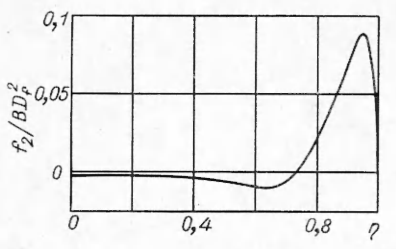


Фиг. 4

График функции $f_2(\eta)$ при тех же параметрах $\nu = 3$ и $n=5$ показан на фиг. 4. Число граничных условий для уравнений (3.3), (3.9) на единицу больше порядка самих уравнений. Выполнение «лишних» граничных условий обеспечивается здесь за счет свойств самих уравнений, однако в принципе мы не обязаны ограничивать себя поисками решений лишь в классе непрерывных функций. Как из теоретических рассмотрений, так и из анализа экспериментальных данных известно (см., например, [2]), что в области между центром взрыва и фронтом возмущений при определенных условиях могут возникать сильные разрывы. В условиях выбранного примера и в рамках рассмотренных здесь приближений указанные разрывы не обнаруживаются.

Поступила 24 XII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.** Физика ударных волн и высокотемпературных гид родинамических явлений. М., «Наука», 1966.
2. **Коробейников В. П.** Задачи теории точечного взрыва в газах.— «Труды МИАН им. Стеклова», 1973, т. 119.
3. **Седов Л. И.** Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
4. **Баренблатт Г. И.** О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде.— ПММ, 1952, т. 16, вып. 1, с. 67—78.

УДК 532.517.4

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Г. А. Кузьмин, А. З. Паташинский

(Новосибирск)

В основе феноменологической теории локальной структуры турбулентности [1] лежит представление, что в турбулентном потоке обмениваются энергией лишь пульсации близких масштабов. Предположение о случайном характере обмена энергией приводит к выводу об универсальности и подобии статистического режима пульсаций малых масштабов. В эйлеровых уравнениях движения наряду с взаимодействиями, осуществляющими обмен энергии между пульсациями, имеются фиктивные взаимодействия, связанные с переносом пульсаций данного масштаба l пульсациями масштабов $l' \gg l$. Как подчеркивалось в работах [2, 3], при эйлеровом описании турбулентности эффект переноса приводит к сильной статистической зависимости пульсаций различных масштабов. Поэтому свойства универсальности и подобия мелкомасштабных пульсаций могут наблюдаться лишь в переменных, в которых отсутствуют эффекты чистого переноса одних пульсаций другими. В связи с этим в работах [1—3] приведены качественные соображения о необходимости описания мелкомасштабных пульсаций в системе отсчета, движущейся в каждой точке со всеми крупномасштабными пульсациями. В данной работе показывается, что такое описание мелкомасштабных пульсаций может быть осуществлено с помощью перехода в представление, аналогичное представлению взаимодействия квантовой теории поля [4]. Представление взаимодействия является промежуточным относительно лагранжева и эйлерова способов описания турбулентности, поскольку перенос пакета как целого описывается в переменных, лагранжевых лишь относительно движений больших масштабов. Другой способ исключения переносных взаимодействий, основанный на введении несоленоидальной скорости, использовался в работе [5]. Метод данной работы представляется физически более оправданным.

Рассмотрим предварительно случай скалярного поля $\varphi(\mathbf{x}, t)$, вся эволюция которого во времени связана с переносом поля φ полем скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Роль поля φ может играть, например, концентрация пассивной примеси в турбулентном потоке. Уравнение для φ имеет вид

$$\partial\varphi/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)\varphi = 0. \tag{1}$$

Интегрируя (1) по времени, получаем интегральное уравнение

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t_0) - \int_{t_0}^{t} d\tau\, (\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau)\nabla)\, \varphi(\mathbf{x}, \tau).$$

Решение этого уравнения может быть записано в виде итерационного ряда

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = L\varphi(\mathbf{x}, t_0) \equiv \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{t_0}^{t} d\tau_1\, (\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau_1)\nabla) \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n\, (\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau_n)\nabla)\right] \varphi(\mathbf{x}, t_0). \tag{2}$$

Интегрирование по всем $d\tau_m$ можно распространить на весь интервал (t_0, t), если ввести операцию T-упорядочения [4]. По определению

$$T\,[(\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau)\nabla)(\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau')\nabla) = \begin{cases}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau)\nabla)(\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau')\nabla), & \text{если } \tau > \tau', \\ (\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau')\nabla)(\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau)\nabla), & \text{если } \tau' > \tau.\end{cases}$$

В случае большего числа сомножителей оператор T-упорядочения располагает некоммутирующие операторы $(\mathbf{v}\nabla)$ в порядке убывания временных аргументов слева направо. С помощью оператора T-упорядочения оператор L в формуле (2) может быть записан в виде [4]

$$L = \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \ldots \int_{t_0}^{t} d\tau_n T\,[(\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau_1)\nabla) \ldots (\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau_n)\nabla)]\right\} =$$
$$= T \exp\left[-\int_{t_0}^{t} d\tau\, (\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau)\, \nabla)\right]. \tag{3}$$

Согласно (2), оператор L связывает значение функции $\varphi(\mathbf{x}, t)$ в произвольный момент времени t с ее значением в фиксированный момент времени t_0. В этом смысле для уравнения (1) оператор L осуществляет переход к представлению, аналогичному представлению Гейзенберга в квантовой механике. Если произведем преобразование поля φ по формуле $\varphi(\mathbf{x}, t) = L\widetilde{\varphi}(\mathbf{x}, t)$, то поле $\widetilde{\varphi}$ не будет зависеть от времени и равно значению поля φ в момент t_0. В потоке жидкости концентрация примеси постоянна вдоль лагранжевых траекторий частиц. Поэтому оператору L может быть придан и иной смысл. Для произвольного поля $\psi(\mathbf{x}, t)$ (которое может и не быть скалярным) оператор L описывает переход к лагранжевым переменным. Поле $\tilde{\psi}$, определенное равенством

$$\psi(\mathbf{x}, t) = L\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t), \tag{4}$$

есть лагранжево поле. Докажем это утверждение иным способом. Разложим поле $\tilde{\psi}$ в ряд Тейлора по $t - t_0$

$$\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^n}{n!} \frac{\partial^n \tilde{\psi}}{\partial t^n}\bigg|_{t=t_0}. \tag{5}$$

Используя (4), ряд (5) можно переписать в виде

$$\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\right)^n \psi(\mathbf{x}, t)\bigg|_{t=t_0}. \tag{6}$$

Согласно [6], выражение (6) дает связь эйлерова поля ψ с лагранжевым $\tilde{\psi}$.

Точка $\mathbf{x}$ в равенстве (4) является эйлеровой координатой для поля ψ и лагранжевой для поля $\tilde{\psi}$. Обычно связь лагранжевых полей с эйлеровыми определяется равенством [7]

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \tilde{\psi}(\mathbf{a}, t),$$

где $\mathbf{a} = \mathbf{x} - \int\limits_{t_0}^{t} \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{a}, \tau)\, d\tau$, $\tilde{\mathbf{v}}$ — лагранжева скорость. Следовательно, поле ψ в левой части равенства равно лагранжеву полю $\tilde{\psi}$ в точке, сдвинутой относительно исходной на величину $-\int\limits_{t_0}^{t} \tilde{\mathbf{v}} d\tau$. Отсюда следуют свойства оператора L, которые потребуются ниже. Если $\tilde{\psi}$, $\tilde{\chi}$ — любые лагранжевы поля, то

$$L(\tilde{\psi}\,\tilde{\chi}) = L(\tilde{\psi})\, L(\tilde{\chi}), \quad L(\tilde{\psi})^n = (L\tilde{\psi})^n. \tag{7}$$

Равенства (7) можно доказать и непосредственно из определения оператора L.

Построим оператор L^{-1}, обратный L. Воспользуемся для этой цели уравнением, которому удовлетворяет произвольное лагранжево поле $\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t, t_0)$ [5]

$$[\partial/\partial t_0 + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0)\nabla]\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t, t_0) = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) — следствие факта, что значение лагранжева поля, измеренного в момент времени t, не изменится, если начальные значения $\mathbf{x}$, t_0 сдвинем вдоль лагранжевой траектории. При $t = t_0$ $\tilde{\psi}$ совпадает с эйлеровым полем ψ, поэтому решение уравнения (8) может быть записано в виде, аналогичном (2),

$$\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t, t_0) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int\limits_{t}^{t_0} d\tau_1 (\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau_1)\nabla) \int\limits_{t}^{\tau_1} d\tau_2 \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \int\limits_{t}^{\tau_{n-1}} d\tau_n (\mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau_n)\nabla)\right] \psi(\mathbf{x}, t).$$

Смена местами пределов интегрирования дает

$$\widetilde{\psi}(\mathbf{x}, t, t_0) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 (\mathbf{v}\nabla) \int_{\tau_1}^{t} d\tau_2 \ldots \int_{\tau_{n-1}}^{t} d\tau_n (\mathbf{v}\nabla)\right] \psi(\mathbf{x}, t).$$

Введем операцию T^+-упорядочения. Оператор T^+ располагает операторы $(\mathbf{v}\nabla)$ в порядке возрастания временных аргументов слева направо. Сумма ряда запишется в виде

$$\widetilde{\psi}(\mathbf{x}, t, t_0) = L^{-1}\psi(\mathbf{x}, t) = T^+ \exp\left[\int_{t_0}^{t} d\tau \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau)\nabla\right] \psi(\mathbf{x}, t). \tag{9}$$

Отметим, что знак в показателе экспоненты и порядок расположения операторов в членах разложения в равенствах (2), (9) обратны.

Пусть поле ψ удовлетворяет уравнению, более общему, чем (1),

$$\partial\psi/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)\psi = P(\psi, \nabla\psi), \tag{10}$$

где P — некоторый полином относительно $\psi(\mathbf{x}, t)$ и ее пространственных производных. Рассмотрим уравнение, которому удовлетворяет лагранжево поле $\widetilde{\psi}(\mathbf{x}, t, t_0)$. Подставляя (4) в (10), имеем

$$\partial\widetilde{\varphi}/\partial t = L^{-1}P(L\widetilde{\psi}, \nabla L\widetilde{\psi}). \tag{11}$$

В силу равенств (7) уравнение (11) приобретает вид

$$\partial\widetilde{\psi}/\partial t = P(\widetilde{\psi}, L^{-1}\nabla L\widetilde{\psi}). \tag{12}$$

Отсюда следует, что если коммутатором производной ∇ с оператором L можно пренебречь, то уравнение для $\widetilde{\psi}$ сводится к

$$\partial\widetilde{\psi}/\partial t = P(\widetilde{\psi}, \nabla\widetilde{\psi}), \tag{13}$$

т. е. в этом случае (13) эквивалентно (10) с $\mathbf{v} = 0$. Коммутаторы оператора L с производной имеют порядок величины $(t - t_0)\partial v_i/\partial x_j$. Поэтому решения (12) совпадают с решениями уравнения (13), если выполняется неравенство

$$|t - t_0| \ll |\mathrm{grad}\, \mathbf{v}|^{-1}, \tag{14}$$

где $|\mathrm{grad}\, \mathbf{v}|^{-1}$ равен по порядку величины времени, за которое две близкие точки успевают разойтись на значительное расстояние. Отсюда, однако, еще не следует, что при выполнении (14) статистический режим поля $\widetilde{\psi}$ не зависит от $\mathbf{v}$, так как начальные условия для поля $\widetilde{\psi}$ зависят, вообще говоря, от $\mathbf{v}$. В начальный момент времени лагранжево поле $\widetilde{\psi}$ совпадает с эйлеровым полем ψ. Поэтому статистический режим начальных значений $\widetilde{\psi}(\mathbf{x}, t, t_0)$ определяется одновременными моментами эйлерова поля $\psi(\mathbf{x}, t_0)$.

Покажем, что одновременные моменты эйлерова поля ψ не зависят от $\mathbf{v}$, если пространственные и временные масштабы поля $\mathbf{v}$ велики по сравнению с характерными масштабами поля ψ. Рассмотрим вначале простой пример, когда поле $\mathbf{v}$ не зависит от $\mathbf{x}$, t и является случайным вектором с заданными статистическими свойствами. Преобразование (4) описывает в этом случае переход в другую галилееву систему отсчета, движущуюся вместе с жидкостью со скоростью $\mathbf{v}$

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \exp\,[-(t - t_0)(\mathbf{v}\nabla)]\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\psi}(\mathbf{x} - \mathbf{v}(t - t_0), t). \tag{15}$$

Средние лагранжева поля $\tilde{\psi}$

$$\tilde{G}_n = \langle\tilde{\psi}(\mathbf{x}_1, t_1) \ldots \tilde{\psi}(\mathbf{x}_n, t_n)\rangle \tag{16}$$

совпадают в этом случае со средними поля ψ^0 в покоящейся жидкости и не зависят от $\mathbf{v}$. Моменты G_n эйлерова поля ψ определяются с помощью (15) усреднением по распределению вероятности вектора $\mathbf{v}$. Пусть поле $\tilde{\psi}$ статистически однородно. Наиболее простая связь между функциями G_n, $\tilde{G}_n$ имеется в представлении Фурье по пространственным аргументам. Преобразование (15) для компонент Фурье $\psi(\mathbf{k}, t)$ есть

$$\psi(\mathbf{k}, t) = \exp\,[-i\mathbf{k}\mathbf{v}(t - t_0)]\tilde{\psi}(\mathbf{k}, t).$$

Отсюда получаем

$$G_n(\mathbf{k}_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, t_n) = Z(\alpha)\tilde{G}_n(\mathbf{k}_1, t_1, \ldots, \mathbf{k}_n, t_n), \tag{17}$$

где $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{k}_i\,(t_i - t_0)$; $Z(\alpha) = \langle\exp\,(-i\mathbf{v}\alpha)\rangle$ — характеристическая функция случайного вектора $\mathbf{v}$. Например, для гауссова $\mathbf{v}$ характеристическая функция Z_0 имеет вид [7]

$$Z_0(\alpha) = \exp\,[-i\,\langle v_j\rangle\,\alpha_j - (1/2)\,\langle v_j v_m\rangle\,\alpha_j\alpha_m].$$

Если, кроме того, распределение вероятности для $\mathbf{v}$ изотропно, то $\langle\mathbf{v}\rangle = 0$, $\langle v_j v_m\rangle = v_0^2\delta_{jm}$ и $Z_0(\alpha) = \exp\left(-\frac{1}{2}v_0^2\alpha^2\right)$.

В силу пространственной однородности $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{k}_i = 0$. Поэтому $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \mathbf{k}_i\tau_i$, где $\tau_i = t_i - t_n$. Отсюда следует, что одновременные моменты всех порядков эйлерова поля ψ совпадают со средними поля $\tilde{\psi}$ и не зависят от $\mathbf{v}$. Для одновременных средних $\alpha = 0$, $Z(0) = 1$, $G_n = \tilde{G}_n$.

При выводе (17) было использовано лишь предположение о статистической независимости поля $\tilde{\psi}$, которое совпадает с полем ψ^0 в покоящейся жидкости, от поля скорости $\mathbf{v}$. Поэтому результат (17) не зависит от конкретного вида уравнения, которое описывает эволюцию поля ψ. Формула (17) для векторного поля $\mathbf{u}$, которое удовлетворяет уравнению переноса с $\mathbf{v} = \mathrm{const}$

$$\partial\mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)u = 0,$$

при $n = 2$ в предположениях о гауссовости и взаимной статистической независимости полей $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)$ была получена в работе [3].

Пусть поле $\mathbf{v}$ зависит от $\mathbf{x}$, t. В турбулентном потоке жидкости, как было показано в [1], можно ожидать, что движения, различные по масштабу, статистически взаимно независимы. Такие же соображения, не претендуя на строгое доказательство, можно привести в нашем случае. Пусть корреляционное время τ_c стационарного случайного поля $\psi^0(\mathbf{x}, t)$ в покоящейся жидкости мало по сравнению с временем изменения скорости $\mathbf{v}$, а длина корреляции r_c поля ψ^0 мала по сравнению с масштабами L поля скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. Взаимодействие полей $\mathbf{v}$, ψ в основном сведется к переносу без заметного искажения волновых пакетов поля ψ полем $\mathbf{v}$. Эволюция пакетов в системе отсчета, движущейся вместе с жидкостью, определяется в основном нелинейным взаимодействием P. В движущейся системе отсчета взаимодействие пакетов поля ψ с полем $\mathbf{v}$ мало по параметрам r_c/L и $\tau_c L/v$. Поэтому статистическая зависимость пакетов поля ψ от $\mathbf{v}$ также будет слабой. Одновременные корреляции поля ψ, которые не зависят от переноса, с точностью до членов, малых по r_c/L, $\tau L/v$, не зависят от $\mathbf{v}$.

Поскольку уравнение (13) и начальные условия для $\tilde{\psi}$ в пределе $r_c/L \to 0$ не зависят от $\mathbf{v}$, неодновременные корреляционные функции для поля $\tilde{\psi}$ при условии (14) не будут зависеть от $\mathbf{v}$ и совпадают с корреляционными функциями поля ψ^0 в покоящейся жидкости. Таким образом, в рассмотренном случае преобразование (4) описывает переход к «представлению взаимодействия»: оно исключает фиктивную часть взаимодействия, связанную с чистым переносом волновых пакетов поля ψ. Если $\mathbf{v}$ содержит гармоники тех же масштабов, что и ψ, то при переходе к представлению взаимодействия в показателе T-экспоненты в формуле (4) следует оставить лишь крупномасштабную компоненту скорости $\mathbf{v}$. Уравнение для поля $\tilde{\psi}$ будет содержать в этом случае взаимодействие лишь с той компонентой поля $\mathbf{v}$, которая вызывает искажение пакетов поля ψ. Преобразование этого вида использовано ниже при рассмотрении статистического режима пульсаций скорости в инерционном интервале волновых чисел.

Вычислим неодновременные моменты поля ψ, считая, что корреляции поля $\tilde{\psi}$ в покоящейся жидкости заданы. Если все разности времен $t_{ij} = |t_i - t_j|$ и расстояния $x_{ij} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ в (16) малы по сравнению с характерными масштабами поля $\mathbf{v}$, то при вычислении функции G_n зависимостью поля $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ от координаты и времени можно пренебречь и считать поле $\mathbf{v}$ случайным вектором. Этот случай рассмотрен выше. Функцию $Z(\alpha)$ в (17) следует считать в этом случае одноточечной характеристической функцией поля $\mathbf{v}$. Одновременные моменты G_n, $\tilde{G}_n$ совпадают. Неодновременные моменты отличаются слабо, если разности времен t_{ij} малы по сравнению с величиной $(kv_0)^{-1}$, где v_0 — среднеквадратичная пульсация вектора $\mathbf{v}$. Величина $(kv_0)^{-1}$ по порядку величины равна времени, необходимому для сдвига волнового пакета с характерным волновым числом k на расстояние порядка его размера k^{-1}. Если корреляции поля ψ затухают за время, много меньшее $(kv_0)^{-1}$, то множитель $Z(\alpha)$ в (16) можно отбросить. Переносные взаимодействия, по-видимому, всегда несущественны для пульсаций скорости в вязком интервале при асимптотически больших волновых числах. В интервале вязкой диссипации энергии характерным временем затухания корреляций является величина $\tau_k \sim (\nu k^2)^{-1}$. При достаточно больших k волновые пакеты успевают затухнуть прежде, чем сдвинутся на заметное расстояние. Поэтому при $k \gg v_0/\nu$ перенос не окажет влияния на зависимость корреляционных функций поля скорости от времени. Для полей, когда предположение о достаточно быстром затухании волновых пакетов не выполняется, зависимость эйлеровых корреляций от времени полностью определяется при достаточно большом v_0 процессом переноса.

Пусть точки $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ в (16) можно разбить на две группы так, что расстояния между точками внутри групп x_{ij} малы по сравнению с расстоянием R между группами точек. Величину будем считать большой по сравнению с корреляционным радиусом поля $\tilde{\psi}$ и сравнимой с характерным масштабом поля $\mathbf{v}$. В этом случае внутри каждой группы точек можно ввести общую скорость $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Средние поля $\widetilde{\psi}$ разобьются на произведение средних полей, принадлежащих каждой из групп точек:

$$
\langle \widetilde{\psi}(\mathbf{x}_1, t_1) \ldots \widetilde{\psi}(\mathbf{x}_n, t_n) \rangle = \langle \widetilde{\psi}(\mathbf{x}_1, t_1) \ldots \widetilde{\psi}(\mathbf{x}_l, t_l) \rangle \times \times \langle \widetilde{\psi}(\mathbf{x}_1', t_1') \ldots \widetilde{\psi}(\mathbf{x}_m', t_m') \rangle, \tag{18}
$$

где $l + m = n$. Применяя к каждому из средних в правой части (18) преобразование (15) соответственно с $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и переходя к компонентам Фурье, аналогично (17) получаем

$$
G_n = Z(\alpha_1, \alpha_2)\, \widetilde{G}_n, \tag{19}
$$

где $\alpha_1 = \sum\limits_{i=1}^{l} \mathbf{k}_i t_i$; $\alpha_2 = \sum\limits_{j=1}^{m} \mathbf{k}_j' t_j'$; $Z(\alpha_1, \alpha_2)$ — двухточечная характеристическая функция поля $\mathbf{v}$. Внутри каждой из групп точек сумма волновых векторов равна нулю. Поэтому α_1, α_2 зависят лишь от разностей времен и одновременные моменты G_n, $\widetilde{G}_n$ совпадают. Обобщение (19) на случай большего числа групп точек является очевидным.

Используем полученные результаты для изучения временных корреляций поля скорости в инерционном интервале волновых чисел. Соображения подобия [1, 8] позволяют предположить, что время жизни волновых пакетов в инерционном интервале степенным образом зависит от волнового числа $\tau_k \sim k^{-\varkappa}$. Если предположить, что единственным параметром, определяющим статистический режим пульсаций в инерционном интервале, является средняя скорость диссипации энергии ε, то из соображений размерности (см. [1])

$$
\tau_k \sim \varepsilon^{-1/3} k^{-2/3}.
$$

Это время велико по сравнению с величиной $(kv_0)^{-1}$, где под v_0 следует понимать характерную скорость пульсаций из энергосодержащего интервала. Поэтому зависимость от времени корреляционных функций эйлеровой скорости в инерционном интервале полностью определяется переносом случайными движениями крупных масштабов. Это означает, что переносные взаимодействия приводят к сильной статистической зависимости пульсаций эйлеровой скорости существенно различных масштабов (см. [3]). Покажем, что взаимные переносы вихрей со значительно различающимися масштабами можно исключить с помощью перехода в представление взаимодействия, аналогичное (4) для поля ψ.

Пусть $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ — эйлерово поле скорости. Лагранжево поле $\widetilde{\mathbf{v}}$ связано с $\mathbf{v}$ выражением, аналогичным (4),

$$
\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = T \exp\left[- \int_{t_0}^{t} d\tau\, \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau)\, \nabla \right] \mathbf{v}(\mathbf{x}, t). \tag{20}
$$

Обратное преобразование дается оператором T^{+}-экспоненты. Заметим, что переход к лагранжевым переменным исключает перенос материальной частицы движениями всех масштабов. В нашем рассмотрении роль такой частицы будет играть волновой пакет. Для движений, масштабов $l' \gg l$, где l — размер пакета, волновой пакет можно считать материальной точкой и перейти относительно этих движений к лагранжевым переменным. При реализации этой программы в координатном пространстве необходимо разложить эйлерово поле скорости по полной системе функций типа волновых пакетов и применить для каждого пакета преобразование (20), где в показателе T-экспоненты следует оставить лишь крупномасштабную по отношению к размеру пакета компоненту поля скорости. Форма волновых пакетов при исключении чисто переносных взаимодействий несущественна.

Проще, однако, исходить из уравнения Навье — Стокса в представлении Фурье по пространственным аргументам

$$(\partial/\partial t + \nu k^2)\, v_i(\mathbf{k}, t) = -ik_j \int d^3q v_j(\mathbf{q}, t)\, v_i(\mathbf{k}-\mathbf{q}, t) + ik_i p(\mathbf{k}, t). \tag{21}$$

Уравнение несжимаемости для поля $\mathbf{v}$

$$\mathbf{kv}(\mathbf{k}, t) = 0$$

позволяет выразить компоненту Фурье поля давления через скорость с помощью равенства

$$p(\mathbf{k}, t) = (k_j k_l/k^2) \int d^3q v_j(\mathbf{q}, t)\, v_l(\mathbf{k}-\mathbf{q}, t). \tag{22}$$

Введем скорость $\mathbf{V}^{(k)}(\varkappa, t)$, которая содержит лишь гармоники Фурье $\mathbf{v}(\varkappa, t)$ с волновыми числами $\varkappa$, много меньшими k. Будем считать, например, что $\mathbf{V}$ определяется равенством

$$\mathbf{V}^{(k)}(\varkappa, t) = \exp(-\lambda^2\varkappa^2/k^2)\mathbf{v}(\varkappa, t),$$

где $\lambda \gg 1$. В координатном представлении $\mathbf{V}$ имеет вид

$$\mathbf{V}^{(k)}(\mathbf{x}, t) = [k/(2\lambda\sqrt{\pi})]^3 \int\limits_{-\infty}^{\infty} d^3x' \exp[-(k^2/4\lambda^2)(\mathbf{x}-\mathbf{x}')^2]\, \mathbf{v}(\mathbf{x}', t), \tag{23}$$

т. е. $\mathbf{V}$ — скорость, сглаженная по объему размера, много большего k^{-1}. Рассмотрим вклад в интегралы (21), (22) от области малых $|\boldsymbol{q}|$, $|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}|$. Благодаря наличию множителя $k_j k_l$ вклад в интеграл (22) от области малых $|\boldsymbol{q}|$, $|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}|$ пропорционален градиенту крупномасштабной компоненты скорости $\mathbf{V}$ (23), поэтому мал по параметру λ^{-1}. Пропорционален градиенту $\mathbf{V}$ также вклад в интеграл (21) от области малых $|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}|$. Вклад в интеграл (21) от области $|\boldsymbol{q}| \ll |\boldsymbol{k}|$ имеет порядок величины скорости $\mathbf{V}$ и поэтому велик. Как отмечено в работе [2], этот вклад описывает чистый перенос пульсаций масштаба k^{-1} пульсациями бо́льших масштабов.

Переход к представлению взаимодействия для компонент Фурье поля скорости может быть описан с помощью преобразования

$$v_i(\mathbf{k}, t) = T\exp\left[-ik_j \int\limits_{t_0}^{t} H_j(\tau)\, d\tau\right] \tilde{v}_i(\mathbf{k}, t), \tag{24}$$

где

$$H_j(\tau) = \int d^3\varkappa V_j^{(k)}(\varkappa, \tau) \exp(-\varkappa\partial/\partial\mathbf{k}). \tag{25}$$

Чтобы убедиться в этом, необходимо продублировать выкладки, которые привели к (3), для уравнения переноса (1) в представлении Фурье. Покажем, что уравнение для поля $\tilde{\mathbf{v}}$, определяемого равенством (24), не содержит взаимодействий, связанных со взаимным переносом вихрей, масштаб которых отличается больше чем в λ раз. Поскольку пространственный градиент крупномасштабной компоненты $\mathbf{V}$ мал, в низшем приближении по λ^{-1} оператор $\exp(-\varkappa\partial/\partial\mathbf{k})$ в (25) можно заменить на единицу. Тогда преобразование (24) приобретает вид

$$v_i(\mathbf{k},t)=\exp\left[-ik_j\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\int d^3\varkappa V_j^k(\varkappa,\tau)\right]\tilde{v}_i(\mathbf{k},t). \tag{26}$$

В этом приближении поле $\tilde{\mathbf{v}}$ удовлетворяет уравнению несжимаемости

$$\mathbf{k}\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},t)=0. \tag{27}$$

Подставляя (26) в (21), имеем

$$(\partial/\partial t+\nu k^2)\tilde{v}_i(\mathbf{k},t)=-ik_j\int d^3q\,[1-\exp(-\lambda^2q^2/k^2)]\times \tag{28}$$
$$\times\tilde{v}_j(\mathbf{q},t)\tilde{v}_i(\mathbf{k}-\mathbf{q},t)\exp\left\{i\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\int d^3\varkappa\left[\mathbf{q}\left(\mathbf{V}^{|\mathbf{q}|}(\varkappa,\tau)-\mathbf{V}^{|\mathbf{k}-\mathbf{q}|}(\varkappa,\tau)\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\mathbf{k}\left(\mathbf{V}^{|\mathbf{k}-\mathbf{q}|}(\varkappa,\tau)-\mathbf{V}^{|\mathbf{k}|}(\varkappa,\tau)\right)\right]\right\}+ik_i\tilde{p}(\mathbf{k},t).$$

Можно показать, что при конечных $|\mathbf{q}|$, $|\mathbf{k}-\mathbf{q}|$ (что обеспечивается быстрой сходимостью интеграла по d^3q в области малых $|\mathbf{q}|$, $|\mathbf{k}-\mathbf{q}|$) показатель экспоненты в (28) мал по параметру λ^{-1}. Поэтому в низшем приближении по λ^{-1} с учетом (27) для $\tilde{\mathbf{v}}$ получаем уравнение

(29)

$$(\partial/\partial t+\nu k^2)v_i(\mathbf{k},t)=-ik_j\Delta_{il}\int d^3q\left[1-\exp\left(-\frac{\lambda^2q^2}{k^2}\right)\right]v_j(\mathbf{q},t)v_l(\mathbf{k}-\mathbf{q},t),$$

где

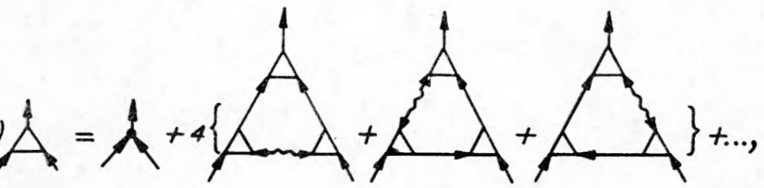
$$\Delta_{il}=\delta_{il}-k_ik_l/k^2.$$

Учет следующих членов разложения по λ^{-1} приводит к появлению в уравнении для $\tilde{\mathbf{v}}$ нелинейностей более высокого порядка. Интеграл в правой части (29) сходится в области $q\ll k$, поэтому переносные взаимодействия в этом уравнении отсутствуют.

Уравнение, аналогичное (29), использовалось в работе [2] для построения улучшенного приближения прямых взаимодействий. Это уравнение можно также использовать для построения полной системы диаграммных уравнений для статистических характеристик поля $\tilde{\mathbf{v}}$. В работах [8, 9] для этой цели использовалось непосредственно уравнение Навье — Стокса (21) со случайной внешней силой. Предположение о подобии статистических характеристик эйлерова поля $\mathbf{v}$ не приводило к противоречиям, если затравочная вершина эффективно сокращалась в области, где существенно различны аргументы входящих в нее линий, т. е. когда переносные взаимодействия играют незначительную роль. Переносными взаимодействиями можно, например, пренебречь в случае, когда малые вихри рождаются и живут между большими вихрями. Если это предположение не выполняется, то переносные взаимодействия приведут к расходимости интегралов в области малых волновых чисел. В этом случае для исследования свойств подобия необходимо использовать уравнение (29) для полулагранжевой скорости $\tilde{\mathbf{v}}$. Затравочная вершина уравнения (29) быстро убывает вне области, где ее аргументы одного порядка величины, поэтому трудности, связанные с расходимостью, отсутствуют.

Задача приобретает вид, сходный с задачами теории фазовых переходов, сформулированными в [10].

Опишем лишь общую схему рассуждений, чтобы показать, каким образом свойства подобия проявляются в точных уравнениях теории. Диаграммная техника для уравнения (29) и ее анализ аналогичны рассмотренным в [8]. Добавим в правую часть уравнения (29) случайную силу, спектр которой отличен от нуля лишь в области малых волновых чисел, и перейдем в представление Фурье но времени. Подставляя в среднее поле $\tilde{\mathbf{v}}$ в виде функционального разложения по внешней силе и производя частичное суммирование получаемых рядов, получим полную систему диаграммных уравнений для спектрального тензора F, тензора Грина G и вершинных функций. Рассмотрим, например, уравнение для вершинной функции Г [8, 9]

(30) 

где введены следующие обозначения:

$$\triangle \Leftrightarrow \Gamma_{ijl}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{q}, \Omega),$$

$$\leftarrow \Leftrightarrow G_{ij}(\mathbf{k}, \omega),$$

$$\leftrightsquigarrow \Leftrightarrow F_{ij}(\mathbf{k}, \omega),$$

$$\bullet \Leftrightarrow P_{ijl}(\mathbf{k}) = -(i/2)(k_j\Delta_{il} + k_l\Delta_{ij}).$$

Предположим, что тензоры F, G, Г являются однородными функциями своих аргументов, степеней δ, β, $-\gamma$

$$F_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = k^{-\delta} F'_{ij}\left(\frac{\omega}{k^{\alpha}}\right), \quad G_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = k^{-\beta} G'_{ij}\left(\frac{\omega}{k^{\alpha}}\right), \tag{31}$$

$$\Gamma_{ijl}(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{q}, \Omega) = k^{\gamma} \Gamma'_{ijl}\left(\frac{\omega}{k^{\alpha}}, \frac{\Omega}{q^{\alpha}}, \frac{\mathbf{q}}{k}\right).$$

Эффективным параметром разложения ряда (30) служит величина $\mu \sim FG^2\Gamma^2k^3\omega$. Подставляя (31) в произвольный член ряда (30) и предполагая, что основной вклад в интегралы дает область, где переменные интегрирования имеют порядок величины аргументов внешних линий, получаем, что все члены ряда имеют ту же степень однородности, что и левая часть, если $\mu \sim \mathrm{const} \sim 1$. Это условие дает следующую связь между индексами α, β, γ, δ:

$$2\gamma - 2\beta - \delta + \alpha + 3 = 0.$$

Соотношения работы [1] выполняются при $\gamma = 1$, $\alpha = \beta = 2/3$, $\delta = 13/3$. Случай $\gamma \neq 1$ согласуется с уравнением (30), если, например, полная вершина велика по сравнению с затравочной. Аналогичный анализ может быть проведен и в остальных уравнениях системы.

Обсудим несколько подробнее роль, которую играет величина параметра λ. При $\lambda = \infty$ $V^{(k)}(\varkappa, t) = 0$ и поле $\tilde{\mathbf{v}}$ совпадает с эйлеровой скоростью $\mathbf{v}$. При $\lambda = 0$ $\tilde{\mathbf{v}}$ есть лагранжева скорость. Область применимости уравнения (29) в этом случае отсутствует. Нелинейностями высшего порядка в уравнении для $\tilde{\mathbf{v}}$ можно пренебречь, если λ достаточно велико. Предположим, что это можно сделать при $\lambda > \lambda_0$, где $\lambda_0 \gg 1$ — некоторое число. При $\lambda > \lambda_0$ в диаграммных уравнениях затравочная вершина зависит от величины λ. Решения уравнений — тензоры $F(\lambda)$, $G(\lambda)$, $\Gamma(\lambda)$ — могут быть в принципе получены из их значений при $\lambda = \lambda_0$ усреднением по всем переносам пульсациями из интервала масштабов $(\lambda_0 k^{-1}, \lambda k^{-1})$. Тензоры, полученные после такого усреднения, должны удовлетворять равенству $\mu_\lambda = F(\lambda) G^2(\lambda) \Gamma^2(\lambda) k^3 w(\lambda) \sim 1$, так как соображения, которые привели к выводу о равенстве $\mu \sim 1$, остаются в силе. Непосредственное вычисление, проведенное в [11] для случая $\lambda = \infty$, подтверждает этот вывод.

Таким образом, статистические характеристики полулагранжевой скорости определяются в рамках универсальной задачи о сильном взаимодействии. Моменты и функции отклика эйлеровой скорости могут быть получены с помощью формул (17), (19), где функции G_n, $\tilde{G}_n$ являются тензорами ранга n.

Поступила 19 V 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Колмогоров А. Н.** Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса.— «Докл. АН СССР», 1941, т. 30, вып. 4.
2. **Кадомцев Б. Б.** Турбулентность плазмы.— В кн.: Вопросы физики плазмы. Вып. 4. М., Атомиздат, 1964.
3. **Kraichnan R. N.** Kolmogorov's hypothesis and Eulerian turbulence theory. — «Phys. Fluids», 1964, vol. 7, N 11.
4. **Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.** Введение в теорию квантованных полей М. «Наука», 1973.
5. **Kraichnan R. N.** Lagrangian-history closure approximation for turbulences.—«Phys. Fluids», 1965, vol. 8, N 4.
6. **Lumley J. L.** The mathematical nature of the problem of relating Lagrangian and Eulerian statistical functions in turbulence.— In: Mecanique de la turbulence (Coll. Intern. du CNRS a Marseille). Paris, 1962.
7. **Монин А. С., Яглом А. М.** Статистическая гидромеханика. Ч. 1, 2. М., «Наука», 1965, 1967.
8. **Кузьмин Г. А., Паташинский А. З.** Гипотеза подобия и гидродинамическое описание турбулентности.— ЖЭТФ, 1972, т. 62, вып. 3.
9. **Wyld H. W.** Formulation of the theory of turbulence in an incompressible fluid.— «Annals of Physics», 1961, vol. 14, N 2.
10. **Паташинский А. З., Покровский В. Л.** Флуктуационная теория фазовых переходов. М., «Наука», 1975.
11. **Кузьмин Г. А.** Масштабное подобие и гидродинамическое описание турбулентности. Дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, ИТФ СО АН СССР, 1974.