

ваемых режимов влияние индуцированных токов незначительное и зависимость β_0 от T_1 слабая, чем и объясняются полученные результаты для скорости. Таким образом, в практике реализации режимов ускорения необходимо добиваться $\beta = \beta_0$, $T_1 \geq 5$ и $\tau_0 = 3T_1$.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить признательность В. Н. Бондалетову за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агарков В. Ф., Блохинцев А. А. и др. О возможности применения электромагнитных ускорителей для исследования процессов, возникающих при высокоскоростном соударении твердых тел.— ПМТФ, 1982, № 5.
2. Агарков В. Ф., Бондалетов В. Н. и др. Ускорение проводников до гиперзвуковых скоростей в импульсном магнитном поле.— ПМТФ, 1974, № 3.
3. Калихман С. А. Переходные электромагнитные процессы при взаимодействии импульсного магнитного поля с цилиндрическим проводником.— Электричество, 1981, № 9.
4. Лаврентьев М. А., Шабат В. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
5. Дашук П. Н., Зайенц С. Л., Комельков В. С. и др. Техника больших импульсных токов и магнитных полей/Под ред. В. С. Комелькова. М.: Атомиздат, 1970.
6. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. М.: Мир, 1972.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968.

Поступила 14/IX 1984 г.

УДК 532.54 : 541.13

ЭЛЕКТРИЗАЦИЯ СЛАБОПРОВОДЯЩИХ ЖИДКОСТЕЙ ПРИ ТЕЧЕНИИ ПО ТРУБАМ

Ю. Д. Шихмурзаев

(Москва)

Известно, что при течении по трубам слабопроводящие жидкости, например углеводороды, приобретают некоторый электрический заряд [1—4]. В результате появляется опасность возникновения электрических разрядов и взрывов в трубопроводах и резервуарах [1, 5]. В связи с этим представляет интерес определение зависимости максимального тока электризации при течении слабопроводящей жидкости по трубе от размеров трубы, свойств жидкости и параметров течения.

Возникновение в среде объемного заряда связано с идущими на поверхности трубы электрохимическими реакциями, в которые вступают ионы растворенной в жидкости примеси электролитной природы [2, 4]. Ток электризации, т. е. заряд, выносимый жидкостью в единицу времени из трубы заданной длины, зависит, вообще говоря, от констант скоростей поверхностных реакций. В данной работе рассматривается предельный случай, когда в поверхностной реакции участвуют ионы одного знака, причем реакция идет бесконечно быстро. Ток электризации при этом определяется скоростью подвода ионов к поверхности трубы. В [6] эта задача рассматривалась для труб малого диаметра, когда характерная толщина возникающего диффузионного пограничного слоя мала по сравнению с дебаевским радиусом жидкости. Было показано, что при этом в нулевом приближении по малому параметру, равному отношению толщины диффузионного пограничного слоя к радиусу трубы, можно пренебречь влиянием электрического поля на движение ионов и задача сводится к решению уравнения конвективной диффузии.

В данной работе исследуется электризация жидкости, когда толщина диффузионного пограничного слоя и дебаевский радиус жидкости одного порядка и влияние возникающего электрического поля на движение ионов существенно. Предполагается, что дебаевский радиус жидкости r_D мал по сравнению с радиусом трубы a , $\delta = r_D/a \ll 1$. Рассмотрены случаи полной и слабой диссоциации примеси. В последнем предполагается, что в жидкости могут протекать объемные электрохимические реакции: идущая с постоянной скоростью диссоциация молекул примеси и рекомбинация ионов, скорость которой считается пропорциональной произведению их концентраций.

Показано, что в каждом из рассмотренных случаев существуют безразмерные переменные, в которых в нулевом приближении по параметру δ зависимость максимального тока электризации от параметров задачи описывается универсальной кривой. Для каждого из них численно получен вид этой кривой. Анализируется зависимость максимального тока электризации от размеров трубы, свойств жидкости и параметров течения. Обсуждаются границы применимости полученного решения.

1. Постановка задачи. Рассматривается электризация слабопроводящей жидкости при установившемся течении в полубесконечной заземленной металлической трубе, на входе в которую жидкость не заряжена. Предполагается, что проводимость жидкости связана с диссоциацией находящихся в ней молекул примеси [2, 3], а ее электризация происходит за счет окислительно-восстановительных реакций, идущих на внутренней поверхности трубы [2, 4]. Исследуется предельный случай, когда со стенок трубы реагируют ионы только одного знака (для определенности отрицательные), причем реакция протекает бесконечно быстро.

Будем описывать слабопроводящую жидкость моделью многокомпонентной смеси, состоящей из положительных и отрицательных ионов, нейтральных молекул электролита и молекул жидкости-носителя неэлектролитной природы. Предполагается, что концентрации ионов много меньше концентрации молекул несущей жидкости, так что влиянием ионов на движение среды можно пренебречь, полагая при решении электродинамической задачи гидродинамику течения известной. Считаем, что профиль скорости жидкости дается формулой Пуазейля, а температуры компонентов одинаковы и равны температуре стенок трубы. С учетом сделанных предположений система уравнений и граничных условий, описывающих процесс электризации жидкости при течении в трубе, запишется в виде (x^* , r^* — цилиндрические координаты, ось x^* направлена по оси трубы)

$$(1.1) \quad -D_{\pm} \Delta n_{\pm}^* \pm b_{\pm} \operatorname{div} (n_{\pm}^* \mathbf{E}^*) + u_{\max} \left(1 - \frac{r^{*2}}{a^2} \right) \frac{\partial n_{\pm}^*}{\partial x^*} = \gamma k_r (n_0^2 - n_+^* n_-^*);$$

$$(1.2) \quad \operatorname{div} \mathbf{E}^* = 4\pi e \varepsilon^{-1} (n_+^* - n_-^*), \operatorname{rot} \mathbf{E}^* = 0;$$

$$(1.3) \quad n_{\pm}^* = n_0, E_r^* = 0, x^* = 0;$$

$$(1.4) \quad -D_+ \frac{\partial n_+^*}{\partial x^*} + b_+ n_+^* E_r^* = 0, n_-^* = 0, E_x^* = 0, r^* = a,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^*} n_{\pm}^*, E_x^* \rightarrow 0, x^* \rightarrow +\infty.$$

Здесь u_{\max} — скорость жидкости на оси трубы; a — радиус трубы; n_{\pm}^* , b_{\pm} , D_{\pm} — концентрации, коэффициенты подвижности и диффузии положительных и отрицательных ионов; $\mathbf{E}^* (E_r^*, E_x^*, 0)$ — напряженность электрического поля; k_r , n_0 — коэффициент рекомбинации и равновесная концентрация ионов; e — абсолютная величина заряда иона; ε — диэлектрическая проницаемость среды. Параметр γ равен 0 при полной диссоциации примеси и 1 — при слабой. В последнем случае изменением концентрации нейтральных молекул электролита за счет объемных реакций можно пренебречь и полагать скорость диссоциации постоянной. В дальнейшем предполагается, что $b_+ = b_- = b$, $D_{\pm} = bkT e^{-1}$ (k — постоянная Больцмана, T — температура), $k_r = 8\pi e b e^{-1}$ — соотношение Ланжевена.

Обезразмерим уравнения (1.1), (1.2) и граничные условия (1.3), (1.4), вводя следующие обозначения:

$$\begin{aligned} n_{\pm} &= n_{\pm}^*/n_0, E_r = E_r^*/E_r^0, E_x = E_x^*/E_x^0, \\ r &= r^*/a, x = x^*/(ax^3), E_r^0 = 4\pi e n_0 \varepsilon^{-1} r_D, \\ E_x^0 &= E_r^0 r_D / (ax^3), r_D^2 = \varepsilon kT / (8\pi e^2 n_0), \\ \varepsilon_1 &= \operatorname{Re}^{-1/3} = (D/(au_{\max}))^{1/3}, \kappa = \delta/\varepsilon_1, \delta = r_D/a. \end{aligned}$$

Здесь r_D — дебаевский радиус жидкости; $a\varepsilon_1$ — характерная толщина диффузионного пограничного слоя [6]; $Pe = u_{\max} aD^{-1}$ — диффузионное число Пекле. После обезразмеривания уравнения (1.1), (1.2) и граничные условия (1.3), (1.4) примут вид

$$(1.5) \quad -\delta^3 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n_{\pm}}{\partial r} \right) + \kappa^{-6} \frac{\partial^2 n_{\pm}}{\partial x^2} \right) \pm \frac{\delta^2}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rn_{\pm} E_r) + \delta \kappa^{-6} \frac{\partial}{\partial x} (n_{\pm} E_x) \right) + (1-r^2) \frac{\partial n_{\pm}}{\partial x} = \gamma \delta (1 - n_+ n_-);$$

$$(1.6) \quad \delta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \delta \kappa^{-6} \frac{\partial}{\partial x} E_x \right) = n_+ - n_- \frac{\partial E_r}{\partial x} = \delta \frac{\partial E_x}{\partial r};$$

$$(1.7) \quad n_{\pm} = 1, E_r = 0 \quad (x = 0);$$

$$(1.8) \quad -2\delta \frac{\partial n_{\pm}}{\partial r} + n_+ E_r = 0, n_- = 0, E_r = 0 \quad (r = 1),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} n_{\pm}, E_x \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Исследуем электризацию на начальном участке трубы, когда $\varepsilon_1 \sim \delta \ll 1$. Для этого рассмотрим асимптотику решения задачи (1.5)—(1.8) при $\delta \rightarrow 0$, $\kappa = \delta/\varepsilon_1 = O(1)$. Случай $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, $\delta = O(1)$ изучался в [6].

2. Приближенное решение задачи. Будем искать решение задачи методом сращиваемых асимптотических разложений [7]. Полагая в равенствах (1.5)—(1.8) параметр $\delta = 0$ и интегрируя полученную таким образом систему уравнений для нулевого приближения внешнего решения с учетом соответствующих граничных условий, находим

$$(2.1) \quad E_{r0}^{(e)} = 0, n_{\pm 0}^{(e)} = 1.$$

Здесь и ниже индексы (e) и (i) относятся соответственно к параметрам внешнего и внутреннего решения, нижний индекс 0 указывает на то, что рассматривается нулевое по δ приближение решения.

Для получения уравнений и граничных условий для внутреннего решения подставим в соотношения (1.5)—(1.8) искомые функции, представленные в виде рядов по степеням параметра δ , и после перехода к новым переменным $x, y = (1-r)/\delta$ приравняем слагаемые при одинаковых степенях δ . Уравнения и граничные условия для нулевого приближения решения запишутся следующим образом:

$$(2.2) \quad 2 \frac{\partial^2 n_{\pm 0}^{(i)}}{\partial y^2} \pm \frac{\partial}{\partial y} (n_{\pm 0}^{(i)} E_{r0}^{(i)}) - 4y \frac{\partial n_{\pm 0}^{(i)}}{\partial x} = 2\gamma (n_{+0}^{(i)} n_{-0}^{(i)} - 1);$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial E_{r0}^{(i)}}{\partial y} = n_{-0}^{(i)} - n_{+0}^{(i)}, \frac{\partial E_{r0}^{(i)}}{\partial x} = -\frac{\partial E_{x0}^{(i)}}{\partial y};$$

$$(2.4) \quad n_{\pm 0}^{(i)} = 1, E_{r0}^{(i)} = 0 \quad (x = 0);$$

$$(2.5) \quad 2 \frac{\partial n_{\pm 0}^{(i)}}{\partial y} + n_{\pm 0}^{(i)} E_{r0}^{(i)} = 0, n_{-0}^{(i)} = 0, E_{x0}^{(i)} = 0 \quad (y = 0).$$

Условия сращивания нулевых приближений решения во внешней («ядро» потока) и внутренней (пограничный слой) областях имеют вид

$$(2.6) \quad n_{\pm 0}^{(i)} \rightarrow 1, E_{r0}^{(i)} \rightarrow 0 \quad (y \rightarrow +\infty).$$

Из уравнений (2.2), (2.3) и граничных условий (2.4)—(2.6) видно, что функции $n_{\pm 0}^{(i)}, E_{r0}^{(i)}$ могут быть определены независимо от функции $E_{x0}^{(i)}$, которая затем находится из второго уравнения (2.3) с использованием последнего граничного условия (2.5). Значения функции $E_{x0}^{(i)}$ на внешней границе пограничного слоя являются крайними условиями для определения нулевого приближения E_x во внешней области.

Отметим, что в случае слабой диссоциации молекул примеси при коэффициенте рекомбинации меньше или порядка ланжевенновского условие электрохимического равновесия $n_0^2 = n_+^* n_-^*$ в пограничном слое, вообще говоря, не выполняется. Это утверждение следует непосредственно из вида уравнений электродиффузионного пограничного слоя (2.2), (2.3).

Для полной ($\gamma = 0$) и слабой ($\gamma = 1$) диссоциации молекул примеси получим выражение для тока электризации $J_\gamma(L)$, т. е. заряда, выносимого текущей жидкостью в единицу времени из участка трубы длиной L . Этот ток, очевидно, равен с обратным знаком току, текущему с трубы на землю, величину которого можно получить, интегрируя по поверхности трубы плотность тока $j^* = eD \partial n_-^* / \partial r^* |_{r^*=a}$. Таким образом,

$$(2.7) \quad J_\gamma(L) = -2\pi a e D \int_0^L \frac{\partial n_-^*}{\partial r^*} \Big|_{r^*=a} dx^* = \\ = (1 + O(\delta)) \frac{\varepsilon k T u_{\max}}{4e} \int_0^{x_L} \frac{\partial n_{-0}^{(i)}}{\partial y} \Big|_{y=0} dx, \quad x_L = L/(ax^3).$$

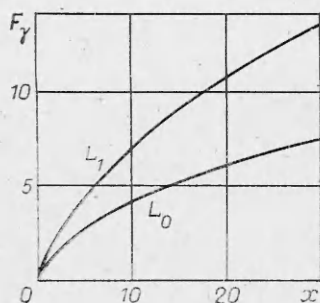
Уравнения (2.2), (2.3) и граничные условия (2.4)–(2.6), которые служат для определения нулевого приближения решения в пограничном слое, содержат один параметр γ , принимающий (в предположении о ланжевенновской зависимости коэффициента рекомбинации от подвижностей и зарядов ионов и от диэлектрической проницаемости жидкости) только два значения. В силу этого как для полной, так и для слабой диссоциации примеси интеграл в правой части последнего равенства (2.7) является универсальной, не зависящей от параметров, функцией верхнего предела. Вводя обозначение $F_\gamma(x) = \int_0^x \partial n_{-0}^{(i)} / \partial x(0, x) dx$, равенство (2.7) с точностью до членов порядка δ перепишем в виде

$$(2.8) \quad J_\gamma(L) = \frac{\varepsilon k T u_{\max}}{4e} F_\gamma \left(\left(\frac{8\pi n_0}{\varepsilon} \right)^{3/2} \frac{La e^2 b}{(kT)^{1/2} u_{\max}} \right) \equiv \\ \equiv \frac{\varepsilon k T u_{\max}}{4e} F_\gamma \left(\left(\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} \right)^{3/2} \frac{La}{D^{1/2} u_{\max}} \right)$$

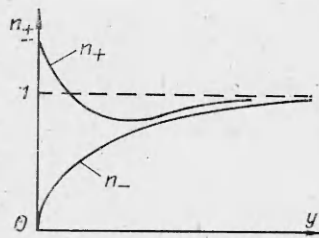
(σ — равновесная проводимость жидкости).

Функции $F_\gamma(x)$ ($\gamma = 0; 1$) получены путем численного решения задачи (2.2)–(2.6). Их графики приведены на рис. 1, где обозначения L_0 и L_1 относятся соответственно к полной и слабой диссоциации примеси. При известной функции $F_\gamma(x)$ соотношение (2.8) дает возможность выяснить зависимость тока электризации от размеров трубы, свойств жидкости и скорости течения. Для этого удобно рассматривать зависимость $\lg F_\gamma$ от $\lg x$. В логарифмических осях тангенс угла, образованного касательной к кривой $\lg F_\gamma(\lg x)$ с осью $\lg F_\gamma = 0$, меняется монотонно, стремясь снизу к значению $2/3$ при $\lg x \rightarrow -\infty$ и к нулю при $\lg x \rightarrow +\infty$. Отсюда и из соотношения (2.8) следует, что ток электризации растет с увеличением температуры жидкости, скорости ее течения по трубе, радиуса трубы, длины рассматриваемого участка L , подвижности ионов, их концентрации на входе в трубу. Зависимость тока электризации от величины заряда иона немонотонна. Как видно из рис. 1, ток электризации больше, когда примесный электролит слабый.

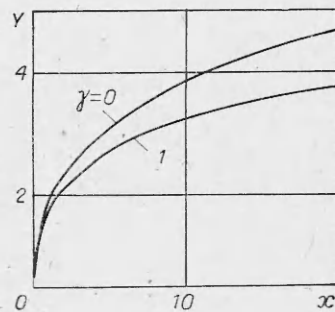
Отметим, что при $x_L \ll 1$, т. е. когда толщина диффузионного слоя много меньше дебаевского радиуса жидкости, расчет по формуле (2.8) дает те же результаты, что и формула для тока электризации, полученная в [6].



Р и с. 1



Р и с. 2



Р и с. 3

На рис. 2 качественно приведены профили концентраций ионов ($\gamma = 0$), показывающие, что, как и при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, $\delta = O(1)$ [6], объемный заряд в основном сосредоточен в узком пристеночном слое. Профиль концентрации положительных ионов на некотором расстоянии от поверхности трубы имеет минимум, где диффузионная составляющая радиальной компоненты потока положительных ионов меняет знак. Миграционная составляющая всюду направлена по радиусу. Смена знака диффузионной составляющей радиальной компоненты потока положительных ионов связана с влиянием стенки трубы, на которой диффузионная составляющая компенсирует миграционную, в то время как вдали от поверхности трубы миграционный поток положительных ионов приводит к уменьшению их концентрации в радиальном направлении, т. е. к появлению диффузионного потока, направленного по радиусу. При $\gamma = 1$ объемный заряд также сосредоточен в узком пристеночном слое, но концентрация положительных ионов монотонно возрастает с уменьшением расстояния до стенки.

Оценим максимальную длину участка трубы, на котором ток электризации может быть рассчитан по формуле (2.8). Назовем величину $\delta_{ef}(x)$, определяемую уравнением

$$\max [|1 - n_+(x, 1 - \delta_{ef}(x))|, |1 - n_-(x, 1 - \delta_{ef}(x))|] = 0,05,$$

безразмерной «эффективной толщиной» электродиффузионного пограничного слоя. Формула (2.8) может быть использована для расчетов, если $\delta_{ef}(x_L) \ll 1$. На рис. 3 приведен полученный численно график функции $Y(x) = \delta_{ef}(x)/\delta$, позволяющий при известном значении параметра δ оценить «эффективную толщину» электродиффузионного пограничного слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Klinkenberg A., Minne J. Electrostatics in the petroleum industry. — In: The Prevention of Explosion Hazards. Amsterdam — New York, 1958.
2. Gavis J., Koszman J. Development of charge in low-conductivity liquids flowing past surfaces; a theory of the phenomenon in tubes. — J. Coll. Sci., 1961, v. 16, p. 375.
3. Koszman J., Gavis J. Development of charge in low-conductivity liquids flowing past surfaces. — Chem. Eng. Sci., 1962, v. 17, p. 1023.
4. Walmsley H. L., Woodford G. The polarity of the current generated by the laminar flow of a dielectric liquid. — In: Proc. 4th Int. Conf. on Electrostatics. Hague, May 6—8, 1981.
5. Захарченко В. В., Крячко Н. И., Мажара Е. Ф. Электризация жидкостей и ее предотвращение. М.: Химия, 1975.
6. Гогосов В. В., Никифорович Е. И., Толмачев В. В. Электризация слабопроводящей жидкости, текущей по металлической трубе. — Магнитная гидродинамика, 1979, № 2.
7. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972.

Поступила 31/VII 1984 г.