

ЛИТЕРАТУРА

1. Фраиш-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М., «Наука», 1967.
2. Сергеев Ю. А., Письмен Л. М. Возникновение свободной конвекции под действием химической реакции в пористом слое.— «Изв. АН СССР», 1972, т. 205, № 6.
3. Merzhanov A. G., Shtessel E. A. Free convection and thermal explosion in reactive systems.— «Astronautica Acta», 1973, vol. 18, p. 191—199.
4. Jones D. R. The dynamic stability of confined, exothermically reacting fluids.— «Internat. J. Heat and Mass Transfer», 1973, vol. 16, p. 157—167.
5. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., «Наука», 1972.
6. Ланс Дж. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М., ИЛ, 1962.
7. Бирих Р. В., Рудаков Р. Н. Применение метода Рунге—Кутты для исследования устойчивости плоскопараллельных конвективных течений.— В кн.: Приближенное решение краевых задач и функциональных уравнений. Пермь, изд. Пермск. политех. ин-та, 1971, № 84.

УДК 539.374,678 : 532

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В УПРУГОВЯЗКОМ СТЕРЖНЕ И ЗАДАЧА ОБ УДАРЕ СТЕРЖНЯ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ О ЖЕСТКУЮ ПРЕГРАДУ

З. Н. Кузина, А. И. Леонов, А. А. Марков

(Москва)

Ряд общих результатов в динамической теории нелинейной упругости без учета диссипативных явлений получен в [1], где также решено значительное количество интересных задач. Соотношения на сильных и слабых разрывах в наследственных средах общего типа изучались в [2]. Однако для решения разнообразных динамических задач необходима конкретизация вида наследственного функционала. Этой проблеме применительно к описанию реологического поведения неспитых каучуков, расплавов и концентрированных растворов посвящены работы [3, 4].

В ряде работ проводилась проверка полученных в [3, 4] реологических соотношений, показавшая их хорошее совпадение с экспериментальными данными (некоторые результаты этой проверки и ссылки см. в [3]).

Распространению волн в стержнях с различными реологическими характеристиками посвящен ряд работ (например, [5—7]), где рассматривались малодеформируемые жесткие материалы, в связи с чем изменением сечения в обычном стержневом приближении авторы этих работ пренебрегали; здесь же пренебрегалось квадратичными силами инерции, а центр тяжести переносился на исследование волновых эффектов, связанных с физической нелинейностью реологических уравнений.

В данной работе с учетом сильных геометрических и физических нелинейностей рассмотрены различные типы волн, распространяющихся в упруговязком стержне.

Для исследования изотермического движения упруговязкого стержня будем использовать осредненное по сечению описание, рассматривая движение стержня как близкое к одноосному растяжению — сжатию. Предполагается, что все величины достаточно медленно меняются по длине стержня, а последняя много больше поперечного размера сечения.

В этом случае для несжимаемой упруговязкой среды с нелинейными реологическими уравнениями максвелловского типа справедливы следующие уравнения:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vf) = 0; \\ (2) \quad & \frac{\partial (vf)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v^2f - \sigma f \rho_0^{-1}) = 0; \\ (3) \quad & \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} + v \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right) + \frac{F(\lambda)}{6\theta_0} = \frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned}$$

где f — площадь сечения стержня; v — средняя по сечению скорость; $\sigma(\lambda)$ — среднее по сечению нормальное напряжение; λ — средняя по сечению упругая деформация; x — продольная координата; t — время; $\theta_0 = \eta_0/2\mu$ — время релаксации; η_0 — вязкость при сдвиге; 2μ — модуль Гука. Реологические параметры θ_0 , η_0 , μ определяют поведение среды в линейной области ее деформирования. Величина λ в случае однородного одноосного деформирования представляет собой отношение длины образца в данный момент времени к его длине после мгновенной разгрузки. Отсюда следует, что при растяжении $\lambda > 1$, при сжатии $0 < \lambda < 1$.

Уравнение (1) соответствует сохранению массы, (2) — сохранению импульса (силами тяжести и поверхностного натяжения пренебрегаем), (3) — релаксационное уравнение. Специфика максвелловской среды состоит в задании функций $\sigma(\lambda)$ и $F(\lambda)$. В простейшем случае, рассмотренном в [3]:

$$\begin{aligned} (4) \quad & \sigma(\lambda) = 2\mu(\lambda^2 - \lambda^{-1}), \\ & F(\lambda) = \lambda^{-2}(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) \exp \{ -(1/2)\beta\lambda^{-2}(\lambda - 1)^2(\lambda^2 + 4\lambda + 1) \}. \end{aligned}$$

Формула для напряжения $\sigma(\lambda)$ в (4) соответствует классической кинетической теории каучука при растяжении — сжатии образца, величина $F(\lambda)/6\theta_0$ — скорость необратимой деформации в рассматриваемой среде. Экспоненциальный множитель в формуле для $F(\lambda)$ в соответствии с экспериментальными данными описывает резкий рост характерного времени релаксации с возрастанием упругих деформаций в среде. Числовой параметр β ($0 < \beta \leq 1$) характеризует гибкость макромолекул для рассматриваемой упруговязкой полимерной среды [3].

Случаю отсутствия напряжений соответствует $\lambda = 1$; однородному безынерционному деформированию: $v = \kappa(t)(x - x_0)$, $\sigma = \sigma(t)$, $\lambda = \lambda(t)$, $f = f(t)$ [3]. Полагая в (3) $\theta_0 \rightarrow \infty$ (или $\beta \rightarrow \infty$), получим предельный случай упругой среды с конечными деформациями. Используя (1), можно также преобразовать уравнение (3) к дивергентному виду

$$(5) \quad \partial \lambda^{-1} / \partial t + \partial (v \lambda^{-1}) / \partial x = F(\lambda) / 6\theta_0 \lambda.$$

Рассмотрим теперь кратко свойства системы (1) — (3). Составляя обычным путем характеристическое уравнение для этой системы, найдем характеристические корни α_k

$$(6) \quad \alpha_{1,2} = v \pm \lambda \sqrt{\rho_0^{-1} d(\sigma/\lambda) / d\lambda}, \quad \alpha_3 = v.$$

Из (6) следует, что система гиперболична, если $d(\sigma/\lambda)/d\lambda > 0$, что имеет место для значения $\sigma(\lambda)$, определенного из (4), так как в этом случае $d(\sigma/\lambda)/d\lambda = 2\mu(1 + 2\lambda^{-3}) > 0$.

Известно [8], что характеристические корни α_k совпадают со скоростями $x'_*(t)$ распространения слабого разрыва, для которого вдоль линии $x_*(t)$ на плоскости x, t величины из (1) — (3) непрерывны, а их производные имеют скачки. В этом случае можно вывести уравнение, связывающее между собой величины $f_*(t), v_*(t), \lambda_*(t)$ на линии $x_*(t)$:

$$(7) \quad \frac{d}{dt}(v_* f_*) - (2v_* - x'_*) \frac{df_*}{dt} + \frac{\rho_0^{-1}}{v_* - x'_*} \left(\frac{d\sigma}{d\lambda} \right)_* \left\{ \frac{d}{dt}(f_* \lambda_*) + \frac{f_* \lambda_*}{6\theta} F(\lambda_*) \right\} = 0,$$

где $x'_*(t) = \alpha(t), f_*(t) = f(x_*(t), t)$, аналогично определены и другие величины в (7).

Известно [1], что для несжимаемой нелинейной упругой среды нормальные разрывы в полях напряжений и скоростей деформаций отсутствуют. Аналогичное обстоятельство имеет место и для несжимаемой упруговязкой среды общего типа [2], а следовательно, и для среды максвелловского типа с реологическими уравнениями (4). Тем не менее для осредненных уравнений рассматриваемого «стержневого» приближения, как это видно из системы (1)–(3), возможно существование сильных разрывов. Естественно, что в окрестности этих разрывов осредненное описание движения рассматриваемой упруговязкой среды, строго говоря, неверно и здесь необходимо для расчетов использовать существенно неоднородную схему. Однако известно, что вне зоны резких изменений параметров осредненное описание дает небольшую погрешность, а зона резких изменений протяженностью порядка диаметра стержня в данном осредненном описании заменяется разрывом. Поэтому представляется, что все качественные особенности такого поведения могут быть описаны в достаточной мере уже и в рамках рассматриваемой одномерной модели с учетом сильных разрывов.

Пусть $x_0(t)$ — координата ударной волны. Отметим все величины, входящие в уравнения (1), (2), (5), индексом 1, если они рассматриваются при $x = x_0(t)_{+0}$, а индексом 2, если они взяты при $x = x_0(t)_{-0}$. Тогда, используя обычную процедуру для получения условий на ударной волне (например, [8]), будем иметь из (1), (2), (5) следующие соотношения:

$$(8) \quad \begin{aligned} x'_0(f_2 - f_1) + f_1 v_1 - f_2 v_2 &= 0, \\ x'_0(f_2 v_2 - f_1 v_1) + f_1 v_1^2 - f_2 v_2^2 - \rho_0^{-1}(f_1 \sigma_1 - f_2 \sigma_2) &= 0, \\ x'_0(1/\lambda_2 - 1/\lambda_1) + v_1/\lambda_1 - v_2/\lambda_2 &= 0, \end{aligned}$$

где $\sigma_k = \sigma(\lambda_k)$ ($k = 1, 2$). Из (8) следует

$$(9) \quad f_1 \lambda_1 = f_2 \lambda_2;$$

$$(10) \quad \begin{aligned} (x'_0 - v_1)^2 &= \frac{\lambda_1^2}{\rho_0(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[\frac{\sigma(\lambda_1)}{\lambda_1} - \frac{\sigma(\lambda_2)}{\lambda_2} \right], \\ (x'_0 - v_2)^2 &= \frac{\lambda_2^2}{\rho_0(\lambda_2 - \lambda_1)} \left[\frac{\sigma(\lambda_2)}{\lambda_2} - \frac{\sigma(\lambda_1)}{\lambda_1} \right]. \end{aligned}$$

Соотношение (9) показывает, что на ударной волне реализуется чисто упругая деформация. Если полагать, что перед фронтом ударной волны все величины (отмеченные индексом 1) известны, то соотношения (9), (10) связывают между собой неизвестные величины $v_2, f_2, \lambda_2, x_0(t)$; замыкающее уравнение получается из решения задачи с начальными данными в целом для системы (1), (2), (4).

Рассмотрим теперь несколько примеров, иллюстрирующих сильные и слабые разрывы в упруговязком стержне. Пусть волна распространяется в положительном направлении оси x , т. е. $x'_\alpha(t) > 0$. Обозначим через I область $x < x_\alpha(t)$ а через II — область $x > x_\alpha(t)$. Здесь $x_\alpha = x_*(t)$ в случае слабого разрыва и $x_\alpha = x_0(t)$ в случае сильного разрыва.

Рассмотрим волны нагружения, распространяющиеся по ненагруженному стержню.

1. Слабые волны растяжения — сжатия. В области I $f_1 = f_0 = \text{const}$, $v_1 = 0$, $\lambda_1 = 1$. В силу непрерывности эти же значения сохраняются на слабом разрыве $x = x_*(t)$. Так как $F(1) \equiv 0$, то уравнение (7) на слабом разрыве удовлетворяется тождественно. При $\lambda = 1$ из (4) следует, что $d(\sigma/\lambda)/d\lambda|_{\lambda=1} = 6\mu = E$, где E — модуль Юнга. Тогда из (6) имеем, что $x'_* = (E/\rho_0)^{1/2} = c_0$, т. е. слабые волны нагружения распространяются по ненагруженному материалу со скоростью c_0 распространения линейных возмущений (скоростью звука).

2. Ударные волны растяжения — сжатия. В области I по-прежнему $f_1 = f_0 = \text{const}$, $v_1 = 0$, $\lambda_1 = 1$. За ударной волной из (9), (10), (4) имеем

$$(11) \quad f_2 = f_0/\lambda_2(t), \quad x'_0 = c_0 \sqrt{(1/3)(1 + \lambda_2^{-1} + \lambda_2^{-2})}, \\ v_2 = x'_0(1 - \lambda_2), \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}.$$

Из (11) следует, что для ударной волны сжатия ($\lambda_2 < 1$) имеем $f_2 > f_0$, $v_2 > 0$, $x'_0 > c_0$; для ударной волны растяжения ($\lambda_2 > 1$) имеем $f_2 < f_0$, $v_2 < 0$, $x'_0 < c_0$. Последнее неравенство показывает, что ударная волна растяжения, распространяющаяся по ненагруженному материалу, неустойчива, так как она при распространении будет отдавать энергию обгоняющим ее малым колебаниям среды. Ударная волна сжатия устойчива, так как она распространяется со сверхзвуковой скоростью и наложенные на нее малые возмущения будут затухать за счет излучения отстающего от нее звука.

Отсюда следует, что при достаточно гладких начальных условиях фронт волны сжатия будет более крутым, обнаруживая тенденцию к появлению сильного разрыва; наоборот, первоначально резкий фронт волны растяжения будет размазываться, обращаясь в слабый разрыв.

Рассмотрим теперь волны разгрузки, распространяющиеся по однородно нагруженному релаксирующему стержню.

3. Слабые волны разгрузки. В области I $f_1 = f_0 = \text{const}$, $\lambda_1 = \lambda_1(t)$, $v_1 = 0$. Из (3) (или из (7)) следует, что $\lambda_1(t)$, $\sigma_1(t)$ определяются из соотношений

$$(12) \quad \frac{d\lambda_1}{dt} + \frac{\lambda_1}{6\theta_0} F(\lambda_1) = 0, \quad \sigma_1(t) = 2\mu(\lambda_1^2 - \lambda_1^{-1}).$$

В силу непрерывности эти же значения сохраняются и на слабом разрыве $x = x_*(t)$. Из (6) следует, что скорость распространения слабого разрыва описывается формулой

$$(13) \quad x'_*(t) = c_0 \sqrt{(1/3)(\lambda_1^2 + 2\lambda_1^{-1})}.$$

Так как $f(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda^{-1}$ имеет минимум при $\lambda = 1$ и $f(1) = 3$, то из (13) следует, что $x'_*(t) > c_0$, причем из (12) вытекает, что $x'_*(t) \rightarrow c_0$ с ростом t . Таким образом, слабые волны разгрузки рассматриваемого

типа в релаксирующем материале являются сверхзвуковыми как при растяжении, так и при сжатии. Отметим еще, что в области II за фронтом волны происходит релаксация материала в неоднородных условиях.

4. Ударные волны разгрузки. В области I по-прежнему $f_1 = f_0$, $\lambda_1 = \lambda_1(t)$, $v_1 = 0$, $\sigma_1 = \sigma(\lambda_1)$, причем σ_1 и λ_1 определяются из (12). За фронтом ударной волны, т. е. в области II, система (1) — (3) допускает простое решение

$$(14) \quad \lambda = 1, \quad v = v(t), \quad \sigma \equiv 0,$$

а для $f(x, t)$ имеет место уравнение

$$\partial f / \partial t + v(t) \partial f / \partial x = 0,$$

которое легко интегрируется.

Из (9), (10) с учетом (4), (14) имеем ($\lambda_2 = 1$, $v_2 = v(t)$)

$$(15) \quad f_2 = f_1 \lambda_1, \quad x'_0 = c_0 \sqrt{(1/3)(\lambda_1^2 + \lambda_1 + 1)}, \quad v(t) = (1 - \lambda_1^{-1}) x'_0.$$

Из (15) следует, что для ударной волны разгрузки, распространяющейся по сжатому материалу ($\lambda_1 < 1$), имеем $f_2 < f_1$, $x'_0 < c_0$, $v(t) < 0$ (т. е. эта волна неустойчива), для ударной волны разгрузки, распространяющейся по растянутому материалу ($\lambda_1 > 1$), имеем $f_2 > f_1$, $x'_0 > c_0$, $v(t) > 0$ (т. е. эта волна устойчива). Очевидно, что в рассматриваемом случае при любых начальных данных для волны разгрузки, распространяющейся по растянутому стержню, с течением времени будет реализовываться сильный разрыв, так как $x'_0(t) > x'_*(t)$, а для волны разгрузки, распространяющейся по сжатому стержню — слабый разрыв, так как в этом случае $x'_0(t) < c_0 < x'_*(t)$.

Рассмотрим постановку задачи об ударе упруговязкого стержня конечной длины о жесткую преграду. Пусть стержень длины L , находящийся в недеформированном состоянии и имеющий скорость U до удара, ударяется о жесткую преграду.

Выберем начало координат ($x = 0$) на свободном конце стержня в момент его касания стенки. Тогда для системы (1)—(3) с формулами (4) будем иметь следующую систему начальных и граничных условий:

$$(16) \quad \begin{aligned} t = 0: & \quad v = U, \quad f = f_0 = \text{const}, \quad \lambda = 1 \quad (0 \leq x < L); \\ t > 0: & \quad v|_{x=L} = 0; \quad \lambda|_{x=a(t)} = 1, \end{aligned}$$

где $a(t)$ — координата свободного конца стержня. Краевое условие $\lambda = 1$ при $x = a(t)$ в (16) соответствует (см. (4)) динамическому условию $\sigma = 0$ на свободном конце стержня.

Как известно, при ударе стержня о жесткую преграду в нем распространяются последовательно сменяющие друг друга волны сжатия, разгрузки и растяжения. При этом с момента начала контакта стержня со стенкой в месте контакта возникают молекулярные силы сцепления (силы адгезии), вызывающие прилипание стержня к стенке. К моменту t_* возникновения первой волны растяжения напряжение $\sigma(L, t_{*+0})$ в стержне в месте контакта его со стенкой может превысить напряжение σ_0 , создаваемое силами адгезии, и стержень отделится от стенки, имея среднemasсовую скорость U_1 , меньшую первоначальной U из-за не вполне упругого характера удара. В противоположном случае, когда $\sigma(L, t_{*+0}) < \sigma_0$, стержень прилипает к стенке и при $t > t_*$ в нем возникают затухающие колебания.

Для оценки величины σ_0 можно в грубом приближении полагать, что $\sigma_0 = kE$, где $k \sim 1$ ($E = 6\mu$).

Решение вопроса о том, отделится ли стержень от стенки или прилипнет к ней, зависит не только от величины первоначальной скорости стержня U , но и от скорости протекания релаксационных процессов, понижающих со временем уровень напряжений в стержне.

Теперь в дополнение к условиям (16) сформулируем условия отделения или прилипания стержня к стенке

$$(17) \quad \begin{aligned} \sigma(L, t_{*+0}) &> kE, \quad v(L, t_{*+0}) < 0, \\ \sigma(L, t_{*+0}) &< kE, \quad v(L, t_{*+0}) = 0 \quad (v_{x=L} = 0, \quad t > t_*). \end{aligned}$$

Первое условие в (17) соответствует отделению стержня от стенки при $t > t_*$; второе — условию прилипания.

Формулы для среднemasсовой скорости U_1 и величины потери кинетической энергии ΔE стержня, отделяющегося от стенки, имеют вид

$$(18) \quad \begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{f_0 L} \int_{a_*}^L v_*(x) f_*(x) dx \quad (f_0 L = V), \\ \Delta E &= -(1/2) \rho_0 \int_{a_*}^L v_*^2(x) f_*(x) dx + (1/2) \rho_0 f_0 L v^2, \end{aligned}$$

где V — объем стержня; $v_* = v|_{t_{*+0}}$, $f_* = f|_{t_{*+0}}$ — распределения скорости и сечения по длине стержня в момент его отделения от стенки.

Решение сформулированной выше задачи об ударе упруговязкого стержня о преграду проводилось численным методом в безразмерных переменных, отмеченных штрихом:

$$(19) \quad t = (2L/U)t', \quad x = 2Lx', \quad v = Uv', \quad f = f_0 f', \quad \sigma = 2\mu\sigma'.$$

В дальнейшем для простоты штриховые индексы опускаются.

В расчетах принимались следующие численные значения параметров:

$$\begin{aligned} L &= 50 \text{ см}, \quad U = 10-10^3 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}, \quad \theta_0 = 0,167 \text{ с}, \quad \rho_0 = 1 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \\ \mu &= 10^4 \text{ дин} \cdot \text{см}^{-2}. \end{aligned}$$

После перехода к безразмерным переменным (19) в этих уравнениях появляются параметры

$$M_0 = U c_0^{-1}, \quad \theta = 3\theta_0 U L^{-1} \quad (c_0 = (E\rho_0^{-1})^{1/2}),$$

где M_0 — начальное число Маха (величина M_0^{-2} появляется в безразмерном уравнении (2) множителем при σ); c_0 — скорость распространения линейных возмущений. Таким образом, искомое решение зависит от трех безразмерных параметров M_0 , θ , β , где β , согласно (4), входит в $F(\lambda)$. Для указанных числовых параметров $\theta = 2,4 M_0$.

При численном решении задачи использовалась симметричная постановка, при которой «стенка» имеет координату $x = 0,5$. Безразмерные начальные и краевые условия (17) в такой постановке принимают вид

$$(20) \quad \begin{aligned} t = 0: & \quad 0 \leq x \leq 1, \quad f = \lambda = 1, \quad v = \text{sgn}(x - 0,5); \\ t > 0: & \quad \lambda|_{x=a(t)} = \lambda|_{x=b(t)} = 1, \end{aligned}$$

где $x = a(t)$, $x = b(t)$ — координаты свободных концов симметрично продолженного стержня в момент времени t . Использование указанной сим-

метрии в постановке задачи избавило от введения специальных аппроксимаций для вычисления неизвестных значений f , λ , σ на стенке.

Численное решение задачи проводилось методом «сквозного» расчета ударных волн, а также волн разгрузки и нагрузки, возникающих в стержне после удара. Использовалась дивергентная форма уравнений неразрывности и количества движения. Уравнение для функции $\lambda(x, t)$ записывалось в следующем дивергентном виде:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{f^2 v}{\partial \theta_0} F(\lambda) = 0,$$

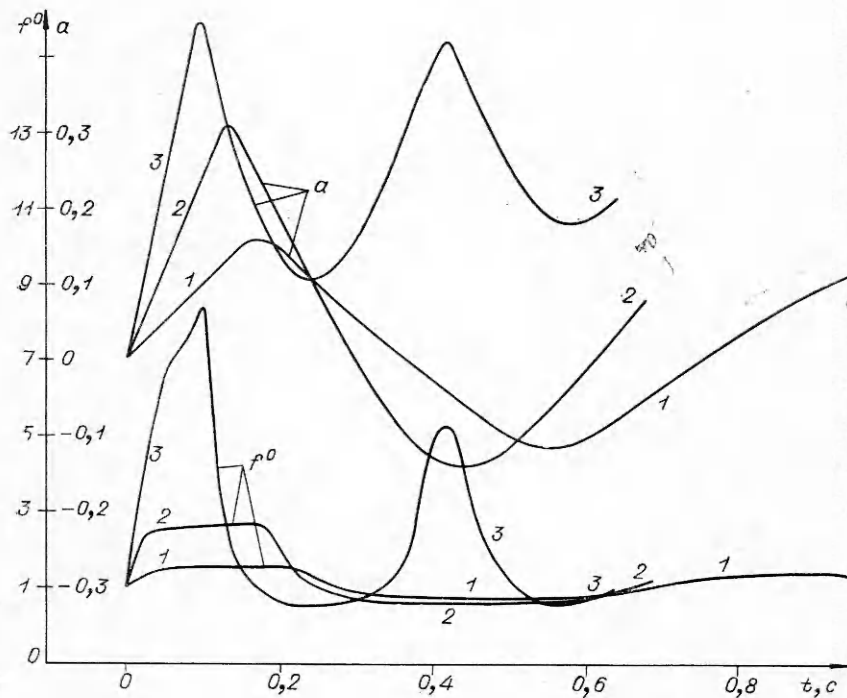
$$(20) \quad A(f, v, \lambda) = 2f \ln \lambda + 2f(\ln f - 1) + fv,$$

$$B(f, v, \lambda) = 2v \ln \lambda - (3M_0^2)^{-1} \sigma(\lambda) + v^2 + 2v(\ln f - 1),$$

где $\sigma(\lambda)$, $F(\lambda)$ — безразмерные величины, определяемые из (4).

На основе разностной аппроксимации уравнения (20) определялся сначала $\ln(\lambda)$, что удобно в зонах больших деформаций. Расчеты проводились в системе координат ξ, t , где $\xi = (x - a(t))/(b - a)$, связанной с подвижными концами стержня. Значения функций f и v на границах $\xi = 0$, $\xi = 1$ определялись на основе односторонних разностных аппроксимаций уравнений неразрывности и уравнения количества движения. Законы движения свободных концов стержня рассчитывались по найденным значениям скоростей.

Разностная схема построена по аналогии с известной схемой «чехарда» (например, [9]) при следующей модификации. Выход на полупелый временной слой проводился на основе уравнений без «источников» («стоков»), обусловленных неполной дивергентностью аппроксимируемых уравнений. На гладких решениях отличие аппроксимаций от схемы «чехарда» имеет порядок τ .



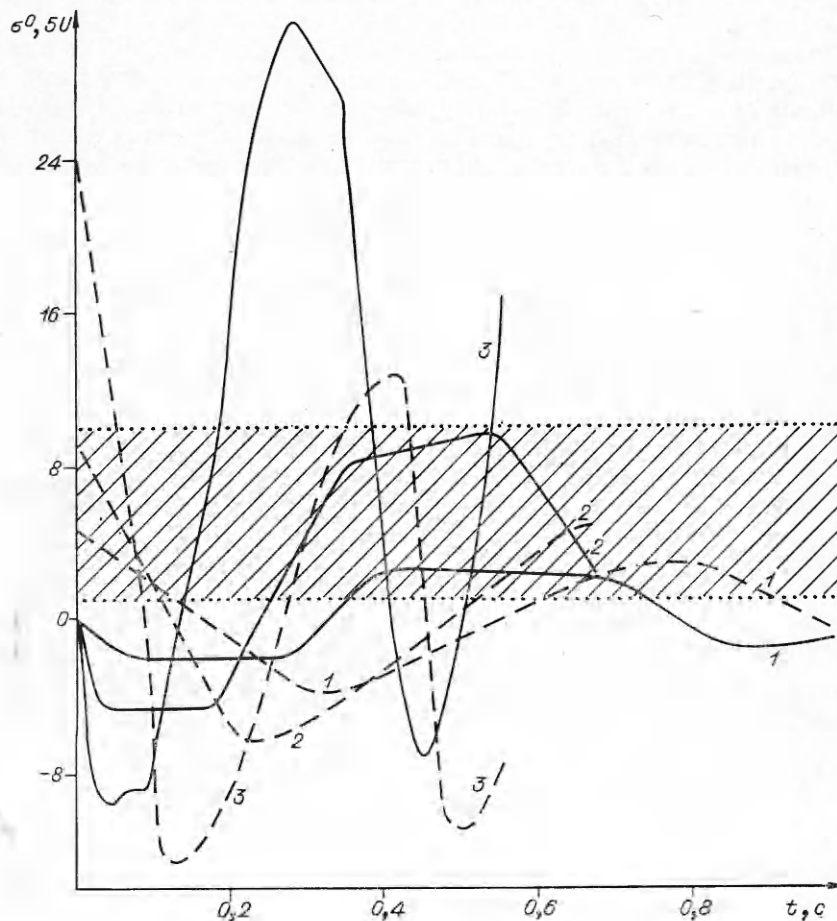
Ф и г. 1

Погрешность вычислений контролировалась величиной интегральных дисбалансов по массе и импульсу, а также сопоставлением результатов при увеличении числа расчетных узлов. Результаты расчетов, обсуждаемые ниже, получены на сетке с 80 узлами в области $0 \leq \xi \leq 1$.

По описанной выше методике проведены расчеты движения упруго-вязкого стержня при его ударе о жесткую преграду. Для отмеченного соотношения $\theta = 2,4 M_0$ начальные числа Маха варьировались в пределах от 0,4 до 2, что соответствовало начальным скоростям полета стержня U от 100 до 500 см·с⁻¹. Некоторые результаты расчетов в безразмерных переменных представлены на фиг. 1—4.

На фиг. 1 изображены изменения во времени координаты $x = a(t)$ свободного конца стержня и площади сечения $f^0(t) = f|_{x=1/2}$ стержня в месте его контакта со стенкой. По оси абсцисс отложено размерное время (см. (19)). Кривые 1—3 относятся к значениям $M_0 = 0,4; 1; 2$ соответственно для случая $\beta = 0$ (см. (4)); видно, что большим значениям M_0 отвечают большие амплитуды и скорости затухающих волновых процессов с более интенсивным нелинейным искажением.

Интересно отметить, что при $M_0 = 2$, как это видно из фиг. 1, стержень в процессе колебаний не достигает первоначальной длины (например,



Ф и г. 2

в конце фазы разгрузки длина стержня уменьшилась примерно на 20%), в то время как для $M_0 = 0,4$; 1 после фазы разгрузки длина возрастает по сравнению с первоначальной. Это связано с тем, что при $\beta = 0$ с ростом M_0 скорости релаксационных процессов возрастают быстрее, чем скорости распространения волн. Аналогичное явление может иметь место и при $\beta > 0$ в некоторой области изменения M_0 .

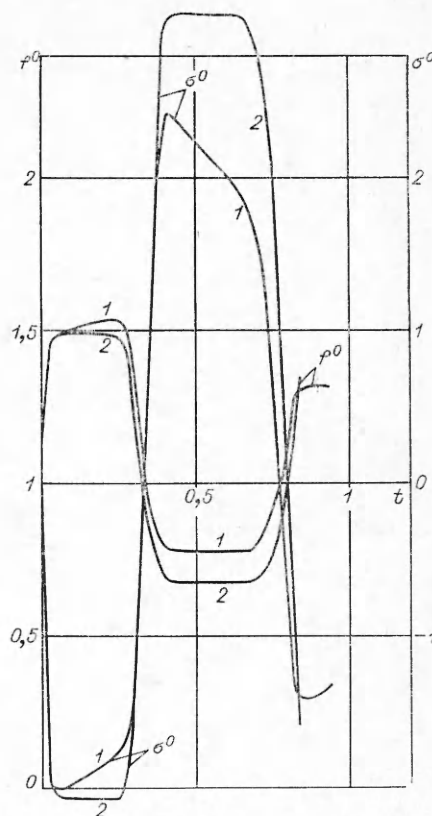
Среднемассовые скорости стержня U_1 (штриховые линии), вычисленные по формуле (18), и напряжения на стенке σ^0 (сплошные линии) в зависимости от размерного времени t представлены на фиг. 2. Здесь же заштрихованной полосой отмечены значения напряжения, согласно критерию отскока (17) со значением $k = 0,35 - 3,5$, позволяющие определить среднемассовую скорость стержня в момент его отскока от стенки. Кривые 1—3 отвечают тем же значениям M_0 , что и для фиг. 1, $\beta = 1$. Так же, как и для данных фиг. 1, большим значениям M_0 соответствуют большие амплитуды и частоты динамических переменных σ^0 и U_1 . При этом, как видно из фиг. 2, большим значениям M_0 отвечают большие скорости отскока стержня от преграды. Далее изучалось

влияние параметра β на некоторые величины, характеризующие волновой процесс. Проводились расчеты для $M_0 = 0,4$ и $\beta = 0; 1; 40$. Данные расчетов для $\beta = 0$ и 1 отличались незначительно. На фиг. 3 представлены зависимости $f^0(t)$ и $\sigma^0(t)$ при $M = 0,4$, кривые 1, 2 соответствуют значениям $\beta = 0$ и 40.

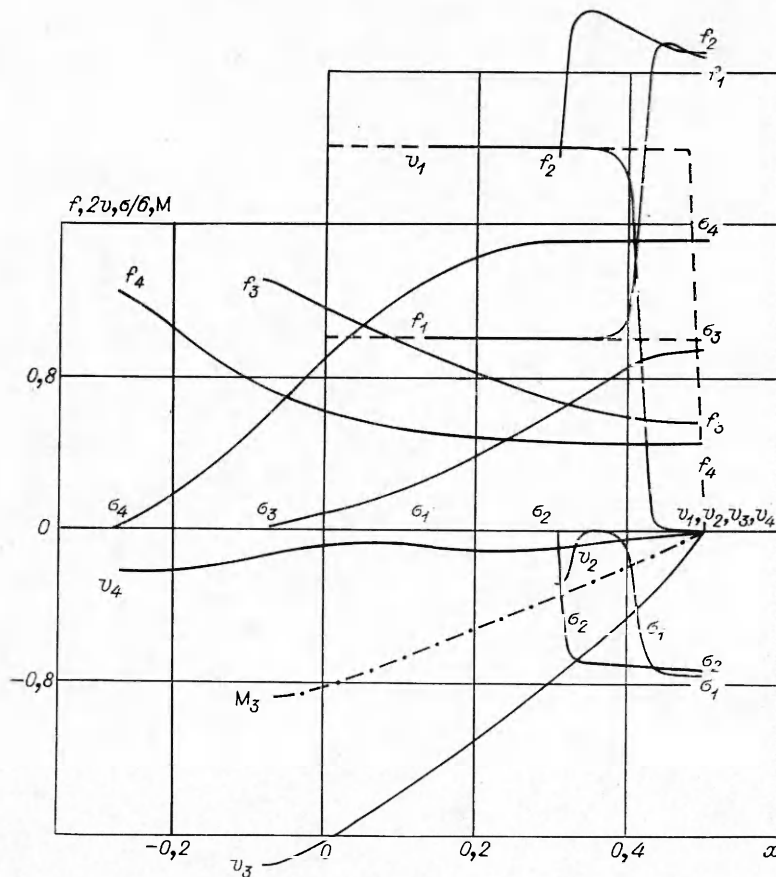
В последнем случае за исключением зон, где $\lambda = 1$, релаксационные процессы в упруговязком стержне практически отсутствуют и стержень ведет себя как упругое тело с большими деформациями, наподобие спитого каучука.

Из фиг. 3 видно, что в отличие от $\beta = 40$, где на зависимостях $\sigma^0(t)$ имеются явно выраженные плато, при $\beta = 0$ амплитуды напряжения меньше, а вместо плато имеются участки заметного изменения $\sigma^0(t)$, указывающие на интенсивное протекание процесса релаксации.

На фиг. 4 изображены распределения вдоль стержня в различные моменты времени значений параметров задачи для $M_0 = 1$, $\beta = 1$. Индексами 1—4 отмечены безразмерные распределения величин f , $\sigma/6$, $2U$ в моменты времени $t_1 = 0,075$, $t_2 = 0,182$, $t_3 = 0,439$, $t_4 = 0,658$ с. Штрихом отмечены распределения невозмущенных величин для $0 \leq x \leq 0,5$, где $x = 0,5$ соответствует свободному концу стержня. В момент t_1 в стержне со слегка сглаженным начальным профилем скорости имеется распределение параметров, близкое к ударной волне, распространяющейся справа налево. Значительная часть стержня в этот момент времени еще не подвергалась возмущениям (см. распределения v_1 , f_1 , σ_1). Значения, вычисленные на фронте ударной волны, хорошо совпадают с найденными соотношени-



Ф и г. 3



Ф и г. 4

ями (9), (10). Как видно из кривой для f_1 , за фронтом ударной волны происходит релаксация. Более отчетливо это видно из кривой f_2 для момента времени t_2 , для которого ударная волна только что отразилась от свободного конца стержня (см. также кривые 2 на фиг. 1, 2). В этот момент времени почти вся масса стержня покоится, кроме небольшого участка, около свободного конца, уже начавшего движение в противоположном направлении (справа налево) с небольшой скоростью. Распределение σ_2 также резко меняется только около свободного конца. Этот момент t_2 соответствует приблизительно начавшейся фазе нагрузки сжатого стержня. В этом случае ударная волна существовать не может и образуется волна с весьма размытым фронтом. Это приводит к достаточно длительной перестройке сечения свободного конца стержня, в результате чего успевают пройти релаксационные процессы и сечение стержня на свободном конце после отражения волны полностью не восстанавливается.

После фазы разгрузки начинается фаза растяжения, иллюстрируемая на фиг. 4 распределениями величин в момент t_2 (начальная стадия растяжения) и в момент t_1 (конечная стадия растяжения). Представляет интерес сопоставить указанные моменты времени с распределениями 2 на фиг. 1, 2.

Штрихпунктирной линией на фиг. 4 показано распределение локальных чисел Маха M в момент t_3 , где $M^2 = M_0^2 \frac{3v^2}{(\lambda^2 + 2\lambda - 1)}$, которое подобно распределению v_3 .

Поступила 18 1 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М., «Мир», 1972.
2. Coleman B. D., Gurtin M. E., Herrera I. R., Truesdell C. Wave propagation in dissipative materials. N. Y., Springer-Verlag, 1965.
3. Леонов А. И. Неравновесная термодинамика и реология упруговязких полимерных сред. Препринт ИТМО АН БССР им. А. В. Лыкова. Минск, 1975.
4. Леонов А. И. Nonequilibrium thermodynamics and rheology of viscoelastic polymer media. — «Rheologica Acta», 1976, Bd 15, N. 2, S. 85—98.
5. Соколовский В. В. Распространение упруговязких пластических волн в стержнях. — ПММ, 1948, т. XII, вып. 3.
6. Зверев И. Н. Распространение возмущений в вязкоупругом и вязкопластическом стержне. — ПММ, 1950, т. XIV, вып. 3.
7. Баренблатт Г. И., Ишлинский А. Ю. Об ударе вязкопластического стержня о жесткую преграду. — ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 3.
8. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Ил, 1950.
9. Кестенбойм Х. С., Росляков Г. С., Чудов Л. А. Точечный взрыв. Методы расчета. Таблицы. М., «Наука», 1974.

УДК 534.222.2

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ
ДИНАМИЧЕСКОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Н. С. Козин, А. А. Тузовский, Н. Н. Холин

(Красноярск, Москва)

В работе строятся интерполяционные формулы упругой энергии ряда металлов (Fe(α -фаза), Al, Cu, Ni, Pb, Ti, Be, Au, Cd, Pt, Ag, Zn, Mg, Sn, Sb, V, Nb, Ta, Mo, W, Co, Th, U, Zr), учитывающие формоизменение и дефектообразование в кристаллической решетке. Для этого в уравнение внутренней энергии среды вводится зависимость от инвариантов второго и третьего порядка тензора упругих деформаций, а также скалярного параметра, характеризующего плотность дефектов кристаллической решетки. Формулы справедливы в диапазоне сжатий $0,6 \leq \rho^0/\rho \leq 1$ и диапазоне температур $0 \leq T(K) \leq \Theta_e$, где Θ_e — температура вырождения электронов. Проводится сравнение интерполяционных коэффициентов для упругой энергии с модулями теории упругости второго приближения. На основе построенных уравнений состояния проводится оценка величины работы сил на пластических деформациях, идущей на образование дефектов.

1. Для замыкания полной системы механических уравнений в случае, когда важны эффекты изменения температуры в процессах упругопластического деформирования твердого тела, необходимо рассматривать термодинамические соотношения в теории динамической пластичности. При этом следует иметь в виду, что в ряде важных для практических приложений случаев пластическое деформирование приводит к изменению величины внутренней энергии материала за счет изменения его структуры. Так, в высокополимерах в процессе деформирования происходит разрыв внутренних межмолекулярных связей, в металлах при пластическом деформировании происходит накопление дислокаций и т. д. Поэтому в зависимости внутренней энергии от тензора упругих деформаций и энтропийного параметра, который учитывает перераспределение внутренней