим устойчивость стационарного движения с плоскими волнами по отношению к коротковолновым возмущениям, когда длина волны возмущения значительно меньше размера области течения L . Для этого линеаризуем уравнения для возмущений, следующие из (3.1), (3.2). Выражение f не возмущается, $\delta f = 0$, потому что непосредственно связано с граничными условиями, которые не возмущаются. Для малых длин волн можно пренебречь зависимостью коэффициентов от координат в уравнениях возмущенного движения, а также влиянием границ и искать малые возмущения концентрации δc и температуры δT в приближенном виде

$$\delta c = A \exp(\alpha t + ikx), \quad \delta T = B \exp(\alpha t + ikx),$$

где A и B — некоторые постоянные; α — комплексная частота; k — волновое число, $kL \gg 1$. Дисперсионное уравнение имеет вид

$$(4.1) \quad \alpha^2 + \alpha \left[\chi \left(1 - \frac{c}{2} \right) k^2 + (1 - c) ik (cK'_c + K) T_x + (1 - c) Dk^2 - \right. \\ \left. - ickKT_x - cK'_T T_x^2 \right] + \chi k^2 \left[\frac{3}{2} c T_x^2 K'_T + \left(1 - \frac{3}{2} c \right) Dk^2 + \right. \\ \left. + ik (cK'_c + K) T_x \right] = 0.$$

При малых концентрациях $c \ll 1$ корни уравнения (4.1) можно записать в виде

$$\alpha_1 = - (1 - c) [ik (K + cK'_c) T_x + Dk^2] + \\ + c \left(1 - \frac{5}{2} \frac{\chi k}{\chi k - Dk - iKT_x} \right) (ikKT_x + T_x^2 K'_T) + O(c^2), \\ \alpha_2 = - \chi k^2 + O(c).$$

В рамках применимости обсуждаемой модели всегда $\text{Re} \alpha_2 < 0$. Устойчивость среды определяется выражением

$$(4.2) \quad \text{Re} \alpha_1 = - Dk^2 (1 - c) + c T_x^2 K'_T + \frac{5}{2} c T_x^2 \chi k^2 \times \\ \times \frac{K^2 - (\chi - D) K'_T}{(\chi - D)^2 k^2 + T_x^2 K^2} + O(c^2) \quad \text{при } c \rightarrow 0.$$

Если коэффициент термокапиллярного дрейфа не зависит от температуры ($K'_T = 0$) и отсутствует диффузия ($D = 0$), то (4.2) описывает неустойчивость. Эта неустойчивость носит существенно тепловой характер (исчезает при $\chi \rightarrow \infty$) и не имеет аналогов в механике двухфазных сред.

С учетом диффузии неустойчивость сохраняется в области достаточно длинных волн. В силу приближенной оценки (2.2)

$$(4.3) \quad D \sim c \chi \text{Pe}_l \ll c \chi.$$

Из (4.2) видно, что с точностью до малых порядка c величина $\text{Re} \alpha_1 > 0$ в области

$$|k| < k_* = \frac{|w|}{\chi} \sqrt{\frac{5c\chi}{2D} - 1} \sim l^{-1} \sqrt{\text{Pe}_l}.$$

Здесь учтено, что $KT_x \approx w$. В значительной области волновых чисел инкремент нарастания возмущений близок к постоянному:

$$\text{Re} \alpha \approx 5cw^2/2\chi, \quad |w|/\chi \ll |k| \ll k_*.$$

В области малых волновых чисел, когда $k\chi/|w| \rightarrow 0$, величина $\text{Re } \alpha_1 \rightarrow 0$. Учет зависимости коэффициента термокапиллярного дрейфа от температуры ($K_T' \neq 0$) существенно изменяет асимптотику $\text{Re } \alpha_1$ при $k \rightarrow 0$.

Удобно ввести безразмерные обозначения

$$\Pi = \frac{K_T'}{K^2} \chi, \quad Q = \frac{w^2}{\chi^2 k^2}, \quad Q_* = \frac{|2D}{5c\chi} \ll 1.$$

С учетом (4.3) можно привести формулу (4.2) к простому виду, пренебрегая малыми c^2 и D/χ :

$$\text{Re } \alpha_1 \approx \frac{5cw^2}{2\lambda} \left(-\frac{Q_*}{Q} + \frac{2\Pi}{5} + \frac{1-\Pi}{1+Q} \right).$$

Влияние зависимости от температуры коэффициента термокапиллярного дрейфа ($\Pi \neq 0$) определяется знаком K_T' и по-разному проявляется в различных областях волновых чисел.

При $\Pi < 0$ критическое значение Q уменьшается по сравнению с Q_* , неустойчивость продвигается в область более коротких волн и одновременно система становится устойчивой в области $Q \gg 1$ (длинные волны).

При $\Pi > 0$ граница области коротковолновой устойчивости может расширяться: от $Q \approx Q_* \ll 1$ при $\Pi = 0$ до $Q \sim 1$ при $\Pi > 2/3$. Однако при этом в области длинных волн (т. е. при $Q \rightarrow \infty$) величина $\text{Re } \alpha_1 \rightarrow \text{const} > 0$.

Области больших и малых Q имеют ясный физический смысл. При $Q > 1$ пузырьки движутся относительно быстрее, чем фронт тепловой волны (на расстоянии порядка длины волны возмущения), а при $Q < 1$ — наоборот. Таким образом, рост коэффициента термокапиллярного дрейфа с температурой приводит к увеличению неустойчивости, если пузырьки движутся быстрее тепловой волны ($|w| > \chi k \sqrt{3/2}$), и значительно повышает устойчивость, если пузырьки движутся относительно медленно. В случае $K_T' < 0$ ситуация обратная.

Обычно для пузырьков в жидкости $K_T' > 0$. Величина Π существенна для достаточно малых пузырьков, а также для маловязкой жидкости. Так, для воды при 20°C значение $\Pi \sim 1$ для пузырьков радиуса $R \sim 10^{-5}$ см.

Неустойчивость существенна только при достаточной протяженности потока L , если число Пекле $|w|L/\chi \gg 1$ (при умеренных значениях $|\Pi| \leq 1$). Иначе, как можно показать на основе (4.2), возмущения уносятся вместе с пузырьками из рассматриваемой области до того, как заметно вырастают по амплитуде.

Если $K_T' = 0$, то решение (3.6) будет точным решением системы (3.1), (3.2) с $f = \text{const}$. В этом случае предыдущий анализ позволяет сделать выводы об устойчивости равномерного распределения пузырьков во всем пространстве при наличии постоянного градиента температуры. При $D = 0$ такое распределение абсолютно неустойчиво. Учет диффузии пузырьков ($D \neq 0$) стабилизирует коротковолновые возмущения с $|k| < k_*$, однако вне этого диапазона волновых чисел неустойчивость сохраняется.

Поступила 13 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М., Наука, 1978.
2. Братухин Ю. К. Термокапиллярный дрейф капельки в вязкой жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 5.

3. Maxwell J. C. Treatise on electricity and magnetism. Vol. 1. London. Dover publ., 1954.
4. Головин А. М., Чижов В. Е. Об эффективной вязкости суспензий.— Вестник Московск. ун-та. Сер. матем., мех., 1978, № 1.
5. Рид Р., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей. М., ИЛ, 1964.
6. Цедерберг В. Н. Теплопроводность газов и жидкостей. М.—Л., Госэнергоиздат, 1963.
7. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Наука, 1967.
8. Войнов О. В., Петров А. Г. Об устойчивости малого тела в неоднородном потоке.— ДАН СССР, 1977, т. 237, № 6.
9. Бурдуков А. П., Валукина Н. В., Накоряков В. Е. Особенности течения газожидкостной смеси при малых числах Рейнольдса.— ПМТФ, 1975, № 4.

УДК 532.77

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ФАЗ В ПРОЦЕССЕ ФАЗОВОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ

Ю. А. Бычков, С. В. Иорданский
(Черноголовка)

Постановка вопроса об устойчивости плоской границы раздела двух фаз в процессе фазового превращения, насколько нам известно, начинается с работы [1], где исследовалось затвердевание одного из компонентов бинарного сплава. В данной работе в основном будет рассматриваться именно эта задача, хотя наши результаты, с известными оговорками, могут быть использованы для процесса кристаллизации из переохлажденной жидкости, если этот процесс описывается задачей Стефана в изотропном приближении [2].

Работа [1] страдает существенным недостатком, так как не учитывает уменьшения скорости фронта со временем и в силу этого не дает окончательного ответа об устойчивости плоской границы раздела. В настоящей работе получена картина развития искажений плоской границы раздела во времени в линейном приближении. Кроме этого, приведены результаты исследования устойчивости сферического роста зародышей новой фазы, полученные ранее [3]. Хотя работа [3] относилась к устойчивости электронно-дырочных капель в полупроводниках, ее результаты носят общий характер и могут быть использованы для описания перечисленных выше фазовых превращений.

1. Модель затвердевания бинарного сплава. Предполагается, что в матрице некоторого материала находятся частицы другого вещества (раствора), образуя сплав. Если теплообмен между обоими веществами достаточно эффективен, то можно считать температуру равной температуре матрицы T . Предполагается, что при некоторой концентрации частиц раствора они образуют другую модификацию путем фазового перехода первого рода. Предполагается, что природа этих двух фаз несущественна, так как задача рассматривается в изотропном приближении, т. е. фактически раствор считается пересыщенным паром, а новая более плотная фаза — сконденсировавшаяся жидкость. Обычно степень пересыщения $\delta n = n - n_T$ (n_T — плотность насыщенных паров, n — плотность пара) всегда мала по сравнению с плотностью конденсированной фазы N , что и будем предполагать в дальнейшем. После стадии образования критического зародыша, которая здесь не рассматривается, процесс фазового превращения будет заключаться в диффузии частиц раствора к поверхности конденсированной фазы с последующей конденсацией на этой поверхности. Таким образом, в паре должно быть выполнено уравнение диффузии частиц раствора по матрице

$$(1.1) \quad \partial n / \partial t = D \Delta n,$$

где D — коэффициент диффузии.