УДК 532.5:532.517.4

ВЛИЯНИЕ ОБЪЕМНОЙ ВЯЗКОСТИ НА НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КЕЛЬВИНА — ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Ю. Н. Григорьев, И. В. Ершов*

Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090 Новосибирск
* Новосибирская государственная академия водного транспорта, 630099 Новосибирск
E-mail: grigor@ict.nsc.ru

В рамках нелинейной энергетической теории устойчивости сжимаемых течений построен энергетический функционал, приводящий к разрешимой вариационной задаче для определения критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода Re_{cr}. Для течения Куэтта сжимаемого газа получены асимптотические оценки устойчивости различных мод, содержащие в главном порядке характерную зависимость $\mathrm{Re}_{cr} \sim \sqrt{\alpha + 4/3}$ ($\alpha = \eta_b/\eta$). Рассмотренные асимптотики являются длинноволновыми приближениями. Это позволяет заключить, что полученная зависимость описывает воздействие объемной вязкости на крупномасштабные вихревые структуры, характерные для развития неустойчивости Кельвина — Гельмгольца.

Ключевые слова: гидродинамическая устойчивость, энергетическая теория, течение сжимаемого газа, объемная вязкость, ламинарно-турбулентный переход, критическое число Рейнольдса.

Введение. Диссипативный эффект в молекулярных газах, проявляющийся в аномальном поглощении высокочастотного звука, известен с середины 30-х гг. XX в. [1]. В последнее время этот эффект исследуется в аэродинамике с целью использования его для затягивания ламинарно-турбулентного перехода и подавления турбулентности.

Начало исследований положено в работе [2], авторы которой провели сравнительные эксперименты по ламинарно-турбулентному переходу в течении Гагена — Пуазейля в круглой трубе для азота N_2 и окиси углерода CO. Термодинамические и транспортные свойства этих газов почти идентичны, но объемная вязкость CO, рассчитанная по данным о затухании ультразвука, в несколько раз превышает аналогично вычисленное значение для N_2. В экспериментах установлено, что при одних и тех же условиях число Рейнольдса перехода Re_t в более "вязком" газе CO приблизительно на 10 % превышает соответствующее значение для N_2.

По ряду причин достоверность указанных результатов представлялась дискуссионной. В частности, для объемных вязкостей использованных газов имеются другие данные (см. библиографию к работе [3]), полученные на основе измерения времен релаксации в ударных волнах. Из этих данных, также частично приведенных в [2], следует, что объемные вязкости N_2 и CO достаточно близки, и их небольшое различие не позволяет объяснить наблюдавшееся изменение Re_t. На отсутствие в [2] комментария этого противоречия указано в [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00359).

В работе [4], отчасти инициированной работой [2], в рамках линейной теории устойчивости численно исследовалось влияние возбуждения внутренних степеней свободы молекул на ламинарно-турбулентный переход (ЛТП) в сжимаемом пограничном слое на пластине. В расчетах для сверхзвукового воздушного потока установлено, что учет объемной вязкости приводит к незначительному стабилизирующему эффекту, выражающемуся в малой деформации нейтральных кривых для первой и второй неустойчивых мод (определение этих мод, впервые введенных в [5], см. в [6]). Оценки по линейной теории [7] в случае течения на пластине, выполненные для предельно допустимого в рамках модели Навье — Стокса диапазона чисел Маха и реалистичного для двухатомных газов отношения объемной и динамической вязкостей, также показали, что объемная вязкость оказывает слабое влияние на величину Re_t.

Тем не менее результаты [4, 7], полученные в линейном приближении, не являются прямым опровержением экспериментов [4]. Как известно, линейная теория устойчивости удовлетворительно описывает ЛТП на пластине, тогда как течение Гагена — Пуазейля в линейном приближении оказывается устойчивым. В то же время в [4] переход к турбулентности наблюдался вплоть до заключительной нелинейной стадии.

Для оценки влияния объемной вязкости на нелинейное развитие возмущений в [8] исследовалось сжимаемое течение Куэтта, возмущенное наложением вихря Рэнкина. Несмотря на простоту, такая модель адекватно воспроизводит эволюцию крупных вихревых структур на фоне несущего сдвигового течения, являющуюся характерным элементом современных сценариев перехода и генерации развитой турбулентности [9]. Проведенные в [8] расчеты такого течения на основе полных уравнений Навье — Стокса вязкого теплопроводного газа показали, что в реально достижимом диапазоне значений объемной вязкости диссипативный эффект достаточно существен. При этом относительное изменение скорости затухания начального вихревого возмущения достигает 10 %.

Поскольку в [8] расчеты выполнялись на относительно грубой сетке, можно предположить, что, по крайней мере, часть диссипативного воздействия, составляющего несколько процентов, обусловлена влиянием схемной вязкости. Для того чтобы разделить физический и аппроксимационный эффекты, в работе [10] модельное течение [8] было вновь рассчитано на последовательности вложенных сеток. Расчеты, в которых использовалась схема [11] с симметричной аппроксимацией конвективных производных, подтвердили, что практически все изменение диссипативного воздействия в [8] определяется объемной вязкостью.

Как известно, объемная вязкость в уравнениях Навье — Стокса учитывает релаксацию внутренних молекулярных мод при умеренном термическом возбуждении [1]. В [12] при изучении влияния возбуждения с вовлечением нижних колебательных уровней то же модельное течение рассчитывалось в рамках двухтемпературной газовой динамики. Релаксация энергии колебательной моды к равновесию описывалась уравнением Ландау — Теллера. Показано, что на фоне только релаксационного процесса в отсутствие вязкой диссипации подавление возмущений остается существенным.

Вместе с тем результаты работ [8, 10, 12], где рассматривались чисто затухающие возмущения, позволяют лишь косвенно судить о степени влияния объемной вязкости (релаксационного процесса) на ЛТП. В принципе зависимость критического числа Рейнольдса ЛТП Re_t от объемной вязкости можно получить на основе энергетической теории глобальной гидродинамической устойчивости [13]. Под глобальностью гидродинамической устойчивости понимается неограниченность амплитуд рассматриваемых возмущений, для которых выводится уравнение энергетического баланса [8] для всей области течения. Получаемые на основе этого уравнения значения критериев устойчивости, как правило, имеют смысл предельных оценок снизу и далеко не всегда близки к экспериментальным данным. Тем не менее в настоящее время этот подход дает единственную возможность хотя бы в обобщенном виде учесть нелинейную стадию потери устойчивости, что необходимо в данном случае.

Следует отметить, что для сжимаемых течений энергетическая теория остается практически неприменимой. Это обусловлено существенной нелинейностью полных уравнений Навье — Стокса сжимаемого теплопроводного газа (см. комментарии и библиографию к работам [13, 14]). Все известные результаты данной теории по устойчивости течений несжимаемых и неоднородных жидкостей получены с учетом соленоидальности допустимых полей скорости, которая отсутствует в сжимаемых течениях. Возникающие вследствие этого трудности математического характера до настоящего времени преодолеть не удавалось.

В данной работе в рамках энергетической теории рассматривается устойчивость сжимаемого течения Куэтта с линейным профилем скорости. С использованием определенных упрощений для него удается до конца решить соответствующую вариационную задачу и получить явную зависимость Re_{cr} от объемной вязкости.

1. Основные уравнения. Задача устойчивости течения Куэтта рассматривается на основе системы уравнений Навье — Стокса сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Расчетная область Ω представляет собой прямоугольный параллелепипед, грани которого параллельны координатным плоскостям декартовой системы (x_1, x_2, x_3), а центр совпадает с началом координат. Непроницаемые бесконечные пластины, вдоль которых направлено основное течение, перпендикулярны оси x_2.

В качестве характерных величин для обезразмеривания выбраны ширина канала L по оси x_2, модуль скорости U_0 основного потока, плотность ρ_0 и температура T_0 на непроницаемых стенках канала, время $\tau_0 = L/U_0$ и давление $p_0 = \rho_0 U_0^2$. В безразмерных переменных система уравнений записывается в виде

$$
\begin{gathered}
\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0,\\
\rho\,\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\,\partial x_j},\\
\rho\frac{dT}{dt} + \gamma(\gamma-1)\,\mathrm{M}_0^2\,p\,\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\gamma}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\,\frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2},\\
\gamma\,\mathrm{M}_0^2\,p = \rho T, \qquad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i\,\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad i,j = 1,2,3.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь ρ, u_i, T, p — плотность, компоненты вектора скорости, температура и давление газа соответственно; по повторяющимся индексам проводится суммирование. Предполагается, что теплоемкости и диссипативные коэффициенты в системе (1) не зависят от температуры и постоянны. Параметры, входящие в уравнения (1), определяются следующим образом: коэффициент α равен отношению объемной вязкости к сдвиговой ($\alpha = \eta_b/\eta$) и характеризует степень неравновесности внутренних степеней свободы молекул газа; $\mathrm{M}_0 = U_0/\sqrt{\gamma R T_0}$ — число Маха основного потока; $\mathrm{Re} = U_0 L \rho_0/\eta$ — число Рейнольдса; $\mathrm{Pr} = \eta c_p/\lambda_0$ — число Прандтля; R — газовая постоянная; $\gamma = c_p/c_v$ — показатель адиабаты; c_p, c_v — удельные теплоемкости при постоянных давлении и объеме соответственно; λ_0 — теплопроводность. В уравнении энергии опущена группа нелинейных слагаемых, составляющих так называемую диссипативную функцию. Такое приближение является распространенным в задачах устойчивости сжимаемых течений [5, 6].

Плоское течение Куэтта с линейным профилем скорости, являющееся точным стационарным решением системы (1), описывается соотношениями

$$
\boldsymbol{U}_s(x_2) = (x_2, 0, 0), \quad T_s(x_2) = \rho_s(x_2) = 1, \quad p_s(x_2) = 1/(\gamma\,\mathrm{M}_0^2).
$$

Представляя мгновенные значения гидродинамических величин возмущенного течения в виде

$$\rho = 1 + \rho', \quad u_i = U_{s,i} + u_i', \quad T = 1 + T', \quad p = 1/(\gamma\,\mathrm{M}_0^2) + p', \tag{2}$$

запишем уравнения для возмущений ρ', u_i', T', p' основного течения без ограничения на их амплитуды:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u_i\,\frac{\partial \rho'}{\partial x_i} + \rho\,\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0; \tag{3}$$

$$\rho\Big(\frac{\partial u_i'}{\partial t} + u_j'\,\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + U_{s,j}\,\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_j'\,\frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_j}\Big) = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big(\alpha + \frac{1}{3}\Big)\frac{\partial^2 u_j'}{\partial x_i\,\partial x_j}; \tag{4}$$

$$\rho\Big(\frac{\partial T'}{\partial t} + u_j'\,\frac{\partial T'}{\partial x_j} + U_{s,j}\,\frac{\partial T'}{\partial x_j}\Big) + \gamma(\gamma - 1)\mathrm{M}_0^2 p\,\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = \frac{\gamma}{\mathrm{Re\,Pr}}\,\frac{\partial^2 T'}{\partial x_i^2}; \tag{5}$$

$$\gamma\,\mathrm{M}_0^2\,p' = \rho T' + \rho', \qquad i, j = 1, 2, 3. \tag{6}$$

Для того чтобы не усложнять форму записи суммирования по индексам, в (3)–(5) явная зависимость скорости невозмущенного течения (2) от одной координаты x_2 не используется. Предполагается, что при $x_1 = \pm x_0/2$ и $x_3 = \pm z_0/2$ возмущения скорости u_i', плотности ρ' и давления p' удовлетворяют периодическим граничным условиям, а на непроницаемых границах $x_2 = \pm 1/2$ принимают нулевые значения. Для возмущения температуры T' ставятся следующие граничные условия:

$$\frac{\partial T'}{\partial x_1}\Big|_{x_1=-x_0/2} = \frac{\partial T'}{\partial x_1}\Big|_{x_1=+x_0/2}, \qquad \frac{\partial T'}{\partial x_2}\Big|_{x_2=-1/2} = \frac{\partial T'}{\partial x_2}\Big|_{x_2=+1/2} = 0,$$
$$\frac{\partial T'}{\partial x_3}\Big|_{x_3=-z_0/2} = \frac{\partial T'}{\partial x_3}\Big|_{x_3=+z_0/2}.$$

Ниже размеры области Ω по периодическим (однородным) координатам x_1, x_3 выбраны равными длине волны возмущения по соответствующей координате:

$$x_0 = \pi/\beta, \qquad z_0 = \pi/\delta.$$

Здесь β, δ — модули проекций волнового вектора возмущения $\boldsymbol{k}$ на оси координат x_1, x_3.

2. Уравнения энергетического баланса и функционалы. Определим кинетическую энергию возмущений как интеграл по области течения вида

$$E(t) = \int\limits_\Omega \frac{\rho u_i'^2}{2}\,d\Omega.$$

Для эволюции величины $E(t)$ из уравнений (3), (4) аналогично [8] выводится уравнение энергетического баланса. Для этого уравнения (3) и (4) умножаются на $u_i'^2$ и u_i' соответственно и складываются. При этом в левой части получившегося соотношения выделяется ряд слагаемых в дивергентной форме:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\,(\rho u_i'^2) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,(\rho u_i'^2 u_j') + \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x_j}\,(\rho u_i'^2) + \rho u_i' u_j'\,\frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_j} =$$
$$= -u_i'\,\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\,u_i'\,\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big(\alpha + \frac{1}{3}\Big)u_i'\,\frac{\partial}{\partial x_i}\,\frac{\partial u_j'}{\partial x_j}. \tag{7}$$

При интегрировании равенства (7) по области Ω дивергентные слагаемые в левой части переходят в интегралы по границе, которые в силу граничных условий на возмущения обращаются в нуль. Слагаемые в правой части интегрируются по частям, получаемые при этом граничные интегралы также обращаются в нуль. В результате имеем интегральное уравнение вида

$$\frac{dE}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \frac{\rho u_i'^2}{2}\,d\Omega = J_1 + J_2 - \frac{1}{\mathrm{Re}}\,(J_3 + \alpha J_4). \tag{8}$$

Слагаемое

$$J_1 = -\int\limits_{\Omega} \rho u_i' u_j' \,\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\,d\Omega$$

описывает обмен энергией между возмущением и основным потоком. Интеграл

$$J_2 = \int\limits_{\Omega} p' \,\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\,d\Omega$$

можно интерпретировать как работу при пульсационном сжатии (расширении) газа, а интегралы

$$J_3 = \int\limits_{\Omega} \Big[\Big(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\Big)^2\Big]\,d\Omega, \qquad J_4 = \int\limits_{\Omega} \Big(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\Big)^2\,d\Omega$$

соответствуют процессам диссипации энергии.

В приведенных выражениях знаки интегралов J_1, J_2 не определены, в то время как J_3, J_4 неотрицательны. При уменьшении числа Рейнольдса Re начиная с некоторого значения Re_{cr} диссипативные слагаемые J_3, J_4 преобладают, при этом производная $dE/dt < 0$ и любые возмущения со временем затухают. Это позволяет сформулировать на основе уравнения (8) вариационную задачу для оценки критического числа Рейнольдса Re_{cr}, которое соответствует условию $dE/dt = 0$ и вычисляется как минимум функционала:

$$\mathrm{Re}_{cr} = \min\Big(\frac{J_3 + \alpha J_4}{J_1 + J_2}\Big). \tag{9}$$

Из равенства (9) следует, что при увеличении объемной вязкости (или параметра α) увеличивается критическое число Рейнольдса Re_{cr}, но для получения конкретного значения Re_{cr} необходимо решить вариационную задачу на собственные значения [13].

Вместе с тем уравнение (8) выведено аналогично подобному уравнению для несжимаемой жидкости [13] и в таком виде не учитывает явно особенности возмущений в сжимаемых течениях. В частности, в отличие от несжимаемой жидкости полная энергия возмущений в газе, тем более в молекулярном, помимо кинетической составляющей $E(t)$ должна в какой-либо форме учитывать внутреннюю энергию. Кроме того, в (8) отсутствует явная зависимость от числа Маха M_0. Это объясняется тем, что при выводе (8) не были использованы уравнения энергии (5) и состояния (6).

Уравнение энергетического баланса (8) преобразуем следующим образом. Используя равенства (2), уравнения неразрывности (3) и состояния (6), запишем уравнение (5) в виде

$$p'\,\frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\rho T}{\gamma(\gamma-1)\,\mathrm{M}_0^2}\Big) - \frac{1}{(\gamma-1)\,\mathrm{M}_0^2}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(u_i' + \mathrm{M}_0^2\,u_i p' - \frac{1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}\,\frac{\partial T'}{\partial x_i}\Big). \tag{10}$$

После подстановки выражений (10) в интеграл J_2 дивергентные слагаемые в силу граничных условий на возмущения обращаются в нуль и в левой части уравнения (8) выделяется производная по времени от интеграла [15]:

$$E_t(t) = \int\limits_{\Omega} \rho\Big(\frac{u_i'^2}{2} + \frac{T}{\gamma(\gamma-1)\,\mathrm{M}_0^2}\Big)\,d\Omega.$$

С учетом выбранного способа обезразмеривания нетрудно показать, что в размерных переменных слагаемое $\rho T/[\gamma(\gamma-1)\,\mathrm{M}_0^2]$ есть внутренняя энергия газа в единице объема. Очевидно, что энергетический функционал E_t положительно определен. Преобразованное таким образом уравнение энергетического баланса принимает вид

$$\frac{dE_t}{dt} = \Phi \equiv -\int\limits_{\Omega} \Big\{(1+\rho')u_i'u_j'\,\frac{\partial U_{s,i}}{\partial x_j} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big[\Big(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\Big)^2 + \Big(\alpha+\frac{1}{3}\Big)\Big(\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\Big)^2\Big]\Big\}\,d\Omega. \qquad (11)$$

Для (11) также можно сформулировать вариационную задачу на собственные значения для нахождения критического числа Рейнольдса Re_{cr}. С целью дальнейшего упрощения уравнения (11) проведем в нем частичное разделение переменных, представив зависимости возмущений скорости, плотности и температуры от периодической координаты x_3 в виде

$$\begin{gathered} u_1' = u_1''(x_1,x_2)\cos(\delta x_3), \quad u_2' = u_2''(x_1,x_2)\cos(\delta x_3), \quad u_3' = u_3''(x_1,x_2)\sin(\delta x_3), \\ \rho' = \rho''(x_1,x_2)\cos(\delta x_3), \qquad T' = T''(x_1,x_2)\cos(\delta x_3). \end{gathered} \qquad (12)$$

Амплитудные функции u_i'', ρ'', T'' при $x_1 = \pm\pi/\beta$ удовлетворяют периодическим граничным условиям, а на непроницаемых границах $x_2 = \pm 1/2$ принимают нулевые значения. Используя представление (12), в уравнении (11) выполним интегрирование по переменной x_3 в пределах $[-\pi/\delta; \pi/\delta]$. Как показано в [14], операции варьирования и частичного интегрирования по однородным координатам перестановочны и изменение их порядка не меняет исходную вариационную задачу. В результате получаем

$$\frac{dE_t''}{dt} = \Phi'' \equiv -\int\limits_S \Big\{u_1''u_2'' + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Big[\Big(\frac{\partial u_1''}{\partial x_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u_1''}{\partial x_2}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u_2''}{\partial x_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u_2''}{\partial x_2}\Big)^2 +$$

$$+ \Big(\frac{\partial u_3''}{\partial x_1}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u_3''}{\partial x_2}\Big)^2 + \delta^2(u_1''^2 + u_2''^2 + u_3''^2) + \Big(\alpha+\frac{1}{3}\Big)\Big(\frac{\partial u_1''}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2''}{\partial x_2} + \delta u_3''\Big)^2\Big]\Big\}dS. \qquad (13)$$

Из выражения (13) следует, что после преобразования (11) варьируемый функционал Φ'' в правой части становится квадратичным по амплитудным функциям u_i''.

3. Спектральная задача. Придавая функциям u_k'' в функционале Φ'' малые гладкие вариации $u_k'' + \delta u_k''$, допускаемые граничными условиями, выделим в нем линейный по вектору приращений функционал $L(\delta u_k'')$, из которого следуют уравнения Эйлера — Лагранжа

$$\begin{gathered} \Delta_2 u_1'' + \Big(\alpha+\frac{1}{3}\Big)\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{\partial u_1''}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2''}{\partial x_2} + \delta u_3''\Big) = \frac{\mathrm{Re}}{2}\,u_2'', \\ \Delta_2 u_2'' + \Big(\alpha+\frac{1}{3}\Big)\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\frac{\partial u_1''}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2''}{\partial x_2} + \delta u_3''\Big) = \frac{\mathrm{Re}}{2}\,u_1'', \\ \Delta_2 u_3'' - \delta\Big(\alpha+\frac{1}{3}\Big)\Big(\frac{\partial u_1''}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2''}{\partial x_2} + \delta u_3''\Big) = 0, \end{gathered} \qquad (14)$$

где оператор Δ_2 имеет вид

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \delta^2.$$

Система уравнений (14) определяет дифференциальную задачу на собственные значения со спектральным параметром Re.

Вектор пульсации скорости $\boldsymbol{u}''$ представим в виде

$$\boldsymbol{u}'' \equiv (u_1'', u_2'', u_3'') = \boldsymbol{v}\exp(i\beta x_1), \qquad (15)$$

где $\boldsymbol{v} = (u(x_2), v(x_2), w(x_2))$ — вектор амплитуд возмущений; β — абсолютная величина проекции волнового вектора на координатную ось x_1; i — мнимая единица. Подставляя (15) в уравнения Эйлера — Лагранжа (14), получаем следующую систему дифференциальных уравнений для амплитуд u, v, w:

$$\begin{gathered}
\frac{d^2u}{dy^2} + i\beta\Big(\alpha + \frac{1}{3}\Big)\frac{dv}{dy} - \Big[\beta^2\Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big) + \delta^2\Big]u - \frac{\mathrm{Re}}{2}\, v + i\beta\delta\Big(\alpha + \frac{1}{3}\Big)w = 0, \\
\Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big)\frac{d^2v}{dy^2} + i\beta\Big(\alpha + \frac{1}{3}\Big)\frac{du}{dy} + \delta\Big(\alpha + \frac{1}{3}\Big)\frac{dw}{dy} - \frac{\mathrm{Re}}{2}\, u - (\beta^2 + \delta^2)v = 0, \\
\frac{d^2w}{dy^2} - \delta\Big(\alpha + \frac{1}{3}\Big)\frac{dv}{dy} - i\beta\delta\Big(\alpha + \frac{1}{3}\Big)u - \Big[\delta^2\Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big) + \beta^2\Big]w = 0, \\
u\big|_{y=\pm1/2} = v\big|_{y=\pm1/2} = w\big|_{y=\pm1/2} = 0.
\end{gathered} \tag{16}$$

Здесь и далее координата x_2 переобозначена через y. Отметим, что система уравнений (16) не сводится к системе меньшего порядка линейной заменой переменных, как в линейной теории устойчивости (ср. [6]), поэтому аналитические результаты удается получить лишь в частных случаях, которые рассмотрены ниже.

3.1. *Постоянная мода* $\beta = \delta = 0$. В данном случае система (16) принимает вид

$$\begin{gathered}
\frac{d^2u}{dy^2} - \frac{\mathrm{Re}}{2}\, v = 0, \quad \Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big)\frac{d^2v}{dy^2} - \frac{\mathrm{Re}}{2}\, u = 0, \quad \frac{d^2w}{dy^2} = 0, \\
u\big|_{y=\pm1/2} = v\big|_{y=\pm1/2} = w\big|_{y=\pm1/2} = 0.
\end{gathered} \tag{17}$$

Третье уравнение системы (17) интегрируется отдельно и имеет общее решение

$$w = c_1x_2 + c_2,$$

которое при нулевых граничных условиях тождественно обращается в нуль.

Характеристическое уравнение сокращенной таким образом системы (17) принимает вид

$$\lambda^4 - (\mathrm{Re}/2)^2(\alpha + 4/3)^{-1} = 0.$$

Корни этого уравнения есть

$$\lambda_{1,2} = \pm a, \qquad \lambda_{3,4} = \pm ia, \qquad a = \sqrt{\mathrm{Re}/2}(\alpha + 4/3)^{-1/4}.$$

Общее решение сокращенной системы (17) записывается в виде

$$\boldsymbol{V} = c_1\boldsymbol{V}_1\, \mathrm{e}^{ax_2} + c_2\boldsymbol{V}_2\, \mathrm{e}^{-ax_2} + c_3\boldsymbol{V}_3\cos(ax_2) + c_4\boldsymbol{V}_4\sin(ax_2),$$

где $\boldsymbol{V} = (u, v)$; $\boldsymbol{V}_k = (u_k, v_k)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ — собственные векторы. Используя однородные граничные условия, получаем $\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_2 \equiv 0$, нетривиальные решения возможны в двух случаях: либо

$$\boldsymbol{V}_3 \neq 0, \qquad \boldsymbol{V}_4 = 0, \qquad \cos(a/2) = 0, \tag{18}$$

либо

$$\boldsymbol{V}_3 = 0, \qquad \boldsymbol{V}_4 \neq 0, \qquad \sin(a/2) = 0. \tag{19}$$

В результате из условий (18) и (19) следует, что спектры собственных значений соответственно имеют вид

$$\mathrm{Re}^{(0)}_{cr,n} = 2\pi^2(2n-1)^2(\alpha + 4/3)^{1/2}, \quad \mathrm{Re}^{(0)}_{s,n} = 8\pi^2n^2(\alpha + 4/3)^{1/2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Критическое значение числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{cr}^{(0)}$ определяется как минимальное из множеств $\mathrm{Re}_{1,n}^{(0)}$ и $\mathrm{Re}_{2,n}^{(0)}$:

$$\mathrm{Re}_{cr}^{(0)} = \min_{n\in\mathbb{N}} \big(\mathrm{Re}_{cr,n}^{(0)}, \mathrm{Re}_{s,n}^{(0)}\big) = 2\pi^2(\alpha + 4/3)^{1/2}.$$

3.2. *Продольные моды $\beta \ll 1$, $\delta = 0$.* При $\delta = 0$ система уравнений (16) сводится к системе вида

$$\begin{gathered}
\frac{d^2u}{dy^2} + i\beta\Big(\alpha + \frac{1}{3}\Big)\frac{dv}{dy} - \beta^2\Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big)u - \frac{\mathrm{Re}}{2}\,v = 0,\\
\Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big)\frac{d^2v}{dy^2} + i\beta\Big(\alpha + \frac{1}{3}\Big)\frac{du}{dy} - \frac{\mathrm{Re}}{2}\,u - \beta^2 v = 0,\\
\frac{d^2w}{dy^2} - \beta^2 w = 0,\\
u\big|_{y=\pm1/2} = v\big|_{y=\pm1/2} = w\big|_{y=\pm1/2} = 0.
\end{gathered} \tag{20}$$

Уравнение для трансверсальной компоненты в (20) интегрируется отдельно и имеет общее решение

$$w = c_1\,\mathrm{e}^{\beta x_2} + c_2\,\mathrm{e}^{-\beta x_2}.$$

Подставляя это решение в нулевые граничные условия для w, получаем однородную систему для произвольных постоянных

$$c_1\,\mathrm{e}^{\beta/2} + c_2\,\mathrm{e}^{-\beta/2} = 0, \qquad c_1\,\mathrm{e}^{-\beta/2} + c_2\,\mathrm{e}^{\beta/2} = 0.$$

Отсюда следует, что при $\beta \ne 0$ решение $w \equiv 0$.

Для сокращенной таким образом системы (20) характеристическое уравнение принимает вид неполного уравнения четвертой степени, которое можно записать в стандартном виде [16]

$$\lambda^4 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0, \tag{21}$$

где

$$p = -2\beta^2, \qquad q = i\,\mathrm{Re}\,\beta(1 + 3\alpha)/(4 + 3\alpha), \qquad r = \beta^4 - 3\,\mathrm{Re}^2/[4(4 + 3\alpha)].$$

Корни уравнения (21) вычисляются через корни резольвентного кубического уравнения, которое записывается в приведенном виде:

$$z^3 + p_1 z + q_1 = 0,$$

$$p_1 = \frac{3\,\mathrm{Re}^2}{4 + 3\alpha} - \frac{16}{3}\,\beta^4, \qquad q_1 = \frac{\mathrm{Re}}{4 + 3\alpha}\,2(9\alpha^2 + 18\alpha + 17)\beta^2 - \frac{128}{27}\,\beta^6.$$

Дискриминант кубической резольвенты

$$D = (p_1/3)^3 + (q_1/2)^2 > 0.$$

Отсюда следует, что для произвольных β уравнение (21) имеет два вещественных и два комплексно-сопряженных корня. Однако из-за громоздкости выражений их дальнейший анализ в общем случае затруднен.

Рассмотрим длинноволновое приближение, полагая $\beta \ll 1$. В общем случае корни уравнения (21) вычисляются по формулам [16]

$$\lambda_1 = \Big(\sqrt{z_1 + 4\beta^2/3} + \sqrt{z_2 + 4\beta^2/3} + \sqrt{z_3 + 4\beta^2/3}\,\Big)/2,$$

$$\lambda_2 = \big(\sqrt{z_1 + 4\beta^2/3} - \sqrt{z_2 + 4\beta^2/3} - \sqrt{z_3 + 4\beta^2/3}\,\big)/2,$$
$$\lambda_3 = \big(-\sqrt{z_1 + 4\beta^2/3} + \sqrt{z_2 + 4\beta^2/3} - \sqrt{z_3 + 4\beta^2/3}\,\big)/2,$$
$$\lambda_4 = \big(-\sqrt{z_1 + 4\beta^2/3} - \sqrt{z_2 + 4\beta^2/3} + \sqrt{z_3 + 4\beta^2/3}\,\big)/2,$$

где z_k $(k = 1, 2, 3)$ — корни резольвентного кубического уравнения. С точностью до членов порядка $O(\beta^4)$ корни характеристического уравнения (21) выражаются следующим образом:

$$\lambda_{1,2} = \pm a_1 + ib, \qquad \lambda_{3,4} = \pm i(a_2 \mp b),$$
$$a_{1,2} = \sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{2}}\Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big)^{-1/4}\Big[1 \pm \frac{\beta^2(7+3\alpha)^2}{36\,\mathrm{Re}}\Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big)^{-1/2}\Big], \quad b = \frac{\beta(1+3\alpha)}{6}\Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big)^{-1/2}.$$

Так как в сокращенной системе (20) коэффициенты комплекснозначные, амплитуды пульсаций скорости u, v выражаются через вещественную часть общего решения этой системы:

$$\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{V}) = \mathrm{Re}\Big(\sum_{k=1}^{4} c_k \boldsymbol{V}_k\, \mathrm{e}^{\lambda_k}\Big) \tag{22}$$

$(\boldsymbol{V}_k = (u_{k1} + iu_{k2}, v_{k1} + iv_{k2})$ — комплекснозначные собственные векторы).

Рассматривая каждое слагаемое в (22) отдельно, с учетом однородных граничных условий для компонент собственных векторов при $k = 1, 2$ получаем системы

$$q_{k1}\cos{(b/2)} - q_{k2}\sin{(b/2)} = 0, \quad q_{k1}\cos{(b/2)} + q_{k2}\sin{(b/2)} = 0, \quad q_{kj} = (u_{kj}, v_{kj}).$$

Нетривиальные решения этих систем имеют место при условии $\sin b = 0$, что в случае $\beta \neq 0$ исключено. Отсюда следует $\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_2 = 0$. Аналогично для компонент собственных векторов при $k = 3, 4$ имеют место однородные системы вида

$$q_{k1}\cos\Big(\frac{a_2 \mp b}{2}\Big) \mp q_{k2}\sin\Big(\frac{a_2 \mp b}{2}\Big) = 0, \qquad q_{k1}\cos\Big(\frac{a_2 \mp b}{2}\Big) \pm q_{k2}\sin\Big(\frac{a_2 \mp b}{2}\Big) = 0,$$
$$q_{kj} = (u_{kj}, v_{kj}),$$

где верхние знаки соответствуют случаю $k = 3$, а нижние — $k = 4$. Для нетривиальной разрешимости этих систем необходимо выполнение условий

$$\sin{(a_2 \mp b)} = 0. \tag{23}$$

С учетом (23) получаем уравнения для определения собственных значений Re:

$$x^2 - p_\pm x - s = 0. \tag{24}$$

Здесь

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\mathrm{Re}/2}(\alpha + 4/3)^{-1/4}, \qquad s = \beta^2(7+3\alpha)^2/[24(4+3\alpha)], \\ p_\pm &= \pi n[1 \pm \beta(1+3\alpha)(\alpha+4/3)^{-1/2}/(6\pi n)], \qquad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \tag{25}$$

верхний знак соответствует первому условию в (23).

Корни квадратного уравнения (24) с точностью до членов порядка $O(\beta^3)$ имеют вид

$$x_1 = \pi n\Big[1 \pm \frac{\beta(1+3\alpha)}{6\pi n}\Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big)^{-1/2}\Big] + \frac{\beta^2\pi n}{4}\Big[\frac{(1+3\alpha)^2}{(6\pi n)^2}\Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big)^{-1} + \frac{(7+3\alpha)^2}{18(\pi n)^2}\Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big)^{-1}\Big],$$
$$x_2 = -\frac{\beta^2\pi n}{4}\Big[\frac{(1+3\alpha)^2}{(6\pi n)^2}\Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big)^{-1} + \frac{(7+3\alpha)^2}{18(\pi n)^2}\Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big)^{-1}\Big].$$

Корень x_2 в дальнейшем не рассматривается, так как ему соответствует внепорядковая зависимость $\mathrm{Re} \sim O(\beta^4)$, которой пренебрегалось выше в выражениях для корней λ_k характеристического уравнения.

Спектры собственных значений Re с точностью до членов порядка $O(\beta^3)$ для корня x_1 определяются соотношениями

$$\mathrm{Re}_n^{(\beta)} = 2\pi^2 n^2 \Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big)^{1/2} \Big\{ \Big[1 \pm \frac{\beta(1+3\alpha)}{6\pi n} \Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big)^{-1/2} \Big]^2 + \\ + \frac{\beta^2}{2} \Big[\frac{(1+3\alpha)^2}{(6\pi n)^2} \Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big)^{-1} + \frac{(7+3\alpha)^2}{18(\pi n)^2} \Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big)^{-1} \Big] \Big\}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{26}$$

где знак “+” соответствует первому условию в (23).

Из (26) следует, что минимальное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_{cr}^{(\beta)}$, определяемое для длинноволновых продольных мод, есть

$$\mathrm{Re}_{cr}^{(\beta)} = 2\pi^2 \Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big)^{1/2} \Big[1 - \frac{\beta(1+3\alpha)}{3\pi} \Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big)^{-1/2} + \frac{\beta^2}{72\pi^2} (45\alpha^2 + 102\alpha + 101) \Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big)^{-1} \Big].$$

3.3. *Трансверсальные моды $\beta = 0$, $\delta \ll 1$.* Изучение данных мод представляет интерес, так как для несжимаемого течения Куэтта критическое число Рейнольдса, наиболее близкое к экспериментальным значениям, получено именно для трансверсальной моды [13]. При $\beta = 0$ система уравнений (20) принимает вид

$$\begin{gathered} \frac{d^2u}{dy^2} - \delta^2 u - \frac{\mathrm{Re}}{2}\, v = 0, \\ \Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big) \frac{d^2 v}{dy^2} + \delta \Big(\alpha + \frac{1}{3}\Big) \frac{dw}{dy} - \frac{\mathrm{Re}}{2}\, u - \delta^2 v = 0, \\ \frac{d^2 w}{dy^2} - \delta \Big(\alpha + \frac{1}{3}\Big) \frac{dv}{dy} - \delta^2 \Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big) w = 0, \\ u\big|_{y=\pm 1/2} = v\big|_{y=\pm 1/2} = w\big|_{y=\pm 1/2} = 0. \end{gathered} \tag{27}$$

Характеристическое уравнение системы (27) записывается следующим образом:

$$\lambda^6 - 3\delta^2 \lambda^4 + \frac{3}{4} \Big(4\delta^4 - \frac{\mathrm{Re}^2}{4+3\alpha} \Big) \lambda^2 - \delta^2 \Big(\delta^4 - \frac{\mathrm{Re}^2}{4} \Big) = 0. \tag{28}$$

С помощью замены $z = \lambda^2 - \delta^2$ это уравнение сводится к приведенному кубическому уравнению

$$z^3 + p_1 z + q_1 = 0,$$

где

$$p_1 = -(\mathrm{Re}/2)^2 (\alpha + 4/3)^{-1}, \qquad q_1 = \delta^2\, \mathrm{Re}^2 (1+3\alpha)(\alpha + 4/3)^{-1}/12.$$

Дискриминант этого уравнения

$$D = (p_1/3)^3 + (q_1/2)^2 < 0$$

для характерной зависимости $\mathrm{Re}\,(\alpha)$ остается отрицательным даже в случае $\delta \sim O(1)$. При этом приведенное кубическое уравнение имеет три вещественных корня, определяемых формулами Кардано [16]:

$$z_k = 2\xi^{1/3} \cos\,[(\varphi + 2k\pi)/3], \qquad k = 0, 1, 2.$$

Здесь

$$\xi = \sqrt{-\Big(\frac{p_1}{3}\Big)^3} = \Big[\frac{\mathrm{Re}}{2\sqrt{3}}\Big(\alpha + \frac{4}{3}\Big)^{-1/2}\Big]^3, \quad \cos\varphi = -\frac{q_1}{2\xi} = -\frac{\delta^2\sqrt{3}}{\mathrm{Re}}\,(1+3\alpha)\Big(\alpha+\frac{4}{3}\Big)^{1/2}.$$

Оставляя в выражениях для z_k слагаемые порядка не выше $O(\delta^2)$, для корней характеристического уравнения (28) получаем выражения

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{z_0+\delta^2} = \pm\delta(\alpha+4/3)^{1/2},$$

$$\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{z_1+\delta^2} = \pm\sqrt{\mathrm{Re}(\alpha+4/3)^{-1/2}/2+\delta^2(5-3\alpha)/6},$$

$$\lambda_{5,6} = \pm\sqrt{z_2+\delta^2} = \pm i\sqrt{\mathrm{Re}(\alpha+4/3)^{-1/2}/2-\delta^2(5-3\alpha)/6}.$$

Таким образом, первые четыре корня λ_k $(k = 1,2,3,4)$ вещественные, а корни $\lambda_{5,6}$ комплексно-сопряженные, чисто мнимые.

Поскольку вектор амплитуд пульсаций скорости $\boldsymbol{v}$ вещественный, он выражается через вещественную часть общего решения системы (27):

$$\boldsymbol{v} = \mathrm{Re}\,(\boldsymbol{V}) = \mathrm{Re}\Big(\sum_{k=1}^{4} c_k\boldsymbol{V}_k\,\mathrm{e}^{\lambda_k}\Big) \tag{29}$$

$(\boldsymbol{V}_k = (u_{k1}+iu_{k2}, v_{k1}+iv_{k2}, w_{k1}+iw_{k2})$ — комплекснозначные собственные векторы).

Для каждого слагаемого в (29) с учетом однородных граничных условий для амплитуд следует, что собственные векторы, соответствующие вещественным корням, равны нулю:

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{V}_3 = \boldsymbol{V}_4 = 0.$$

Для компонент собственных векторов при $k = 5,6$ имеют место однородные системы вида

$$q_{k1}\cos(|\lambda_k|/2) - q_{k2}\sin(|\lambda_k|/2) = 0, \qquad q_{k1}\cos(|\lambda_k|/2) + q_{k2}\sin(|\lambda_k|/2) = 0,$$

$$q_{kj} = (u_{kj}, v_{kj}, w_{kj}).$$

Нетривиальные решения этих систем существуют при $\sin|\lambda_k| = 0$. В этом случае спектр собственных значений имеет вид

$$\mathrm{Re}_n^{(\delta)} = 2(\alpha+4/3)^{1/2}[\pi^2n^2+\delta^2(5/3-\alpha)/2], \qquad n = 1,2,3,\ldots.$$

Следовательно, критическое число Рейнольдса как минимальное из множества собственных значений для трансверсальных мод есть

$$\mathrm{Re}_{cr}^{(\delta)} = 2\pi^2(\alpha+4/3)^{1/2}[1+\delta^2(5/3-\alpha)/(2\pi^2)].$$

Заключение. В рамках нелинейной энергетической теории устойчивости сжимаемых течений построен энергетический функционал, приводящий к эффективно разрешимой вариационной задаче для определения критического числа Рейнольдса ЛТП Re_{cr}.

Для течения Куэтта сжимаемого газа получены асимптотические оценки устойчивости различных мод, содержащие в главном порядке характерную зависимость $\mathrm{Re}_{cr} \sim \sqrt{\alpha+4/3}$. Это означает, что в реальном для двухатомных газов диапазоне отношений объемной вязкости к сдвиговой (параметра α) с ростом объемной вязкости критическое число Рейнольдса может значительно увеличиться. Выполненные оценки не противоречат данным по влиянию объемной вязкости на устойчивость пограничных слоев на пластине, полученным в рамках линейной теории [4, 7], так как в пристенных и свободных сдвиговых слоях механизмы ЛТП различны.

Рассмотренные асимптотики являются длинноволновыми приближениями. Это позволяет заключить, что полученная зависимость описывает воздействие объемной вязкости на крупномасштабные вихревые структуры, характерные для развития неустойчивости Кельвина — Гельмгольца.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Леонтович М. А.** Замечания к теории поглощения звука в газах // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1936. Т. 6, вып. 6. С. 561–576.
2. **Nerushev A., Novopashin S.** Rotational relaxation and transition to turbulence // Phys. Lett. 1997. V. A232. P. 243–245.
3. **Жданов В. М.** Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах / В. М. Жданов, М. Я. Алиевский. М.: Наука, 1989.
4. **Bertolotti F. B.** The influence of rotational and vibrational energy relaxation on boundary-layer stability // J. Fluid Mech. 1998. V. 372. P. 93–118.
5. **Mack L. M.** Boundary layer stability theory. Pasadena (California), 1969. (Rev. A. / Jet propulsion lab.; Doc. 900-277).
6. **Гапонов С. А.** Развитие возмущений в сжимаемых потоках / С. А. Гапонов, А. А. Маслов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.
7. **Григорьев Ю. Н., Ершов И. В.** К вопросу о влиянии вращательной релаксации на ламинарно-турбулентный переход // Тез. докл. Юбил. науч. конф., посвящ. 40-летию Ин-та механики Моск. гос. ун-та, Москва, 22–26 нояб. 1999 г. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1999. С. 65–66.
8. **Григорьев Ю. Н., Ершов И. В.** Подавление вихревых возмущений релаксационным процессом в молекулярном газе // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 4. С. 22–34.
9. **Browand F. K., Chih Ming Ho.** The mixing layer: an example of quasi two-dimensional turbulence // J. Mecanique Teor. Appl. 1983. Spec. nr. P. 99–120.
10. **Григорьев Ю. Н., Ершов И. В., Зырянов К. В., Синяя А. В.** Численное моделирование эффекта объемной вязкости на последовательности вложенных сеток // Вычисл. технологии. 2006. Т. 11, № 3. С. 36–49.
11. **Ковеня В. М.** Метод расщепления в задачах газовой динамики / В. М. Ковеня, Н. Н. Яненко. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1981.
12. **Григорьев Ю. Н., Ершов И. В., Ершова Е. Е.** Влияние колебательной релаксации на пульсационную активность в течениях возбужденного двухатомного газа // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 3. С. 15–23.
13. **Джозеф Д.** Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981.
14. **Гольдштик М. А.** Гидродинамическая устойчивость и турбулентность / М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1977.
15. **Григорьев Ю. Н.** К энергетической теории устойчивости сжимаемых течений // Вычисл. технологии. 2006. Т. 11. С. 55–62. (Спецвыпуск).
16. **Бронштейн И. Н.** Справочник по математике / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию 7/XII 2006 г.,
в окончательном варианте — 2/III 2007 г.