РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗРАБОТКИ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

2019 № 1

УДК 539.3

МАКСИМАЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ ВЫРАБОТКИ В ГОРНОМ МАССИВЕ, ОСЛАБЛЕННОМ ТРЕЩИНОЙ

В. М. Мирсалимов[1,2]

[1]*Азербайджанский технический университет,*
E-mail: mir-vagif@mail.ru, *просп. Г. Джавида, 25, AZ1073, г. Баку, Азербайджан*
[2]*Институт математики и механики НАН Азербайджана,*
ул. Б. Вахабзаде, 9, г. Баку, Азербайджан

На основе принципа равнопрочности и минимизации коэффициентов интенсивности напряжений проведен теоретический анализ по определению формы выработки в массиве, обеспечивающей максимальную прочность. Предложен критерий и метод решения задачи по предотвращению разрушения горного массива с выработкой при действии тектонических и гравитационных усилий. Построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая обеспечить минимизацию коэффициентов интенсивности напряжений в зависимости от механических и геометрических характеристик горного массива.

Горный массив, выработка максимальной прочности, трещина, коэффициенты интенсивности напряжений, минимизация напряженного состояния

DOI: 10.15372/FTPRPI20190102

Для горного дела представляет значительный интерес задача об отыскании формы выработки в горном массиве, обеспечивающей максимальную прочность. Надежность и безопасность работ в горном деле в значительной мере зависят от формы выработки в массиве. Задачи отыскания оптимальных форм выработок (отверстий) сводятся к решению вариационных задач с неизвестными границами. В некоторых случаях для определения формы выработок, на которых технологически неизбежная концентрация была бы сведена к минимуму по сравнению со всеми другими возможными формами, приходим к задаче теории упругости с неизвестной границей. Задачи теории упругости и пластичности с неизвестными границами рассмотрены в [1 – 19]. В [20] приведен обзор работ по определению равнопрочных отверстий в бездефектных конструкциях. На стадии проектирования конструкций и сооружений необходимо учитывать случаи, когда в отдельных элементах сооружений имеются трещины.

В настоящей работе, в отличие от [1 – 20], учитывается наличие прямолинейной трещины в окрестности выработки в горном массиве. Прочностью горного массива с выработкой при проектировании можно обоснованно управлять конструкторско-технологическими методами, в частности геометрией формы выработки. Однако до сих пор неизвестны решения задач геомеханики по построению такой геометрии поверхности выработки в горном массиве, чтобы созданное ею напряженное поле препятствовало разрушению горного массива с выработкой. Изменяя форму выработки в горном массиве, можно снизить уровень напряженного состояния.

Цель настоящей работы — разработка расчетной модели горного массива с выработкой и трещиной, позволяющей рассчитать форму выработки с максимальной прочностью.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим горный массив, ослабленный выработкой, предполагая, что горная порода — однородное и изотропное тело. Выработка расположена достаточно далеко от поверхности земли. Начало системы координат совместим с геометрическим центром выработки. В окрестности выработки горная порода ослаблена произвольно размещенной прямолинейной трещиной длиной $2l_1$ (рис. 1).

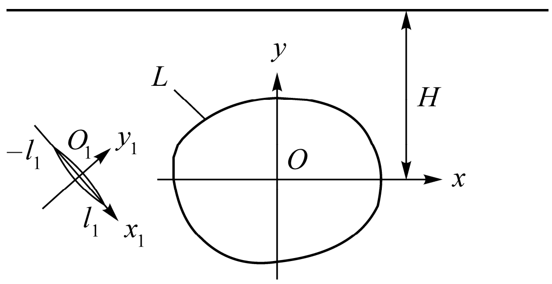

Рис. 1. Расчетная схема задачи о форме выработки максимальной прочности

Пусть тяжелое упругое полупространство $y < H$ ослаблено одним туннелем, представляющим собой цилиндр с осью, параллельной поверхности полупространства. Рассмотрим задачу об отыскании формы выработки, обеспечивающей максимальную прочность. Данная задача считается плоской. Напряженное состояние горного массива формируется от действия тектонических и гравитационных усилий. Тектонические усилия принимаем постоянными по глубине массива. Распределение напряжений в горном массиве от гравитационных усилий принимаем согласно гипотезе А. Н. Динника:

$$\sigma_x = -\lambda\rho_* g(H-y), \quad \sigma_y = -\rho_* g(H-y), \quad \tau_{xy} = 0,$$

где σ_x, σ_y — горизонтальные и вертикальные нормальные напряжения; τ_{xy} — касательные напряжения; $\lambda = \nu/(1-\nu)$ — коэффициент бокового распора породы, ν — коэффициент Пуассона; ρ_* — средняя плотность горного массива; g — ускорение силы тяжести; $H-y$ — глубина рассматриваемой точки массива от поверхности земли.

Берега прямолинейной трещины свободны от внешних нагрузок. В центре трещины разместим начало локальной системы координат $x_1O_1y_1$, ось x_1 которой совпадает с линией трещины и составляет угол α_1 с осью x. К неизвестной пока поверхности выработки приложено нормальное давление $\sigma_n = -p$ $(p > 0)$ и равная нулю касательная нагрузка. Считается, что вдали от выработки все упругое полупространство сдеформировано напряжениями (имитирующими тектонические усилия)

$$\sigma_x = \sigma_x^\infty, \quad \sigma_y = \sigma_y^\infty, \quad \tau_{xy} = 0,$$

а поверхность полупространства $y = H$ подвержена постоянной нормальной нагрузке $\sigma_y = \sigma_y^\infty$ и равной нулю касательной.

Граничные условия в данной задаче имеют вид

$$\sigma_n - i\tau_{nt} = -p \text{ на } r = \rho(\theta), \qquad (1)$$

$\sigma_{y_1} = 0$, $\tau_{x_1y_1} = 0$ на берегах трещины.

Требуется определить форму отверстия (функцию $\rho(\theta)$) в горном массиве таким образом, чтобы созданное ею напряженное поле препятствовало росту трещины. Для определения функции $\rho(\theta)$ формы выработки в горном массиве постановку задачи необходимо дополнить критерием выбора формы выработки. Очевидно, что чем ниже уровень напряженности в массиве, тем выше ее несущая способность. Согласно теории квазихрупкого разрушения Ирвина – Орована, параметром, характеризующим напряженное состояние в окрестности вершин трещины, является коэффициент интенсивности напряжений. Следовательно, ответственным за разрушение материала массива можно считать коэффициент интенсивности напряжений в окрестности вершин трещины. Однако в тяжелом массиве не существует такого отверстия, чтобы тангенциальное нормальное напряжение σ_t, действующее на его контуре, было постоянным [21]. Иначе говоря, в тяжелом горном массиве не существует отверстия, которое не обладало бы концентрацией напряжений. Поэтому естественно допустить в ослабленном массиве лишь такую концентрацию напряжений, которая существовала бы и без выработки.

В качестве критерия выбора формы выработки примем условие

$$\sigma_t = \sigma + \gamma y \quad (\sigma = \text{const}, \ \gamma = \text{const}) \tag{2}$$

с дополнительными равенствами нулю коэффициентов интенсивности напряжений у всех вершин трещины:

$$K_{\mathrm{I}}^{l_1} = 0, \quad K_{\mathrm{II}}^{l_1} = 0, \quad K_{\mathrm{I}}^{-l_1} = 0, \quad K_{\mathrm{II}}^{-l_1} = 0. \tag{3}$$

Граничное условие (1) с дополнительными равенствами (2), (3) служат для определения искомого контура выработки, условно названного равнопрочным. Условия, накладываемые на σ и γ, определяются в процессе решения задачи.

МЕТОД РЕШЕНИЯ

Пусть в упругом изотропном горном массиве с выработкой имеется одна прямолинейная трещина длиной $2l_1$ (рис. 1). Принято, что выработка расположена достаточно далеко от поверхности полупространства, при этом граничные условия на контуре выработки и берегах трещины будем удовлетворять точно, а на границе полупространства приближенно, асимптотически.

Сравнение с решениями плоских задач теории упругости для отверстия вблизи границы тела [22] показывает, что для этого достаточно, чтобы глубина $H = 2R$, где R — характерный линейный размер выработки. Будем искать неизвестный заранее контур L выработки в горном массиве в классе контуров, близких к круговым. Для решения задачи используем приближенный метод, представляющий собой комбинацию методов возмущений и теории аналитических функций в каждом приближении.

Представим неизвестный контур L в виде

$$\rho(\theta) = R + \varepsilon H(\theta),$$

в котором функция $H(\theta)$ подлежит определению в процессе решения задачи. Здесь $\varepsilon = R^0 / R$ — малый параметр; R^0 — наибольшая высота неровности профиля контура L выработки от окружности $r = R$.

Не уменьшая общности поставленной задачи, считается, что искомая функция $H(\theta)$ может быть представлена в виде тригонометрического ряда Фурье

$$H(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k^* \cos k\theta + b_k^* \sin k\theta).$$

Искомые функции (напряжения, перемещения, коэффициенты интенсивности напряжений) ищутся в виде разложений по малому параметру ε:

$$\sigma_n = \sigma_n^{(0)} + \varepsilon\sigma_n^{(1)} + \ldots, \quad \tau_{nt} = \tau_{nt}^{(0)} + \varepsilon\tau_{nt}^{(1)} + \ldots,$$
$$\sigma_t = \sigma_t^{(0)} + \varepsilon\sigma_t^{(1)} + \ldots, \quad u = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \ldots,$$
$$v = v^{(0)} + \varepsilon v^{(1)} + \ldots, \quad K_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}}^{(0)} + \varepsilon K_{\mathrm{I}}^{(1)} + \ldots, \quad K_{\mathrm{II}} = K_{\mathrm{II}}^{(0)} + \varepsilon K_{\mathrm{II}}^{(1)} + \ldots,$$

в которых пренебрегаются для упрощения члены, содержащие ε в степени выше первой.

Каждое из приближений удовлетворяет системе дифференциальных уравнений плоской теории упругости. Значения компонент тензора напряжений при $r = \rho(\theta)$ получим, разлагая в ряд выражения для напряжений в окрестности $r = R$. Используя формулы [23] для компонент напряжений σ_n и τ_{nt}, граничные условия задачи на контуре $r = R$ и берегах трещины запишем в виде:

для нулевого приближения

$$\sigma_r^{(0)} = -p, \quad \tau_{r\theta}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{y_1}^{(0)} = 0, \quad \tau_{x_1 y_1}^{(0)} = 0 \text{ на берегах трещины;}$$

для первого приближения

$$\sigma_r^{(1)} = N, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = T, \quad \sigma_{y_1}^{(1)} = 0, \quad \tau_{x_1 y_1}^{(1)} = 0 \text{ на берегах трещины,}$$

где

$$N = 2\tau_{r\theta}^{(0)} \frac{dH(\theta)}{d\theta} - H(\theta)\frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = R, \quad T = (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)})\frac{1}{R}\frac{dH(\theta)}{d\theta} - H(\theta)\frac{\partial \tau_{r\theta}^{(0)}}{\partial r}. \tag{4}$$

Напряжения можно представить по формулам:

$$\sigma_r + \sigma_t = \sigma_x + \sigma_y = 4\operatorname{Re}\Phi(z) + \sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty + \frac{\rho_* g}{2i(1-\nu)}(z - \bar{z} - 2iH),$$
$$(\sigma_t - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta})e^{-2i\theta} = \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = \tag{5}$$
$$= [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] + \sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty + \frac{\rho_* g(1-2\nu)}{2i(1-\nu)}(z - \bar{z} - 2iH),$$

здесь $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ — комплексные потенциалы Колосова – Мусхелишвили. При $\Phi(z) = 0$, $\Psi(z) = 0$ формулы (5) дают напряжения в нетронутом горном массиве $y < H$.

С помощью (5) граничные условия задачи в нулевом приближении запишутся в виде

$$\Phi_0(z) + \overline{\Phi_0(z)} - e^{2i\theta}\left[\bar{z}\Phi_0'(z) + \Psi_0(z)\right] = f_0 - p \text{ при } z = \mathrm{Re}^{i\theta},$$
$$\Phi_0(x_1) + \overline{\Phi_0(x_1)} + x_1\overline{\Phi_0'(x_1)} + \overline{\Psi_0(x_1)} = F_0(x_1) \text{ на берегах трещины,} \tag{6}$$

где

$$2f_0 = \sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty + \frac{\rho_* g}{2i(1-\nu)}(z - \bar{z} - 2iH) - e^{2i\theta}\left[\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty + \frac{\rho_* g(1-2\nu)}{2i(1-\nu)}(z - \bar{z} - 2iH)\right],$$
$$F_0(x_1) = \sigma_y^\infty + 2\rho_* g(x_1 \sin\alpha_1 + y_1^0 - H),$$

$z_1^0 = x_1^0 + iy_1^0$ — координаты точки O_1 относительно системы координат xOy; x_1 — аффикс точек трещины в нулевом приближении; $\Phi_0(z)$, $\Psi_0(z)$ — комплексные потенциалы в нулевом приближении.

Комплексные потенциалы $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ ищем в виде

$$\Phi_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^0 z^{-k}+\frac{1}{2\pi}\int_{-l_1}^{l_1}\frac{g_1^0(t)dt}{t-z_1}+$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-l_1}^{l_1}\left\{\left(-\frac{1}{z}-\frac{\overline{T}_1}{1-z\overline{T}_1}\right)e^{i\alpha_1}g_1^0(t)+\frac{1-T_1\overline{T}_1}{\overline{T}_1(1-z\overline{T}_1)^2}e^{-i\alpha_1}\overline{g_1^0(t)}\right\}dt,$$

$$\Psi_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k^0 z^{-k}+\frac{1}{2\pi}e^{-2i\alpha_1}\int_{-l_1}^{l_1}\left[\frac{\overline{g_1^0(t)}}{t-z_1}-\frac{\overline{T}_1e^{i\alpha_1}}{(t-z_1)^2}g_1^0(t)\right]dt+ \tag{7}$$

$$+\left[\frac{1}{z\overline{T}_1}+\frac{2(1-e^{-i\alpha_1})}{z^2\overline{T}_1^2}-\frac{z+T_1}{z(1-z\overline{T}_1)^2}-\frac{2\overline{T}_1(ze^{i\alpha_1}-T_1)}{(1-\overline{T}_1z)^3}\right]e^{-i\alpha_1}g_1^0(t)\Bigg\}dt,$$

где $T_1=te^{i\alpha_1}+z_1^0$; $z_1=e^{-i\alpha_1}(z-z_1^0)$; $g_1^0(x_1)$ — искомая функция, характеризующая раскрытие берегов трещины:

$$g_1^0(x_1)=\frac{2\mu}{i(1+\kappa)}\frac{d}{dx_1}\left[u_1^{0+}(x_1,0)-u_1^{0-}(x_1,0)+i(v_1^{0+}(x_1,0)-v_1^{0-}(x_1,0))\right],$$

$$a_0^0=\frac{1}{2}(\sigma_x^\infty+\sigma_y^\infty)-p-\frac{\rho_* gH}{2(1-\nu)},\quad b_0^0=\frac{\rho_* gH(1-2\nu)}{2(1-\nu)}-\frac{1}{2}(\sigma_y^\infty-\sigma_x^\infty),$$

$$a_2^0=b_0^0+\overline{C}_2R^2,\quad a_1^0=\frac{\overline{C}_1R}{1+\kappa},\quad b_1^0=-\frac{kC_1R}{1+\kappa},$$

$$a_n^0=C_nR^n\quad(n\ge 3),\quad b_n^0=(n-1)R^2a_{n-2}^0-R^nC_{-n+2}\quad(n\ge 3),$$

$$C_1=-\frac{i\rho_* gR}{2},\quad C_{-1}=-\frac{\rho_* gR}{4i(1-\nu)},\quad C_2=\frac{\rho_* gH(1-2\nu)}{2(1-\nu)}-\frac{1}{2}(\sigma_y^\infty-\sigma_x^\infty),$$

$$C_0=\frac{1}{2}(\sigma_x^\infty+\sigma_y^\infty)-p-\frac{\rho_* gH}{2(1-\nu)},\quad C_3=-\frac{\rho_* gR(1-2\nu)}{4i(1-\nu)},$$

$$C_{-n}=0\quad(n\ge 2),\quad C_n=0\quad(n>3),$$

μ — модуль сдвига материала горной породы; $\kappa=3-4\nu$.

Удовлетворяя функциями (7) граничному условию (6) на берегах трещины, после некоторых преобразований приходим к сингулярному интегральному уравнению относительно неизвестной функции $g_1^0(x_1)$:

$$\int_{-l_1}^{l_1}\left[R_{11}(t,x_1)g_1^0(t)+S_{11}(t,x_1)\overline{g_1^0(t)}\right]dt=\pi F_0^0(x_1),\quad |x_1|\le l_1, \tag{8}$$

где

$$F_0^0(x_1)=-\left[\Phi_1^{(0)}(x_1)+\overline{\Phi_1^{(0)}(x_1)}+x_1\overline{\Phi_1^{(0)'}(x_1)}+\overline{\Psi_1^{(0)}(x_1)}\right]+F_0(x_1),$$

$$\Phi_1^{(0)}(x_1)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^0x_1^{-k},\quad \Psi_1^{(0)}(x_1)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k^0x_1^{-k},$$

x_1, t, z_1^0 и l_1 — безразмерные величины, отнесенные к R, R_{11} и S_{11}, определяются по известным формулам в [24].

К сингулярному интегральному уравнению (8) необходимо добавить равенство

$$\int_{-l_1}^{l_1} g_1^0(t)\,dt = 0\,, \tag{9}$$

обеспечивающее однозначность перемещений при обходе контура трещины.

Сингулярное интегральное уравнение (8) при дополнительном условии (9) сводится [24–26] к системе M алгебраических уравнений относительно приближенных $g_1^0(t_m)$ $(k = 1, 2, \ldots M)$ искомой функции в узловых точках:

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} l_1\left[g_1^0(t_m)R_{11}(l_1t_m, l_1x_r) + \overline{g_1^0(t_m)}S_{11}(l_1t_m, l_1x_r)\right] = F_0^0(x_r), \quad \sum_{m=1}^{M} g_1^0(t_m) = 0\,,$$

где $t_m = \cos[(2m-1)/2M]$ $(m = 1, 2,\ldots M)$, $x_r = \cos(\pi r/M)$ $(r = 1, 2,\ldots M-1)$.

Для коэффициентов интенсивности напряжений в нулевом приближении имеем:

для окрестности вершины трещины при $x_1 = l_1$

$$K_{\mathrm{I}}^{(0)} - iK_{\mathrm{II}}^{(0)} = \sqrt{\pi l_1}\sum_{m=1}^{M}(-1)^m g_1^0(t_m)\,\mathrm{ctg}\,\frac{2m-1}{4M}\pi\,,$$

для вершины трещины $x_1 = -l_1$

$$K_{\mathrm{I}}^{(0)} - iK_{\mathrm{II}}^{(0)} = \sqrt{\pi l_1}\sum_{m=1}^{M}(-1)^{m+M} g_1^0(t_m)\,\mathrm{tg}\,\frac{2m-1}{4M}\pi\,.$$

По формулам (5) и (7) находятся компоненты напряжений в горном массиве в нулевом приближении. Зная напряженное состояние в нулевом приближении, получим формально функции N и T согласно (4).

Переходим к решению задачи в первом приближении. Граничные условия задачи первого приближения запишутся в виде

$$\begin{gathered}\Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} - e^{2i\theta}\left[\overline{z}\Phi_1'(z) + \Psi_1(z)\right] = N - iT \text{ при } z = \mathrm{Re}^{i\theta}, \\ \Phi_1(x_1) + \overline{\Phi_1(x_1)} + x_1\overline{\Phi_1'(x_1)} + \overline{\Psi_1(x_1)} = 0 \text{ на берегах трещины.}\end{gathered} \tag{10}$$

Решение краевой задачи (10) аналогично нулевому приближению ищем в виде

$$\Phi_1(z) = \Phi_0^{(1)}(z) + \Phi_1^{(1)}(z), \quad \Psi_1(z) = \Psi_0^{(1)}(z) + \Psi_1^{(1)}(z)\,, \tag{11}$$

где комплексные потенциалы $\Phi_0^{(1)}(z)$ и $\Psi_0^{(1)}(z)$ определяются формулами, аналогичными (7), в которых следует $g_1^0(t)$ заменить на $g_1^1(t)$, а аналитические функции $\Phi_0^{(1)}(z)$ и $\Psi_0^{(1)}(z)$ ищутся в виде степенных рядов:

$$\Phi_1^{(1)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}, \quad \Psi_1^{(1)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k}\,. \tag{12}$$

Коэффициенты a_k и b_k находятся по формулам

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 0, \quad a_1 = \frac{\overline{A}_1 R}{1+\kappa}, \quad b_1 = -\frac{\kappa A_1 R}{1+\kappa},$$

$$a_n = \overline{A}_n R^n \ (n \geq 2), \quad b_2 = -A_0 R^2,$$

$$b_n = (n-1)R^2 a_{n-2} - R^n A_{-n+2} \ (n \geq 3), \quad N - iT = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{ik\theta}.$$

Удовлетворяя функциями (11), (12) краевым условиям на берегах трещины, после преобразований получим сингулярное интегральное уравнение относительно неизвестной функции $g_1^1(x_1)$:

$$\int_{-l_1}^{l_1}\left[R_{11}(t,x_1)g_1^1(t)+S_{11}(t,x_1)\overline{g_1^1(t)}\right]dt=\pi F_1(x_1),\quad |x_1|\le l_1, \tag{13}$$

где $F_1(x_1)=-\left[\Phi_1^{(1)}(x_1)+\overline{\Phi_1^{(1)}(x_1)}+x_1\overline{\Phi_1^{(1)'}(x_1)}+\overline{\Psi_1^{(1)}(x_1)}\right]$, x_1, t_1, z_1^0 и l_1 — безразмерные величины, отнесенные к R.

К интегральному уравнению (13) необходимо добавить дополнительное условие

$$\int_{-l_1}^{l_1} g_1^1(t)dt=0, \tag{14}$$

обеспечивающее однозначность перемещений при обходе контура трещины в первом приближении.

Сингулярное интегральное уравнение (13) при условии (14) аналогично нулевому приближению сводится [24–26] к системе M линейных алгебраических уравнений относительно приближенных значений $g_1^1(t_m)$ $(m=1,2,\ldots M)$ искомой функции в узловых точках:

$$\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M} l_1\left[g_1^1(t_m)R_{11}(l_1t_m,l_1x_r)+\overline{g_1^1(t_m)}S_{11}(l_1t_m,l_1x_r)\right]=F_1(x_r),\quad \sum_{m=1}^{M} g_1^1(t_m)=0. \tag{15}$$

Для коэффициентов интенсивности напряжений в первом приближении имеем:

для вершины трещины $x_1=l_1$

$$K_{\mathrm{I}}^{(1)}-iK_{\mathrm{II}}^{(1)}=\sqrt{\pi l_1}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m g_1^1(t_m)\operatorname{ctg}\frac{2m-1}{4M}\pi,$$

для окрестности вершины трещины при $x_1=-l_1$

$$K_{\mathrm{I}}^{(1)}-iK_{\mathrm{II}}^{(1)}=\sqrt{\pi l_1}\sum_{m=1}^{M}(-1)^{m+M} g_1^1(t_m)\operatorname{tg}\frac{2m-1}{4M}\pi.$$

Для заданной функции $H(\theta)$ формы выработки полученные линейные алгебраические системы являются замкнутыми и позволяют исследовать напряженно-деформированное состояние горного массива с выработкой и найти коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности концов трещины.

Для построения недостающих уравнений, позволяющих вычислить искомые коэффициенты a_k^* и b_k^*, надо найти окружное нормальное напряжение σ_t на контуре выработки. Напряжение σ_t на контуре выработки определяем с помощью формул (5).

На основании полученного решения с точностью до величин первого порядка относительно малого параметра ε находим σ_t на контуре L $(r=\rho(\theta))$:

$$\sigma_t=\sigma_t^{(0)}(\theta)\Big|_{r=R}+\varepsilon\left[H(\theta)\frac{\partial\sigma_t^{(0)}}{\partial r}+\sigma_t^{(1)}(\theta)\right]\Bigg|_{r=R}.$$

Требуем выполнения дополнительных условий (2), (3). Минимизацию напряжений на контуре выработки проводим с использованием условия равнопрочности (2) и принципа наименьших квадратов.

Минимизации напряжений добьемся с помощью критерия

$$U = \sum_{i=1}^{n} \left[\sigma_t(\theta_i) - (\sigma + \gamma y_i) \right]^2 \to \min ,$$

где $y_i = R \sin \theta_i$.

Задача оптимизации состоит в том, чтобы получить такие значения неизвестных параметров a_k^*, b_k^* (параметры управления), которые будут обеспечивать величинам $\sigma_t(\theta_i)$ функции нормального тангенциального напряжения значения согласно условию (2) при выполнении дополнительных условий (3).

Функция U и коэффициенты интенсивности напряжений у вершин трещины зависят от искомых коэффициентов a_k^* и b_k^*. Поставленная задача оптимального проектирования формы выработки в горном массиве сводится к задаче на условный экстремум функции $U(a_k^*, b_k^*, \sigma, \gamma)$, когда коэффициенты a_k^* и b_k^* связаны с дополнительными условиями:

$$K_{\mathrm{I}}^{l_1} = 0, \quad K_{\mathrm{II}}^{l_1} = 0, \quad K_{\mathrm{I}}^{-l_1} = 0, \quad K_{\mathrm{II}}^{-l_1} = 0 . \tag{16}$$

Требуется найти минимальное значение функции $U(a_k^*, b_k^*, \sigma, \gamma)$, причем ее $2k+2$ аргументы не являются независимыми, а подчинены четырем добавочным условиям (16) $(2k+2 > 4)$.

Для решения задачи на условный экстремум используем метод неопределенных множителей Лагранжа. Введем четыре неопределенных множителей λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 и рассмотрим вспомогательную функцию

$$U_0 = U + \lambda_1 K_{\mathrm{I}}^{l_1} + \lambda_2 K_{\mathrm{II}}^{l_1} + \lambda_3 K_{\mathrm{I}}^{-l_1} + \lambda_4 K_{\mathrm{II}}^{-l_1} .$$

Для функции $U(a_k^*, b_k^*, \sigma, \gamma, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ запишем $2k+2$ необходимых условия экстремума:

$$\frac{\partial U_0}{\partial a_k^*} = 0, \quad \frac{\partial U_0}{\partial b_k^*} = 0 \quad (k = 1, 2, ..., m_1); \quad \frac{\partial U_0}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial U_0}{\partial \gamma} = 0. \tag{17}$$

Полученные $(2m+2)$ уравнения с четырьмя добавочными уравнениями (16) составляют систему $(2m_1 + 2 + 4)$ уравнений с $(2m_1 + 2 + 4)$ неизвестными a_k^*, b_k^*, $(k = 1, 2, ..., m_1)$, σ, γ, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. Добавляя эти $(2m_1 + 2 + 4)$ уравнения к полученным ранее алгебраическим системам, имеем замкнутую алгебраическую систему для нахождения всех неизвестных, в том числе коэффициентов a_k^*, b_k^* $(k = 1, 2, ..., m_1)$ и величин σ и γ.

Разобьем отрезок $[0, 2\pi]$ изменения переменной θ на n равных частей $\Delta\theta = 2\pi / n$. Так как функция $\sigma_t(\theta_i, a_k^*, b_k^*)$ и коэффициенты интенсивности напряжений у вершин трещины линейно зависят от неизвестных параметров a_k^*, b_k^*, то составление и решение систем (16), (17) упрощается. Систему уравнений (17) можно записать в виде нормальной системы.

Полученные алгебраические системы $(15)-(17)$ дают возможность исследовать напряженно-деформированное состояние горного массива, найти оптимальную форму выработки и оптимальные значения параметров σ и γ. Решая алгебраическую систему $(15)-(17)$ методом Гаусса с выбором главного элемента для разных механических характеристик горного массива, находим проектные параметры a_k^* и b_k^* формы выработки для различных сред горной породы. Меняя значения α_1 и z_1^0, можно исследовать разные случаи расположения трещин в горном массиве и оценить их влияние на равнопрочную форму выработки в горном массиве.

Численный расчет выполнен для случая, когда горный массив ослаблен трещиной $\alpha_1 = 45°$, $l_1 / R = 0.5$, $z_1^0 = 1.30\,\mathrm{Re}^{i\pi/8}$. Результаты расчетов коэффициентов a_k^* и b_k^* разложения функции $H(\theta)$ формы выработки для горного массива, материал которого имеет $E = 4.25 \cdot 10^4$ МПа (модуль упругости) и $\nu = 0.27$ (коэффициент Пуассона), приведены в таблице (коэффициенты даны в безразмерным виде).

Коэффициенты Фурье равнопрочной формы выработки в горном массиве для случая одной трещины

a_0^*/R	a_1^*/R	a_2^*/R	a_3^*/R	a_4^*/R	a_5^*/R	a_6^*/R	a_7^*/R	a_8^*/R	a_9^*/R
0.4701	0.4198	−0.3887	0.3524	0.3009	−0.2817	0.2096	0.1833	0.1075	0.0984
	b_1^*/R	b_2^*/R	b_3^*/R	b_4^*/R	b_5^*/R	b_6^*/R	b_7^*/R	b_8^*/R	b_9^*/R
	0.3877	0.3119	−0.2867	0.2188	0.1976	−0.1575	0.1364	0.0978	0.0632

После определения функций $g_1^0(x_1)$ и $g_1^1(x_1)$ с помощью их интегрирования в каждом приближении находятся нормальные и касательные составляющие раскрытия берегов трещины. Если трещина одним концом выходит на поверхность выработки, то равенства (9) и (14) в каждом приближении заменяются дополнительным условием, выражающим конечность напряжений у края трещины на контуре выработки.

Сравнение равнопрочных выработок, определенных на основании условий (2), (3) в горном массиве, с другими выработками показывает, что напряжение σ_t на них минимально по сравнению с максимальной величиной σ_t на любых других контурах выработок. Поэтому найденная форма выработки обладает свойством максимальной прочности по сравнению со всеми другими выработками.

ВЫВОДЫ

Предложен критерий и метод решения задачи по предотвращению разрушения горного массива, ослабленного выработкой и прямолинейной трещиной, при действии тектонических и гравитационных усилий. Построена замкнутая система алгебраических уравнений, позволяющая получить решение задачи оптимального проектирования выработки в горном массиве, ослабленном трещиной, в зависимости от механических и геометрических характеристик горного массива. Установлена связь между формой выработки и коэффициентами интенсивности напряжений, а также местоположением и размером трещины. Найденная форма выработки в горном массиве обеспечивает снижение концентрации напряжений на контуре выработки, минимизацию коэффициентов интенсивности напряжений и повышение несущей способности горного массива. Результаты рассмотренной теоретической работы открывают новые возможности оптимального проектирования выработок в горном массиве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Черепанов Г. П.** Обратная упругопластическая задача в условиях плоской деформации // Механика и машиностроение. — 1963. — № 2. — С. 57 – 60.
2. **Куршин Л. М., Оноприенко П. Н.** Определение форм двухсвязных сечений стержней максимальной крутильной жесткости // ПММ. — 1976. — Т. 40. — Вып. 6. — С. 1078 – 1084.
3. **Черепанов Г. П.** Обратная задача теории упругости // ПММ. — 1974. — Т. 38. — С. 963 – 979.
4. **Мирсалимов В. М.** Об оптимальной форме отверстия для перфорированной пластины при изгибе // ПМТФ. — 1974. — Т. 15. — № 6. — С. 133 – 136.

5. **Мирсалимов В. М.** Обратная задача теории упругости для анизотропной среды // ПМТФ. — 1975. — Т. 16. — № 4. — С. 190 – 193.
6. **Баничук Н. В.** Условия оптимальности в задаче отыскания форм отверстий в упругих телах // ПММ. — 1977. — Т. 41. — Вып. 5. — С. 920 – 925.
7. **Баничук Н. В.** Оптимизация форм упругих тел. — М.: Наука, 1980. — 256 с.
8. **Мирсалимов В. М.** Обратная двоякопериодическая задача термоупругости // Механика твердого тела. — 1977. — Т. 12. — № 4. — С. 147 – 154.
9. **Vigdergauz S. B.** Integral equations of the inverse problem of the theory of elasticity, J. Appl. Math. Mech., 1976, Vol. 40, No. 3. — P. 518 – 522.
10. **Wheeler L. T.** On the role of constant-stress surfaces in the problem of minimizing elastic stress concentration, Int. J. of Solids and Structures, 1976, Vol. 12, Issue 11. — P. 779 – 789.
11. **Vigdergauz S. B.** On a case of the inverse problem of two-dimensional theory of elasticity, J. Appl. Math. and Mech., 1977, Vol. 41, No. 5. — P. 902 – 908.
12. **Мирсалимов В. М.** Равнопрочная выработка в горном массиве // ФТПРПИ. — 1979. — Т. 15. — № 4. — С. 24 – 28.
13. **Wheeler L. T.** On optimum profiles for the minimization of elastic stress concentration, ZAMM, 1978, Vol. 58, No. 6. — P. T235 – T236.
14. **Wheeler L. T.** Stress minimum forms for elastic solids, ASME. Appl. Mech. Rev., 1992, Vol. 45. — P. 1 – 12.
15. **Cherepanov G. P.** Optimum shapes of elastic solids with infinite branches, J. Appl. Mech. ASME, 1995, Vol. 62, No. 2. — P. 419 – 422.
16. **Savruk M. P. and Kravets V. S.** Application of the method of singular integral equations to the determination of the contours of equistrong holes in plates, Materials Sci., 2002, Vol. 38, No. 1. — P. 34 – 46.
17. **Burchill M. and Heller M.** Optimal free-form shapes for holes in flat plates under uniaxial and biaxial loading, J. of Strain Analysis for Engineering Design, 2004, Vol. 39, No. 6. — P. 595 – 614.
18. **Мир-Салим-заде М. В.** Определение формы равнопрочного отверстия в изотропной среде, усиленной регулярной системой стрингеров // Материалы, технологии, инструменты. — 2007. — Т. 12. — № 4. — С. 10 – 14.
19. **Vigdergauz S.** Simply and doubly periodic arrangements of the equi-stress holes in a perforated elastic plane: The single-layer potential approach, Math. Mech. Solids, 2018, Vol. 23, No. 5. — P. 805 – 819.
20. **Cherepanov G. P.** Optimum shapes of elastic bodies: equistrong wings of aircrafts and equistrong underground tunnels, J. of Physical Mesomechanics, 2015, Vol. 18, No. 4. — P. 391 – 401.
21. **Черепанов Г. П.** Одна обратная задача теории упругости // Механика твердого тела. — 1966. — № 3. — С. 119 – 130.
22. **Шерман Д. И.** Упругая весомая полуплоскость, ослабленная отверстием эллиптической формы, достаточно близко расположенным от ее границы // Проблемы механики сплошной среды. — М.: Изд-во АН СССР, 1961. — С. 527 – 563.
23. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М.: Наука, 1966. — 707 с.
24. **Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.** Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. — Киев: Наук. думка, 1976. — 443 с.
25. **Мирсалимов В. М.** Разрушение упругих и упругопластических тел с трещинами. — Баку: Элм, 1984. — 124 с.
26. **Каландия А. И.** Математические методы двумерной упругости. — М.: Наука, 1973. — 304 с.

Поступила в редакцию 7/V 2018
После доработки 7/V 2018
Принята к публикации 10/X 2018