Проблемы логики и методологии науки

УДК 160.1

ИСТИННОСТЬ ГЕДЕЛЕВА ПРЕДЛОЖЕНИЯ: ВНУТРЕННИЙ И ВНЕШНИЙ ВОПРОСЫ*

В.В. Целищев

Статья посвящена экспликации понятия истинности геделева предложения в доказательстве первой теоремы Геделя о неполноте. Рассмотрено несколько классификаций в установлении истинности геделева предложения. Показано, что различие в трактовках этого вопроса, предлагаемых работающими математиками и философами математики, соответствует карнаповскому различению внутренних и внешних вопросов.

Ключевые слова: Гедель, истина, классификация

Три концепции истинности геделева предложения

Согласно первой теореме Геделя о неполноте, для любой достаточно сильной формальной системы можно построить предложение, одновременно истинное и недоказуемое в этой системе. Такое предложение равносильно диофантовой проблеме, и отсюда следует, что если подобная система достаточна для формализации арифметики, то можно говорить о наличии в арифметике неразрешимых теоретико-числовых проблем. Один из вопросов, который возникает в связи с этой теоремой, состоит в том, чту означает истинность геделева предложения. Дело в том, что ответ на этот вопрос влияет на вопрос о соотношении возможностей человеческого разума и компьютера, или же формальной системы. В частности, известная полемика между так называемыми ментали-

* Работа выпонена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда (проект №13-03-00073).

стами и механицистами обязана спорному утверждению, что истинность геделева утверждения схватывается человеческим умом, а не машиной и в этом смысле человек превосходит машину, т.е. компьютер. Этот тезис принадлежит менталистам, в число которых входят оксфордский философ Дж. Лукас, видный математик и физик Р. Пенроуз и, как выяснилось недавно из опубликованных посмертно рукописей, сам автор теоремы К. Гедель. Следует отметить, что если Лукас и Пенроуз говорили в основном о неалгоритмизуемости математического мышления, то Гедель поставил более широкий вопрос о существовании двух видов математики: объективной и субъективной. Фактически это уже вопрос, относящийся к сфере онтологии и эпистемологии математики, имеющий кардинальное значение для исследования проблемы сферы и границ человеческого разума.

В литературе о первой теореме Геделя очень часто вопрос об истинности геделева предложения считается наивным, поскольку эта истинность следует из самого способа конструирования предложения. Однако это не совсем верно, потому что математическая теорема Геделя (по крайней мере первоначально) была сформулирована в синтаксическом виде, где нет никакого упоминания о его истинности. Введение в оборот этого понятия требует привлечения некоторых соображений о природе формализации математических утверждений. Ведь несмотря на простоту вопроса о том, почему геделево предложение является истинным, ответ оказывается неоднозначным. Между тем он чрезвычайно важен для судьбы упомянутого выше спора менталистов и механицистов и, более общо, для вопроса о познаваемости математических истин. П. Раатикайнен упоминает о трех распространенных подходах при ответе на этот вопрос [1].

Первый подход связан как раз с «наивным» преставлением о том, что истинность геделева предложения усматривается человеком интуитивно, прежде всего исходя из способа построения предложения, поскольку «оно говорит о себе, что оно недоказуемо». Еще одно «простое» объяснение состоит в том, что Гедель показал недоказуемость этого предложения и по определению оно истинно точно в том случае, когда недоказуемо. Хотя такое объяснение и кажется правдоподобным, в нем на самом деле много лакун, и поэтому следует искать другое объяснение.

Такое представление ситуации предполагает, что построение предложения фактически параллельно аргументации, связанной с парадоксом «лжеца». Однако «наивность» подобного понимания обманчива, поскольку самореференция, используемая при доказательстве теоремы, тесно связана с эффектом кодирования, которое само по себе является достаточно сложной конструкцией.

Второй подход связан с представлением, что тезис об истинности геделева утверждения справедлив для стандартной модели натуральных чисел. Сторонник этой точки зрения М. Даммит полагает, что геделево предложение, построенное согласно известной процедуре, ложно для нестандартной модели. Такая постановка вопроса поднимает проблемы, связанные с адекватностью формальных систем арифметики в схватывании природы натуральных чисел и адекватностью математики вообще.

Наконец, согласно третьему подходу, постановка вопроса об истинности геделева предложения является осмысленной в терминах доказуемости этого предложения в более сильной системе. Этот подход существенно связан с идеей устранения неполноты системы добавлением геделева предложения к исходной формальной системе в качестве аксиомы. Поскольку в новой системе также можно построить новое геделево предложение, перманентная неполнота порождаемых систем приводит к двум важным вопросам. Во-первых, возможна ли трансфинитная иерархия таких систем? Если она возможна, тогда истинность геделевых предложений уже предполагается, поскольку в противном случае мы имели бы противоречивые системы. Во-вторых, именно возможность такого расширения имел в виду Гедель, когда говорил о незавершаемости математики, которую он считал важной для различения субъективной и объективной математики.

Следует заметить, что все три подхода в большей или меньшей степени апеллируют не только к математическим соображениям, но и к философским аспектам соотношения интуиции, математической реальности и формализмов. В этой связи возникает вопрос: является ли тут философская проблематика действительно существенной или же вполне достаточно чисто математической трактовки?

О том, что философия должна быть «учтена» при оценке математических результатов Геделя, свидетельствуют и сами математики. Видный математик и логик Г. Крайзель, один из немногих близких к Геделю людей, отмечает: «…Мнение самого Геделя о том, что было наиболее существенным фактором, определившим его первые успехи в решении задач… резко отличается от впечатления многих математических логиков, которые в течение более сорока лет искали в его работах зерна новаторских математических конструкций или неслыханно глубокие тонкости, однако результаты этих поисков были не вполне убедительны. А между тем сам Гедель, не забывая о непреходящем значении своих работ, постоянно подчеркивал… как мало потребовалось ему новых математических построений. Оказалось, что надо было только обратить внимание на некоторые достаточно общеизвестные (философские) различия. …Гедель видел в своих первых успехах реализацию следующей, часто забываемой, но плодотворной общей схемы. Внимательно рассматривая подходящие традиционные философские концепции и вопросы, анализируя их и, возможно, добавляя чуть-чуть точности, мы безболезненно приходим к нужным понятиям, правильным гипотезам и достаточно простым доказательствам. В терминологии Канта (А713) философия анализирует понятия, а математика их создает. Гедель искал соединения там, где Кант видел только различия. А именно, для одной и той же задачи иногда возможны два альтернативных решения: либо применить философский анализ и простую математику, либо использовать изощренные или тонкие построения» [2].

Если такова роль философии с точки зрения самого Геделя, имеет, видимо, смысл поиск и философских объяснений истинности геделева предложения. В попытке понять, каким «удельным весом» в этих объяснениях обладают математика и философия, целесообразно привести свидетельство о полярной оценке усилий Геделя разными исследователями: «…Мне кажется, – пишет Х. Патнэм, – что титул “величайшего логика после Аристотеля” принадлежит Курту Геделю… А знаменитый математик Дэвид Мамфорд (который позднее ушел в компьютерные науки) сказал мне: “А с моей точки зрения, Гедель не был математиком. Он был просто философом” [3].

Математика versus философия

В любом случае постановка проблемы о различии философских и математических объяснений истинности геделева предложения имеет смысл и определенные резоны. Здесь автономия математики в отношении философии провозглашается решительно, но с признанием того, что существуют и философские аспекты проблемы. Так, М. Пьяцца и Г. Пульчини, приводя перечень из нескольких взглядов на истинность геделева предложения (классический, автореферентный, теоретико-модельный, теоретико-доказательный), отмечают лишь то, что не стоит «ставить на одну доску» математические и философские аргументы: «Рассматривать [классический взгляд] означало бы придание смысла неполноте в терминах понятий, слишком философски скомпрометированных, чтобы обсуждать их на том же уровне, что и остальные взгляды» [4].

В интерпретациях первой теоремы Геделя о неполноте важно подчеркнуть условный характер представления о существовании неразрешимого предложения. В формальной системе F, включающей элементарную арифметику, при условии ее непротиворечивости можно сконструировать предложение $G(F)$ – геделево предложение, которое независимо от F, т.е. недоказуемо и неопровержимо в F. Таким образом, система F неполна. Точнее, неполнота системы F означает, что имеется некоторое предложение A в языке F, что ни A, ни A недоказуемы в F. Это понятие неполноты не предполагает никакого понятия истины для предложений системы F, а указывает лишь на последовательности символов, сформированных по определенным правилам, связанным с применением к последовательностям формальных правил вывода (доказательств в системе). Таким образом, неполнота подобного рода является чисто синтаксической концепцией. При такой постановке вопроса нет никакого упоминания об истинности $G(F)$, и тогда непонятно, откуда оно вообще берется.

Когда речь идет о философских интерпретациях первой теоремы Геделя о неполноте, прежде всего принимается во внимание платонизм Геделя в отношении природы математики. Сюда следует отнести проблему соотношения формальной системы и «математической реальности», а также проблему непосредственной интуиции объектов математики. В частности, один из ответов на вопрос об истинности геделева предложения состоит в том, что формальная система F «схватывает» определенную часть арифметики. Тогда при применении первой теоремы о неполноте к системе F мы всегда можем специфицировать по крайней мере подмножество предложений F, интерпретированных как утверждения арифметики, которые могут быть как истинными, так и ложными предложениями. Это как раз такие предложения, которые образуют арифметическую составляющую системы F. То есть мы можем говорить об истинности и ложности утверждений в арифметическом компоненте системы без предположения, что такой разговор распространяется на произвольные предложения системы. Именно в этом случае мы можем говорить, что применение первой теоремы о неполноте и в самом деле устанавливает, чту имеется для данной системы истинное арифметическое в ее языке, которое в ней недоказуемо [5]. Такое основание для разговора об истинности геделева предложения предполагает, что формальная система «схватывает» истинные утверждения арифметики. Это предположение представляет собой часть убеждения, что формальная система имеет «стандартную» интерпретацию, т.е. интерпретируется как система утверждений о натуральных числах. Самого по себе выделения «арифметической части» формальной теории недостаточно для решения вопроса о том, почему геделево предложение является истинным.

Элиминация истины

Следует оговориться, что до сих пор, рассуждая об истинности геделева предложения, мы имели в виду «обыденную» концепцию истины. Однако в какой степени такое употребление понятия адекватно тому, что имеют в виду математики? Действительно, что подразумевается, когда мы говорим, что арифметическое утверждение, неразрешимое, скажем, в арифметике Пеано, истинно? Будем полагать, что в некотором смысле пересекаясь с приведенной ранее классификацией Раатикайнена, существуют следующие три возможности. Можно считать, что неразрешимое утверждение доказуемо в другой теории. Далее, можно «видеть» истинность математического утверждения, не прибегая к формальному доказательству. И наконец, мы можем употреблять понятие истины в рамках некоторой метафизической теории, скажем, как соответствия утверждений некоторой математической реальности.

Многие работающие математики предпочли бы не вдаваться в философские спекуляции относительно природы понятия истины. Например, сказать, что истинное утверждение формы «диофантово уравнение $D(x_1, \ldots, x_n)=0$ не имеет решения» неразрешимо в арифметике Пеано, значит сделать чисто математическое утверждение, не принимая каких-либо философских доктрин относительно природы истины. Такой подход к понятию истины называется, как это ни прискорбно для противников философских тонкостей, дефляционной теорией истины, опять-таки философской теории истины. Конечно, можно считать, что дефляционная теория истины, о которой будем говорить ниже, является приближением к практике математического использования соответствующих концепций с минимумом метафизики.

Правда, в этом можно усмотреть некоторое упрощение, которое хорошо проявляется при рассмотрении вопроса об истинности аксиом. Т. Францен утверждает, что, скажем, «истинность аксиомы «для каждого n, $n+0=n$» в арифметике Пеано означает лишь то, что для каждого натурального числа n $n+0=n$. В этом случае мы *знаем*, что аксиома истинна. Почему и как мы это знаем: либо через постулирование, либо через размышление, либо посредством интуиции – все это несущественно для значения слова “истинно” в обычном его употреблении» [6]. Но такая постановка вопроса есть просто способ избежать ответа на вопрос, почему $G(F)$ истинно.

Более строго, в достаточно богатой формальной системе F доказуема теорема

$G(F)$ истинно, если F непротиворечива.

Важно понимать, что по отдельности ни одна часть этого условного утверждения не является доказуемой. Это означает, что понятие истинности геделева предложения тесно связано с утверждением о непротиворечивости системы. Таким образом, истинность предложения G уже неявно предполагается в условии непротиворечивости F. Если идет речь о том, что человеческий ум интуитивно «видит» истинность геделева предложения, то можно говорить об интуитивном «видении» непротиворечивости формальной системы. Надежность интуиции в этом случае не должна подвергаться сомнению, поскольку речь идет об истинности геделева предложения и, стало быть, самой теоремы. Но тогда не должна быть ошибочной интуиция и относительно непротиворечивости формальной системы.

Однако в истории оснований математики были ситуации, когда интуиция подводила. Таков хрестоматийный случай с системой Mathematical Logic У. Куайна, противоречивость которой была обнаружена Дж. Россером, и впоследствии устранена самим Куайном. Вполне возможно представить себе ситуацию, когда в системе Mathematical Logic Куайном конструировалось геделево предложение, и он интуитивно видел его истинность, хотя ввиду противоречивости системы предложение было просто ложным.

Тогда получается, что уверенность в истинности геделева предложения основывается на уверенности в непротиворечивости системы. Имея в виду психологические обстоятельства математического творчества, заметим, что такая уверенность есть просто акт веры, успех которой зависит от ряда обстоятельств в математической практике. Скажем, подавляющая часть исследователей полагают, что такая формальная система, как арифметика Пеано, непротиворечива. К аксиоматической теории множеств Цермело – Френкеля в этом отношении доверия гораздо меньше. Еще больше сомнений имеется в отношении утверждений о непротиворечивости таких теорий, как теория множеств Цермело – Френкеля, дополненная аксиомами о существовании некоторых больших кардинальных чисел. При работе с формальными системами в ход идут самые разные соображения: эвристические, прагматические, психологические, социологические. Именно такие соображения часто ложатся в основу веры в непротиворечивость систем, пока нет доказательства непротиворечивости системы. Если принять подобное представление, тогда истинность геделева предложения также является актом веры, обусловленной не в последнюю очередь эпистемологическими соображениями. Одним из таких соображений является связь теории истины с рядом понятий теории доказательства. Но тогда принятие той или иной теории истины должно влиять на наше понимание причин истинности геделева предложения. Это, в свою очередь, смещает акценты в полемике менталистов с механицистами.

Выбор концепции истины влияет также и на понимание концепции истины геделева предложения. Дело в том, что корреспондентная концепция истины характеризует содержательные отношения между объектами и языком, а когерентная концепция истины апеллирует к совместимости системы утверждений языка, предполагая глобальный характер отношений объектов и языка. В любом случае эти концепции истины не планировалось применять к таким искусственным конструкциям, как геделево предложение, которое как уже указано выше, связано с аппаратом кодирования. Следует ли при этом искать для такого предложения особое понятие истины, которое бы было неопровержимым для человеческого ума и объясняло необходимость признания геделева предложения истинным? Таковы соображения, апеллирующие к интуитивности истинности геделева предложения.

Истинность геделева предложения напрямую связана с понятиями стандартной модели и модели нестандартной. Теорема о неполноте утверждает, что геделево предложение G в арифметике Пеано является неразрешимым, т.е. его нельзя ни доказать, ни опровергнуть в ней. По теореме о неполноте, это означает, что предложение G ложно в некоторой модели арифметики Пеано. Однако G истинно в стандартной модели, и, следовательно, любая модель, в которой G ложно, должна быть нестандартной.

Универсальная квантификация и нумерические примеры

М. Даммит обращает внимание на важное обстоятельство, имеющее самое непосредственное отношение к вопросу об истинности геделевого предложения [7]. Структура геделева предложения имеет вид универсальной квантификации $\forall xAx$. Рассмотрим эту структуру в деталях.

Пусть имеется формальная система S в качестве стандартного языка первого порядка со стандартной интерпретацией ω. Предложение является истинным, если оно истинно в ω. Далее, принимается некоторый вариант геделевской нумерации, и для любой формулы φ символ φ* обозначает геделев номер этой формулы. Определяется отношение $\mathrm{Proof}_S = \{(m, n) \in \omega 2 : n = \varphi^*$ для некоторой формулы φ, и m есть геделев номер в доказательстве φ в $S\}$. Далее, определяется формула $\mathrm{Pr}_S(y) = (\exists x)\mathrm{Proof}_S(x, y)$.

Последняя формула имеет важное свойство: для любой формулы φ $\mathrm{Pr}_S(\varphi^*)$ истинно точно в том случае, когда φ доказуема в S. Далее, по диагональной лемме, можно выбрать предложение G, такое что

$$Q \vdash G \leftrightarrow \sim \mathrm{Pr}_S(G^*).$$

Именно Q является геделевым предложением в системе S. Система S обоснованна по определению, и, следовательно, G истинно точно в том случае, когда $\mathrm{Pr}_S(G^*)$ и, отсюда, также когда истинно $\mathrm{Proof}_S(x, G^*)$. Таким образом, три формулы – G, $\mathrm{Pr}_S(G^*)$, $\mathrm{Proof}_S(x, G^*)$ взаимно заменяемы. Для целей нашего исследования, т.е. для определения истинности геделева предложения, существенно, что поскольку G доказательно эквивалентно $\mathrm{Proof}_S(x, G^*)$, постольку при разговоре о нумерических примерах универсальной квантификации имеются в виду формулы $\mathrm{Proof}_S(n, G^*)$.

Если все результаты подстановки вместо переменной x конкретных цифр распознаются в качестве истин предложения $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, …, вполне естественным выглядит переход от этой последовательности к $\forall xAx$. Сам по себе такой переход в рамках формальной системы является тривиальным, и поэтому причины истинности геделева предложения следует искать в справедливости принципа, согласно которому все предложения $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, … истинны. Это предположение связано с различением понимания модели в стандартном математическом смысле как «истины в модели» и модели как некоторого рода «реальности», благодаря которой предложения $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, … могут быть определены как истинные.

Вот что по этому поводу говорит сам Даммит: «Некоторые философы… отрицают, что теорема Геделя имеет какое-то содержание помимо синтаксического, полагая, что нет никаких причин называть неразрешимое предложение *G* “истинным”. Но такое представление совершенно неправдоподобно. Ошибка… заключается в неправильном применении понятия модели. …Мы [часто] говорим о моделях в рамках математических теорий, в которых модели могут быть описаны. В случае теоремы Геделя… понятие модели есть нечто иное, что могло бы быть дано нам независимо от какого-либо описания: этакого рода интуитивная концепция, которую мы можем видеть в нашем уме, хотя и не можем при этом найти описание, которое определяло бы понятие однозначно» [8].

Дж. Серени отмечает интересную особенность аргументации Даммита. Последний, как уже было сказано выше, считает геделево предложение прежде всего предложением языка арифметики и намеренно забывает о его метаматематической интерпретации. Истинность геделева предложения как универсальной квантификации получается за счет истинности его нумерических примеров [9]. Другими словами, вопрос об истинности геделева предложения сводится к вопросу об истинности конкретных цифровых выражений. Поскольку истина является понятием эпистемическим, получается, что конкретные выражения имеют эпистемологический приоритет перед общим предложением. Эта стратегия Даммита связана с его антиреализмом и интуиционистскими взглядами.

Однако нельзя считать, что истинность или ложность *G* определяются напрямую тем, с какой моделью мы имеем дело – со стандартной или нестандартной. Потому что само деление на стандартные и нестандартные модели зависит от некоторого принципа, который не должен быть частью формализации интуитивного знания натуральных чисел. Но и распознавание истинности *G* также выходит за эти пределы. Кроме того, такой принцип не может обосновываться апелляцией к натуральным числам. Какого рода соображения могут быть положены в основу этого принципа? Такой принцип не входит в формальную систему, и он позволяет получать не истинность самого геделева предложения как универсальной квантификации, а истинность конкретных нумерических предложений. «Обсуждение данного факта в терминах моделей затемняет этот, в противном случае очевидный, факт, потому что в утверждении об истинности в некоторой модели всех предложений $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, … мы смазываем зазор между способностью каждой цифры n^* распознавать $A(n^*)$ как истинное и способностью распознавать, что для каждого $n^* A(n^*)$ истинно [10].

Условием истинности $\forall x A x$ является непротиворечивость системы. Как это условие реализуется в свете того факта, что упомянутый выше принцип, согласно которому $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$… являются истинными, выходит за рамки формализации? Но истинность всех этих предложений равносильна непротиворечивости системы, и опору на истинность конкретных предложений можно считать достаточно надежным аргументом при демонстрации истинности геделева предложения.

Семантический аспект

Однако есть одно обстоятельство, которое неявно содержится в объяснении Даммита. При расширении аксиоматической системы не приводит к противоречию ни добавление к ней утверждения неразрешимого предложения, ни добавление его отрицания. Хотя оба варианта равноправны, обычно предпочитают говорить об утверждении, а не об отрицании. В чем видится причина такого предпочтения? Утверждение геделева предложения как истинного связано с актом постижения этой истинности человеческим умом, в то время как для машины доступно лишь доказательство. Сама по себе формальная система, в которой сконструировано геделево предложение G, не может сказать нам, истинно ли G или нет. Но конструирование G с помощью диагонального метода позволяет осуществить «указание» на доказательство в системе и по этой причине выйти за пределы формальной системы. Значит, при постижении истинности геделева предложения мы находимся на более высоком уровне, чем формальная система, в которой сконструировано геделево предложение. Этот более высокий уровень и использование понятия указания говорят нам о том, что в рассмотрение вводятся семантические соображения, которые и являются основанием для утверждения об истинности геделева предложения. Другими словами, чисто синтаксическая структура в виде формальной системы должна быть дополнена семантическими соображениями. Это соображение представляет основу «семантического аргумента» Н. Теннанта [11].

Теннант уточняет позицию Даммита, выделяя «семантический аргумент» в качестве объяснения истинности геделева предложения. Он полагает, что семантические соображения присутствуют в позиции Даммита. Действительно, объяснение того, что геделево предложение истинно в силу истинности нумерических примеров универсальной квантификации, по Даммиту, апеллирует к «силе нашей ясной интуитивной концепции структуры модели». Примерно в том же духе высказывается и С. Клини: «Если мы предполагаем, что теоретико-числовая формальная система должна быть непротиворечивой, мы можем распознать, что G истинно, приняв во внимание структуру этой системы как целого, хотя мы не можем распознать истинность G использованием только принципов вывода, формализованных в этой системе…» [12].

Интуитивное постижение целостной структуры модели является главным фактором того, что формальная система обоснована, а именно, того, что все доказуемые в системе утверждения истинны. Такая система является непротиворечивой, и сама апелляция к целостной структуре равносильна предположению о непротиворечивости системы. Этот аспект установления истинности геделева предложения сближает позицию Даммита и позицию менталистов. «Мистическая» способность человеческого ума «видеть» истинность геделева предложения, о которой говорят Дж. Лукас и Р. Пенроуз, представляет собой результат нормативной активности рационального мышления, а именно, желание иметь систему непротиворечивых утверждений с математической определенностью. В этом смысле упомянутая способность есть конечный этап длинной цепи положений, начало которой положено нормативной интенцией человеческого ума. Эта нормативная деятельность выражается в фокусировании внимания на намеренной интерпретации формальной системы, которая отвечала бы интуитивным представлениям о формализуемой области.

Истинность геделева предложения может рассматриваться с двух точек зрения. С одной стороны, если принимается платонистская картина объективного существования математических сущностей, предложение является истинным объективно. Распознавание же этой истинности относится скорее к вопросу о существовании модели формальной системы. Неразрешимость геделева предложения тогда состоит в том, что в одних моделях оно истинно, а в других – ложно. Объявление предложения истинным означает, что мы имеем дело с определенным множеством моделей. Модель есть интерпретация формальной системы, призванной «схватить» арифметику натуральных чисел, утверждения которой полагаются истинными исходя из интуитивных соображений. Такая интерпретация называется стандартной, или намеренной, и неразрешимость геделева предложения означает в этом случае то, что формальная система не сумела добиться полной характеризации натуральных чисел. Существование нестандартных моделей, в которых геделево предложение ложно, содержит элементы, не являющиеся натуральными числами. Таким образом, первая теорема о неполноте говорит нечто о применимости предиката истины к арифметическим утверждениям.

Неполнота арифметики означает, что никакое конечное описание «правильного» употребления арифметических утверждений не дает полного понимания природы натуральных чисел, к которым должно относиться это «правильное» употребление. Теорема тогда говорит нам, что опираясь на интуитивную концепцию натурального числа, мы распознаем в качестве истинного утверждение, которое не выводится из описания употребления арифметических утверждений. Каким же образом происходит это распознавание? Интуитивное постижение истины с «математической определенностью» становится центральным моментом обсуждения того, почему геделево предложение является истинным. Другими словами, мы должны обладать определенной идеей о том, что это за математическая структура, в рамках которой мы говорим о натуральных числах, и именно со ссылкой на эту структуру мы распознаем предложение G как истинное.

Теорема Геделя о неполноте говорит нам, что можно построить предложение G, которое является неразрешимым, но распознается нами как истинное. Именно это обстоятельство заставляет нас искать связь такой способности к распознаванию истинности G с чем-то, что сопряжено с пониманием нами природы натуральных чисел. Заключение об истинности геделева предложения G для непротиворечивой системы F делается в предположении, что знаки системы служат для представления натуральных чисел. Но можно ли гарантировать, что это предположение оправданно? Не может ли случиться так, что формальная система будет интерпретирована как описание чего-то другого помимо натуральных чисел – того, что некоторые авторы называют «сверхъестественными» числами. Дело в том, что конечного аксиоматического способа убедиться в этом не существует. Именно об этом говорит первая теорема о неполноте. Независимо от того, какую именно систему аксиом формальной системы мы берем для характеристики натуральных чисел, одних лишь правил системы будет недостаточно, для того чтобы решить, является ли предложение G истинным или ложным. Полагание системы F непротиворечивой приводит к убеждению, что G может быть истинным, но только при условии, что знаки в формальном выражении $G(F)$ имеют стандартную интерпретацию. Однако тут же надо признать, что может быть и другая интерпретация, при которой $G(F)$ ложно.

Пусть имеются две формальные системы, образованные из системы F добавлением в качестве аксиомы соответственно G и G, а именно, $F_1(F+G)$ и $F_2(F+G)$. Если система F обоснована, то F_1 и F_2 непротиворечивы (так как G истинно, а G по правилам системы вывести невозможно). При намеренной интерпретации символов F из факта обоснованности системы следует, что система F_1 обоснована, а система F_2 – нет. Однако для непротиворечивой формальной системы можно найти такие нестандартные интерпретации, при которых утверждения, истинные в стандартной интерпретации, оказываются ложными в нестандартной. Можно предположить, что при нестандартной интерпретации обоснованными могут оказаться F и F_1, а не F_2. Такая переинтепретация символов может затронуть логические константы, но в данном случае важным вопросом является значение кванторов. В стандартной интерпретации $\forall x$ значит «для всех натуральных чисел x», а $\exists x$ «существует натуральное число x» В нестандартных интерпретациях эти символы относятся не к натуральным числам, а к числам иного вида, с другими принципами упорядочения. Именно здесь кроется различие между знанием натуральных чисел и знанием «сверхъестественных» чисел. Если натуральные числа мы знаем интуитивно, то «сверхъестественные» – только через формальные системы. Но не существует конечного набора аксиом, с помощью которого мы могли бы провести четкую границу между множеством натуральных чисел и множеством «сверхъестественных» чисел. Однако с точки зрения «здравого математического смысла» мы открываем истины именно о натуральных числах, отличая их от «сверхъестественных». Р. Пенроуз полагает, что значимость первой теоремы Геделя о неполноте заключается в установлении того факта, что ни одна формальная система, или компьютерная программа, не способна сделать за нас такое различение [13].

Тривиальная неполнота

Логики часто применяют стратегию рассмотрения различных формальных теорий арифметики с точки зрения их доказательной силы. Построение геделева предложения для некоторых подобных систем, более слабых, чем арифметика Пеано, позволяет яснее видеть природу неразрешимости и неполноты. Такой системой выступает арифметика Робинсона, или система Q. Эта система является слабой, поскольку в ней невозможны обобщения, необходимые в формализации арифметики. И тем не менее она интересна тем, что неполна и ряд аспектов, связанных с природой неполноты формальных систем, прослеживается в ней достаточно четко. Рассмотрим некоторые свойства этой системы более подробно.

Аксиомами системы Q являются первые четыре аксиомы Пеано, без аксиомы индукции:

1. 0 есть натуральное число;
2. Последующий элемент любого натурального числа есть натуральное число;
3. Никакие два натуральных числа не имеют одного и того же последующего элемента;
4. 0, и только 0, не является последующим элементом никакого натурального числа.

Пусть для некоторого предиката Ф мы имеем (*i*) Ф0, (*ii*)$\forall x$ (Ф$x \to$ Ф(Sx)), где S есть функция последующего элемента. Тогда в этой системе $\vdash$Фn для любого n. Рассмотрим процесс такого доказательства на примере выведения Ф5. Правила (*i*) и (*ii*) позволяют сделать вывод по форме соритов (следуя Л. Кэрролу), когда заключение одного аргумента становится посылкой следующего [14]. Дж. Лукас даже предпочитает называть систему Q «арифметикой соритов» [15]. (В выводе ниже знак «//» означает заключение аргумента).

$\vdash$Ф0 (*i*)
$\vdash$Ф0 $\to$ Ф1 (*ii*)
// Ф1
$\vdash$Ф1$\to$Ф2 (*ii*)
//Ф2
$\vdash$Ф2$\to$Ф3 (*ii*)
//Ф3
$\vdash$Ф3$\to$ Ф4 (*ii*)
//Ф4
$\vdash$Ф4$\to$Ф5 (*ii*)
//Ф5

Ясно, что этот процесс можно продолжать для любого n, так что можно доказать Фn. Можно ли тогда получить)$\forall x$ Фx? Нет, потому что тут есть тонкость, связанная с переменой мест кванторов [16]. Рассмотрим это обстоятельство более подробно.

В арифметике Робинсона можно определить умножение, хотя вычисление будет очень длинным. Далее, справедливы такие вещи, как коммутативность умножения:

(*) Для любых пар (m, n) существует доказательство, что $m\times n = n\times m$.

Но отсюда нельзя вывести, что

(**) Существует доказательство, что для любых пар (m, n) справедливо $m \times n = n \times m$.

Для утверждения (**) требуется аксиома индукции. Дело в том, что доказательство (*) зависит от пары выбранных чисел, и, хотя остается конечным, оно увеличивается очень сильно по мере увеличения чисел. Не существует конечного доказательства для всех пар чисел в (**), поскольку для этого требуется обращение к бесконечности.

Однако в арифметике соритов можно показать истинность утверждения

Для всех пар (m,n), $m \times n = n \times m$..

Поскольку аксиомы и теоремы арифметики соритов являются аналитическими истинами, (*) можно заменить на утверждение

Для любых пар (m, n) истинно, что $m \times n = n \times m$..

Но это выражение, в свою очередь, эквивалентно выражению

Истинно, что для любых пар (m, n) истинно, что $m \times n = n \times m$..

Но последнее выражение есть утверждение коммутативности умножения. Таким образом, можно сделать вывод, что в то время как устанавливается истинность утверждения о коммутативности умножения в системе Q, эту коммутативность нельзя доказать. Это означает наличие в системе Q истинных, но недоказуемых утверждений. Неполнота арифметики соритов, возможно, обязана аналитическому характеру четырех аксиом Пеано, которые и составляют определение натурального числа. Но в любом случае система Q неполна, хотя, быть может, в очень тривиальном смысле. Однако экспериментирование с этой системой может пролить свет на природу истинности геделева предложения.

Отметим, что система Q является обоснованной, т.е. все ее истинные утверждения доказуемы. Действительно, все ее аксиомы истинны и правила вывода сохраняют истинность. Поэтому логические выводы в системе являются доказательствами в интуитивном смысле истинности утверждений и, значит, каждая теорема Q истинна.

Математические резоны истинности геделева предложения

Геделевский аргумент о неполноте показывает, что если некоторая достаточно сильная арифметическая теория T обоснована или же просто непротиворечива, тогда имеется каноническое геделево предложение G_T, которое недоказуемо в T, и поскольку оно неявно «говорит», что оно недоказуемо, G_T оказывается истинным. Это рассуждение показывает, что мы распознаем истинность геделева предложения, но представляет интерес то, как мы это распознаем. Именно этот вопрос занимает нас в данной статье.

П. Смит предлагает несколько стратегий, в основном с использованием системы Q, понимания того, почему мы считаем геделево предложение истинным [17]. Он начинает с предложения G_Q. Система Q оказалась достаточно сильной, чтобы «схватить» все эффективно разрешимые нумерические свойства. В этом смысле она представляет собой хорошую арифметическую теорию, хотя и неполную. Как уже было сказано выше, Q является обоснованной. Тогда в силу «семантического» аргумента о неполноте, изложенного выше, G_Q недоказуемо и, отсюда, истинно.

Для такой теории, как Q, можно доказать, что некоторое предложение φ истинно, если и только если оно совместимо с Q. Предположим, что в качестве Q выступает гипотеза Гольдбаха: все четные числа, начиная с 4, являются суммой двух простых чисел. Рассмотрим систему Q_G, образованную добавлением к аксиомам Q гипотезы Гольдбаха. Ввиду результата о совместимости Q_G непротиворечива, если и только если гипотеза Гольдбаха истинна для натуральных чисел. Тогда каноническое геделево предложение для системы Q_G будет истинным, если мы будем считать гипотезу Гольдбаха истинной. Хотя гипотеза Гольдбаха не доказана, контрпримеров пока не найдено, и в теории чисел есть ряд соображений в пользу истинности гипотезы. Опираясь на такие прагматические соображения, мы можем считать геделево предложение истинным.

Ну а если вместо гипотезы Гольдбаха мы присоединим к аксиомам системы Q в качестве дополнительной аксиомы теорему Ферма и получим систему Q_F, то по той же самой схеме можно заключить, что система Q_F непротиворечива, если и только если теорема Ферма истинна. Поскольку теорема Ферма доказана, правда, с использованием инфинитарных средств, мы имеем большее доверие к непротиворечивости результирующей системы. И это обстоятельство позволяет нам сделать заключение об истинности геделева предложения. Это опять-таки скорее прагматическое заключение, потому что в доказательстве теоремы Ферма используются средства, далеко выходящие за пределы возможностей системы *Q*.

Еще один пример соображений в пользу истинности геделева предложения – это система, получаемая из арифметики Пеано (*PA*) путем добавления к ней отрицания геделева предложения *G*. Эта теория не является обоснованной, но она должна быть непротиворечивой, в предположении непротиворечивости *PA*. В противном случае мы имели бы $PA \vdash G$, что противоречило бы теореме о неполноте для *PA*. Тогда, если *PA* непротиворечива и с учетом неразрешимости *G* для *PA*, мы должны заключить о непротиворечивости новой системы с добавлением *G* к *PA*. Но если это так, каноническое геделево предложение для новой системы истинно. Какого рода это свидетельство? Оно говорит о том, что каноническое геделево предложение оказывается истинным при расширении системы за счет добавления геделева предложения для исходной системы. Другими словами, мотивация полагать каноническое геделево утверждение состоит в том, что резоны в пользу истинности геделева предложения одинаковы для обеих систем.

Наконец, П. Смит дает еще один пример расширения системы *Q* за счет добавления к ней в качестве аксиомы предложения $\sim\forall x(0+x=x)$. Новая система, естественно, не является обоснованной, но возможна такая переинтерпретация языка *Q*, при которой все и аксиомы, и, значит, теоремы новой системы истинны в ней. В этом случае имеется интерпретированная теория, которая ложна для одной структуры, но при переинтерпретации оказывается непротиворечивой в качестве описания другой структуры [18]. Каноническое геделево предложение для этой системы мы полагаем истинным исходя из существования непротиворечивой теории. Опять-таки мы имеем здесь ситуацию с расширением системы, в которой каноническое предложение получается «каноническим» путем.

Приведенные примеры показывают, что истинность геделева предложения определяется скорее «прагматическими» соображениями математической практики, нежели проблемами эпистемического обоснования. Прежде всего, это различные причины, и сама их множественность говорит о том, что такое определение является актом конвенциональным. Это, в свою очередь, означает, что не следует предполагать какую-то специальную когнитивную способность человеческого ума распознавать истинность геделева предложения как правильного арифметического утверждения, как это свойственно Дж. Лукасу, Р. Пенроузу и в значительной степени самому Геделю, поскольку в этом просто нет необходимости. Необходимости в этом нет, потому что есть абсолютно обыденные математические причины для полагания геделева предложения истинным. Таково еще одно свидетельство в пользу автономии математики, которая может внутри себя решать вопросы, часто полагаемые эпистемологическими. Примером этого может считаться ситуация с пониманием роли аксиоматического метода Д. Гильбертом, в противоположность пониманию Г. Фреге и Р. Дедекиндом [19].

Другими словами, с точки зрения работающего математика, в геделевом предложении нет ничего «сакрального». Как показывают приведенные выше примеры, математики экспериментируют с большим числом формальных систем, в которых строятся подобные конструкции, и вопрос об истинности геделевого предложения не задевает собственно математические интересы. В некотором отношении данный вопрос можно считать артефактом использования формальных систем для «схватывания» содержательной математики и в этом смысле скорее философским вопросом. Конечно, огромное число публикаций по следствиям теорем Геделя о неполноте, как значимых, так и весьма далеких от собственно логической проблематики, демонстрируют тесную связь математических деталей и философских спекуляций, но при этом следует учесть, что и сам Гедель признавал за теоремами философскую важность. По-видимому, вопрос о том, почему геделево предложение является истинным, инициируется тем, что при интерпретации первой теоремы мы допускаем сдвиг в семантическом направлении, вместо того чтобы твердо придерживаться синтаксических аспектов. Популярная формулировка теоремы: существование истинного, но недоказуемого предложения – связывает истинность с недоказуемостью, тогда как их следует трактовать строго отдельно. Эта точка зрения сводится к жестокому императиву: разговор о неполноте имеет собственный смысл, если развести семантические и синтаксические аспекты использования формальных систем.

Однако разведение этих двух аспектов в некотором смысле реабилитирует настойчивый интерес многих исследователей к вопросу об истинности геделевого предложения, воссоздавая некоторый аналог карнаповского разделения на внутренние и внешние вопросы [20]. Так, М. Пьяцца и Г. Пульчини говорят о том, что само возникновение вопроса об истинности обязано взаимодействию внешнего понятия истины, которое первично по отношению к дедуктивным конструкциям, и внутреннего понятия доказуемости [21]. Внешняя концепция истины отражает философский взгляд относительно объективности математических истин и в этом смысле пронизывает весь математический дискурс. С точки зрения этих авторов, однако, аргументация, связанная с теоремами о неполноте, становится все более точной по мере того, как понятие истины, используемое в такой аргументации, утрачивает свой внешний характер. Это означает, что понятие истины приобретает характер чисто технический. В подтверждение своей точки зрения Пьяцца и Пульчини приводят свидетельство самого Геделя, согласно которому представимость рекурсивных функций в арифметике Пеано, строго говоря, не требуется для получения неразрешимых утверждений [22]. Внутренняя версия истины в значительной степени соответствует доказуемости в элементарной теории чисел.

Ясно, что при такой линии аргументации предпочтение отдается синтаксическому доказательству теоремы о неполноте. Однако и семантические соображения могут играть важную роль. Так, Р. Смаллиан указывает в ряде мест, что помимо двух доказательств неполноты – Геделя и Россера есть более простое, чем эти два, которое комбинирует метод Геделя с использованием понятия истины [23]. «Для меня, – пишет Смаллиан, – всегда было загадкой, почему это простое доказательство – очень знакомое экспертам – игнорируется в учебниках» [24]. Если мы имеем семантическое доказательство теоремы о неполноте, вопрос о природе истинности геделева предложения является, с нашей точки зрения, вполне допустимым.

Геделево предложение – аналитическая или синтетическая истина?

Если геделево предложение является истиной согласно философским концепциям истины, возникает вопрос, под какую из концепций оно подпадает. В частности, является ли эта истина аналитической или синтетической. Такая дихотомия в современной философии математики в первую очередь связана с программой логицизма, согласно которой арифметические понятия определимы в терминах логических понятий. Некоторое арифметическое утверждение Ф будет в этом случае аналитическим, если оно является теоремой логицистской системы. Тогда для такой версии логицизма множество арифметических аналитических истин будет рекурсивно перечислимым. Но, как известно, множество арифметических истин не является рекурсивно перечислимым. Следовательно, некоторые арифметические истины не являются аналитическими. К таким истинам мы можем отнести геделево предложение. Оправданно ли такое утверждение? Пусть имеется некоторая формальная система с геделевым предложением *G*. Теорема о неполноте утверждает, что оно недоказуемо, если формальная система непротиворечива. Если предложение *G* невыводимо в формальной системе, оно не является аналитической истиной.

Синтетический характер геделева предложения подтверждается аргументацией с привлечением формального понятия истины, а именно, с привлечением предиката истины в формальную систему. В данной статье мы можем дать лишь набросок этой аргументации. Если формальная система может быть расширена таким образом, чтобы предложение *G* было доказуемым, в саму концепцию доказательства должны входить какие-то синтетические, в противоположность аналитическим, элементы. С. Шапиро полагает, что таким элементом может быть присоединение к системе предиката истины [25].

Итог такого предприятия отражен в следующем пассаже из работы Н. Теннанта: «Имеются принципиальные резоны для того чтобы полагать синтетическим любое геделево предложение, которое недоказуемо в данной системе. Такое предложение имеет форму $\forall nGn$Мы можем доказать (в метатеории), что из него «выводятся» $G0$, $GS0$, $GSS0$, …, так что мы желаем заключить, что каждый из примеров истинен и, отсюда, универсальная квантификация истинна. С каждым нумерическим примером мы делаем шаг от доказуемости (в системе, с которой мы начинаем) к истине, и тогда мы выводим истинность недоказуемого предложения посредством математической индукции в метатеории. Мы можем формализовать это размышление посредством расширения словаря исходной теории за счет включения в нее примитивного предиката истины. Это дает расширенную систему, потому что она позволяет сформировать новые примеры математической индукции. Поэтому размышлять относительно истинности недоказуемого геделева предложения можно с помощью расширенной системы. Но это означает, что доказательство геделева предложения, получаемое таким образом, должно содержать нелогический словарь (а именно, предикат истины), который не входит в само предложение. Следовательно самого по себе постижения значения предложения недостаточно для того, чтобы гарантировать его утверждаемость. То есть предложение не является эпистемически аналитическим, даже если его истинность может быть установлена априорно» [26].

Как видно, синтетический характер геделева предложения является результатом неаналитичности предиката истины. Возникает вопрос: не вносит ли использование предиката истины усложнения в попытки понимания того, почему геделево предложение является истинным? По свидетельству А. Тарского, «геделево предложение обладает свойством, использование которого позволяет определить, истинно ли оно или ложно, на основании метатеории более высокого порядка, имеющей правильное определение истины» [27]. Присоединение такого правильного определения истины к системе приводит к ее консервативному расширению. Другими словами, все, что можно сказать с использованием предиката истины, можно сказать и без него. Но это значит, что синтетический характер геделева предложения обязан не предикату истины, а другим факторам, которые способствуют увеличению выразительной силы системы. В число таких факторов может входить использование принципов рефлексии, которые в данной статье не обсуждаются.

Примечания

1. См.: *Raatikainen P.* On the philosophical relevence of Godel’s incompleteness theorem // Revue Internationale de Philosophie. – 2005. -V. 59.
2. *Крайзель Г.* Биография Курта Геделя. – М., 2003. – С. 7.
3. *Putnam H.* After Godel // Logic Journal of IGPL. – URL: citeseerx.ist.psu.edu.
4. *Piazza M., Pulcini G.* Disentangling Truth from Undecidability: the Godelian View. – URL: www.logica.uniroma.it.
5. См.: *Franzen T.* Godel’s Theorem: An Incomplete Guide to Its Use and Abuse. – A.K. Peters Ltd., 2005. – P. 29
6. Ibid. – P.31.
7. См.: *Dummett M.* The philosophical significance of Godel’s theorem // Truth and Other Enigmas. – Harvard University Press, 1978. – P. 186–201.
8. Ibid. – P. 191.
9. См.: *Sereny G.* How do we know that the Godel sentence of consistent theory is true? // Philosophia Mathematica. – 2011. – V. 19, No. 1. – P. 47–73.
10. *Dummett M.* The philosophical significance of Godel’s theorem. – P. 192.
11. См.:*Tennant N.* Deflationism and the Godel Phenomena // Mind. – 2002. – V. 111, No. 443. – P. 551–582.
12. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. – М., 1957. – С. 426.
13. См.: *Пенроуз Р.* Тени разума. – М., 2003. – Ч. 1. – С. 177–182.
14. См.: *Кэррол Л.* История с узелками. Ч. 3: Символическая логика. – М., 1973.
15. См.: *Lukas J.* Conceptual Roots of Mathematics. – L.: Routledge, 2001.
16. См.: *Readhead M.* Mathematics and the mind // British Journal for the Philosophy of Science. – 2004. – V. 55. – P. 731–737.
17. См.: *Smith P.* An Introduction to Godel ‘s Theorems. – Cambridge University Press, 2007. – Ch. 18.
18. Ibid. – P. 56–57.

19. См.: *Целищев В.В.* Формальные онтологии и семантика примитивных концепций оснований математики // Вестник Томского государственного университета: Философия. Социология. Политология. – 2013. – № 4 (24). – С. 55–70.

20. См.: *Карнап Р.* Эмпиризм, семантика, онтология // Значение и необходимость. – М., 1959.

21. См.: *Piazza M., Pulcini G.* Disentangling Truth from Undecidability: the Godelian View.

22. См.: *Godel K.* On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems // Godel K. The Undecidable. – N.Y., 1965. – P. 59.

23. См., например: *Smullyan R.* Godel's Incompleteness Theorem. – Oxford University Press, 1992. – Ch. 10.

24. *Смаллиан Р.* Вовеки неразрешимое. – М.: Канон +, 2013. – С. 216.

25. См.: *Shapiro S.* Induction and indefinite extensibility: the Godel sentence is true, but did someone change the subject // Mind. – 1998. – V. 107, No. 247. – P. 597–624.

26. *Tennant N.* The Taming of True. – Oxford University Press, 1997 – P. 293–294.

27. *Tarski A.* The concept of truth in formalized languages // Logic, Semantics, Metamathematics. – Oxford, 1956. – P. 274.

Дата поступления 11.11.2013 г.

Институт философии и права
СО РАН, г. Новосибирск
director@philosophy.nsc.ru

Tzelishchev, V.V. **Truth of Godelian sentence: external and internal approaches**

The article deals with explication of the conception of truth of Godelian sentence in the proof of the first Godel's incompleteness theorem. The author considers several views on establishment of truth of Godelian sentence. He shows that different approaches to the problem proposed by mathematicians and philosophers correspond to Carnap's dichotomy of the external and the internal.

Keywords: Godel, truth, classification