УДК 533

РЕШЕНИЕ С ЛИНЕЙНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ ДЛЯ ПОДМОДЕЛИ ОДНОМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА

Ю. В. Юлмухаметова

Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН,
450054 Уфа, Россия
E-mail: yulmukhametova.yulya@yandex.ru

Изложен метод нахождения точных решений уравнений газовой динамики с линейным полем скоростей. С использованием данного метода найдены точные решения для одной подмодели эволюционного типа, которая была полностью интегрирована для случая политропного газа. Приведены примеры движения частиц для полученных точных решений.

Ключевые слова: подмодели ранга два газовой динамики, линейное поле скоростей, плоский коллапс политропного газа.

DOI: 10.15372/PMTF20160101

Введение. Для уравнений трехмерной газовой динамики с решением в виде линейного поля скоростей найдено 11 подмоделей [1]. Каждая подмодель состоит из матричного дифференциального уравнения второго порядка и векторного дифференциального уравнения, т. е. является системой 25-го порядка. Нахождение частных решений такой системы существенно затруднено. Один из способов нахождения точных решений заключается в рассмотрении всех возможных инвариантных подмоделей системы уравнений газовой динамики с общим уравнением состояния и поиске для них решения с линейным полем скоростей. При этом необязательно все компоненты вектора скорости должны быть линейными по инвариантным переменным. Инварианты можно выбрать таким образом, чтобы в канонической форме записи подмодели уравнения для одной (подмодели ранга три) или двух (подмодели ранга два) компонент инвариантной скорости не содержали градиент инвариантного давления. Эти компоненты скорости считаются функциями общего вида, остальные — линейными по некоторым инвариантным переменным. Таким образом, общие модели движения газа с линейным полем скоростей можно упростить, выполнив постановку задачи в инвариантах подалгебры, допускаемой уравнениями газовой динамики. Такой метод нахождения решений уравнений газовой динамики позволяет обобщить решение с линейным полем скоростей на решения с линейным полем скоростей по всем пространственным переменным. В данной работе рассмотрен пример нахождения таких решений для подмодели одномерных движений газа.

1. Постановка задачи. Рассматривается инвариантная подмодель 2.27 ранга два системы уравнений газовой динамики с уравнением состояния общего вида [2]. Подмо-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-97027).

дель одномерных движений газа с плоскими волнами приводится к системе эволюционного типа

$$u_t + uu_x + \rho^{-1} p_x = 0, \qquad v_t + uv_x = 0, \qquad w_t + uw_x = 0,$$
$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \tag{1}$$
$$p_t + up_x + \rho f_\rho u_x = 0 \quad \text{или} \quad S_t + uS_x = 0,$$

где $u = u(t, x)$, $v = v(t, x)$, $w = w(t, x)$ — компоненты вектора скорости; $p = p(t, x)$ — давление; $\rho = \rho(t, x)$ — плотность; t, x — независимые переменные; S — энтропия. Уравнение состояния имеет вид

$$p = f(\rho, S).$$

Система уравнений (1) допускает следующие преобразования эквивалентности [3]:

1) $t \to \lambda t$, $x \to \lambda x$ (растяжение);

2) $t \to t + t_1$ (перенос по времени);

3) $x \to x + x_0$ (перенос по координате x);

4) $x \to x + kt$, $u \to u + k$ (галилеев перенос по координате x);

5) $p \to p + p_0$ (перенос по величине p);

6) $p \to Rp$, $\rho \to R\rho$, $f \to Rf$ (растяжение);

7) $t \to \mu t$, $u \to \mu^{-1} u$, $p \to \mu^{-2} p$, $f \to \mu^{-2} f$ (растяжение);

8) $v \to \omega(v, w)$, $w \to \varkappa(v, w)$, $J = \omega_v \varkappa_w - \omega_w \varkappa_v \neq 0$ (невырожденная замена компонент скорости);

9) $w \to w + \eta(t, x)$, $v \to v + \xi(t, x)$, $\eta_t + u\eta_x = 0$, $\xi_t + u\xi_x = 0$ (преобразование линейных уравнений).

Здесь λ, t_1, x_0, k, p_0, μ, R — постоянные; ω, $\varkappa$ — произвольные функции. Решение уравнений газовой динамики (1) рассматривается с точностью до преобразований эквивалентности 1–9.

Решение с линейным полем скоростей для одной компоненты скорости, в уравнение которой входит градиент давления, записывается в виде

$$u = b'(t)x + c'(t)\,\mathrm{e}^{b(t)}, \tag{2}$$

где $b(t)$, $c(t)$ — некоторые функции; компоненты скорости $v(t, x)$, $w(t, x)$ являются функциями общего вида. Преобразования эквивалентности 1–9 распространяются и на функции $b(t)$, $c(t)$ соответственно:

1) $c \to \lambda c$;

3) $c' \to (c' - b'x_0)\,\mathrm{e}^{-b}$;

4) $c' \to (c' + k - b'kt)\,\mathrm{e}^{-b}$.

Кроме того, представление (2) допускает преобразование $b \to b + b_0$, $c \to c\,\mathrm{e}^{-b_0}$, где b_0 — постоянная. Далее определяются функции c, b с точностью до этих преобразований.

Подставляя (2) в (1), получаем

$$(b'' + (b')^2)x + (c'' + 2c'b')\,\mathrm{e}^b + \rho^{-1} p_x = 0,$$
$$v_t + (b'x + c'\,\mathrm{e}^b)v_x = 0, \qquad w_t + (b'x + c'\,\mathrm{e}^b)w_x = 0,$$
$$\rho_t + (b'x + c'\,\mathrm{e}^b)\rho_x + \rho b' = 0,$$
$$p_t + (b'x + c'\,\mathrm{e}^b)p_x + \rho f_\rho b' = 0 \quad \text{или} \quad S_t + (b'x + c'\,\mathrm{e}^b)S_x = 0.$$

Уравнения для энтропии, плотности и компонент скорости имеют общее решение

$$v = v(I), \quad w = w(I), \quad S = S(I), \quad \rho = g'(I)\,\mathrm{e}^{-b}, \quad I = x\,\mathrm{e}^{-b} - c, \tag{3}$$

где $g(I)$, $S(I)$, $v(I)$, $w(I)$ — произвольные функции, определяемые с точностью до постоянных слагаемых; t, I — независимые переменные. Давление определяется из уравнения состояния

$$p = f(g'(I)\,\mathrm{e}^{-b}, S(I))$$

и удовлетворяет уравнению для давления в (1). Из системы (1) следует равенство

$$(b'' + (b')^2)(I + c)\,\mathrm{e}^{b} + (c'' + 2c'b')\,\mathrm{e}^{b} + \frac{f_S S' + f_\rho\,\mathrm{e}^{-b} g''}{g'(I)} = 0, \qquad (4)$$

в которое входят функции $b(t)$, $c(t)$, зависящие только от t, и функции $S(I)$, $g(I)$, зависящие только от I. Задавая эти функции, можно определить I как функцию S и t как функцию ρ, S. Тогда из (4) можно получить уравнение состояния $p = f(\rho, S)$. Решение (4) может оказаться не удовлетворяющим свойствам нормального газа или какой-либо сплошной среды [4]. Таким образом, существуют уравнения состояния, для которых имеется решение в виде (3), содержащее четыре независимые произвольные функции.

Для конкретного уравнения состояния соотношение (4) позволяет уточнить вид произвольных функций $g(I)$, $S(I)$, $b(t)$, $c(t)$. Ниже приведен пример такого уточнения для политропного газа.

2. Модели политропного газа. Уравнение состояния для политропного газа из подмодели 5 имеет вид [1]

$$p = h(S)\rho^\gamma, \qquad (5)$$

где $h(S)$ — функция энтропии; γ — постоянная. Для политропного газа существует больше инвариантных подмоделей ранга два, чем описано в работе [2]. Их классификация и приведение к каноническому виду ранее не были выполнены. Рассматривается система (1) с уравнением состояния (5). Подставляя (5) в (4), можно записать равенство

$$S' h_S (g')^{\gamma-1} + \gamma h (g')^{\gamma-2} g'' + k_1(t) + I k_2(t) = 0, \qquad (6)$$

где $k_1(t) = (c''+2c'b')\,\mathrm{e}^{(\gamma+1)b} + c k_2(t)$; $k_2(t) = \mathrm{e}^{(\gamma+1)b}(b''+(b')^2)$. Величина k_2 пропорциональна ускорению. Уравнение (6) после дифференцирования по t принимает вид $k_1' + I k_2' = 0$. Переменные t и I независимы, значит, k_1, k_2 — постоянные. Из (6) следует, что функции b, c, g удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{gathered} b'' + (b')^2 = k_2\,\mathrm{e}^{-(\gamma+1)b}, \\ c'' + 2c'b' = (k_1 - k_2 c)\,\mathrm{e}^{-(\gamma+1)b}, \\ ((g')^\gamma h)' + (I k_2 + k_1) g' = 0. \end{gathered} \qquad (7)$$

Предложение. *С помощью преобразования* 4 $\bar{x} = x + at$, $\bar{u} = u + a$, $a = \mathrm{const}$ *постоянную* k_1 *можно считать равной нулю при* $k_2 \neq 0$.

Доказательство. Преобразование 4 (см. п. **1**) применяется к функции $u(t,x)$, заданной равенством (2):

$$\bar{u} - a = b'(\bar{x} - at) + c'\,\mathrm{e}^{b}.$$

Для того чтобы при преобразовании не менялся вид выражения для скорости $\bar{u} = \bar{b}'(t)\bar{x} + \bar{c}'(t)\,\mathrm{e}^{\bar{b}}$, необходимо преобразовать функции $b(t)$, $c(t)$ по правилу $\bar{b}' = b$, $\bar{c}' = c' - a(b't-1)\,\mathrm{e}^{-b}$. При этом сохраняется вид дифференциального уравнения для функции $b(t)$. С учетом дифференциального уравнения для $b(t)$ уравнение для функции $c(t)$ в (7) принимает вид

$$\bar{c}'' + 2b'\bar{c}' + atk_2\,\mathrm{e}^{-(\gamma+2)b} = \Big(k_1 - k_2\int\limits_{t_0}^{t}(\bar{c}' + a(b't-1)\,\mathrm{e}^{-b})\,dt\Big)\,\mathrm{e}^{-(\gamma+1)b}.$$

Уравнение для $\bar{c}$ удовлетворяет уравнениям (7), в которых выполнена замена k_1, k_2 на $\bar{k}_1$, $\bar{k}_2$. С учетом этого получаем тождество по переменной t

$$\bar{k}_1 + atk_2\,\mathrm{e}^{-b} = k_1 - k_2 \int\limits_{t_0}^{t} a(b't - 1)\,\mathrm{e}^{-b}\,dt.$$

Нетрудно показать, что выполняется равенство

$$t\,\mathrm{e}^{-b} + \int\limits_{t_0}^{t} (tb' - 1)\,\mathrm{e}^{-b}\,dt = t_0$$

(проверяется дифференцированием). Таким образом, постоянная k_1 меняется по закону $\bar{k}_1 = k_1 - ak_2t_0$. Если выбрать $a = k_1k_2^{-1}t_0^{-1}$ при $k_2 \neq 0$, то $\bar{k}_1 = 0$. Если $k_2 = 0$, то условие $\bar{k}_1 = k_1$ не меняется.

В случае ускоренного движения ($k_2 \neq 0$) с помощью преобразования растяжением 1 (см. п. **1**) можно получить $k_2 = 1$. Система (7) определяет первую модель политропного газа

$$\begin{gathered} b'' + (b')^2 = \mathrm{e}^{-(\gamma+1)b}, \\ c'' + 2c'b' + c\,\mathrm{e}^{-(\gamma+1)b} = 0, \\ ((g')^\gamma h)' + Ig' = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

В случае нулевого ускорения ($k_2 = 0$) с помощью преобразования растяжением 1 можно получить $k_1 = \varepsilon = 0$ или $k_1 = \varepsilon = 1$. В результате имеем вторую модель политропного газа

$$\begin{gathered} b'' + (b')^2 = 0, \\ c'' + 2c'b' = \varepsilon\,\mathrm{e}^{-(\gamma+1)b}, \\ ((g')^\gamma h)' + \varepsilon g' = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

С помощью преобразования эквивалентности 8 (см. п. **1**) решения (3) для v, w могут быть приведены к каноническому виду. Если годограф скорости представляет собой замкнутую кривую без самопересечений, то получаем окружность $v^2 + w^2 = 1$ для всех моментов времени и при любом x. Если годограф скорости является незамкнутой кривой без особенностей, то уравнение этой кривой может быть приведено к виду $v = 0$, w — любая функция.

3. Интегрирование модели ускоренного движения. В системе (8) последнее уравнение для функции $g(I)$ имеет решение

$$\begin{gathered} g = \Big(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\Big)^{1/(\gamma-1)} \int h^{1/\gamma}\Big(g_0 - \int \frac{I\,dI}{h^{1/\gamma}}\Big)^{1/(\gamma-1)}\,dI, \qquad \gamma \neq 1, \\ g = g_0 \int h^{-1} \exp\Big(-\int \frac{I\,dI}{h}\Big)\,dI, \qquad \gamma = 1, \end{gathered} \tag{10}$$

где g_0 — постоянная.

Уравнение для функции $b(t)$ в системе (8) после замены переменных $b' = B(b)$ принимает вид $(\dot{B}^2) + 2B^2 = 2\,\mathrm{e}^{-(\gamma+1)b}$ (точка означает дифференцирование по переменной b). Общее решение последнего уравнения имеет вид

$$\begin{gathered} B^2 = c_0\,\mathrm{e}^{-2b} + \frac{2}{1-\gamma}\,\mathrm{e}^{-(1+\gamma)b}, \qquad \gamma \neq 1, \\ B^2 = (c_0 + 2b)\,\mathrm{e}^{-2b}, \qquad \gamma = 1. \end{gathered}$$

Из этого решения определяется функция $b(t)$ в параметрическом виде (y — параметр):

$$\begin{gathered}
b = \frac{y^2 - c_0}{2}, \qquad t = \mathrm{e}^{-c_0/2} \int \mathrm{e}^{y^2/2}\, d|y|, \qquad \gamma = 1, \\
b = \frac{1}{1-\gamma} \ln \Big(\frac{1-\gamma}{2}\, (y^2 - c_0) \Big), \qquad (1-\gamma)(y^2 - c_0) > 0; \\
t = t_0 + \int \Big(\frac{1-\gamma}{2}\, (y^2 - c_0) \Big)^{\gamma/(1-\gamma)} d|y|, \qquad \gamma \neq 1.
\end{gathered} \tag{11}$$

При $\gamma = 1$ дифференциальное уравнение (8) для определения функции $c(t)$ в параметрическом виде записывается следующим образом:

$$c_{yy} + y c_y + c = 0.$$

Общее решение этого уравнения задается формулой [5. С. 377]

$$c = \mathrm{e}^{-y^2/2} \Big(c_1 + c_2 \int \mathrm{e}^{y^2/2}\, dy \Big), \qquad c_1 = \mathrm{const}, \quad c_2 = \mathrm{const}\,. \tag{12}$$

При $\gamma \neq 1$ уравнение (8) для $c(t)$ имеет вид

$$(y^2 - c_0) c_{yy} + \frac{2(2-\gamma)}{1-\gamma}\, y c_y + \frac{2c}{1-\gamma} = 0.$$

Общее решение этого уравнения задается формулой

$$c = |y^2 - c_0|^{1/(\gamma-1)} \Big(c_1 + c_2 \int |y^2 - c_0|^{\gamma/(1-\gamma)}\, dy \Big), \tag{13}$$

где c_1, c_2 — постоянные.

Решение для модели ускоренного движения определяется формулами (10)–(13).

4. Интегрирование модели без учета ускорения. Модель без учета ускорения задается системой (9). Дифференциальное уравнение для функции $g(I)$ имеет решение

$$\begin{gathered}
\varepsilon = 0: \qquad g = g_0^{1/\gamma} \int \frac{dI}{h^{1/\gamma}}, \\
\varepsilon = 1, \quad \gamma \neq 1: \qquad g = -\Big(\frac{1-\gamma}{\gamma} \Big)^{\gamma/(\gamma-1)} \Big(\int \frac{dI}{h^{1/\gamma}} + g_0 \Big)^{\gamma/(\gamma-1)}, \\
\varepsilon = 1, \quad \gamma = 1: \qquad g = -g_0 \exp \Big(- \int \frac{dI}{h} \Big),
\end{gathered} \tag{14}$$

где g_0 — постоянная.

Одно из решений дифференциального уравнения для функции $b(t)$ определяется формулой

$$b = \ln\, |t|. \tag{15}$$

Дифференциальное уравнение для функции $c(t)$ принимает вид

$$c'' + 2c'/t = \varepsilon |t|^{-(\gamma+1)}.$$

Частное решение этого уравнения определяется формулами

$$\begin{gathered}
\gamma \neq 2, \quad \gamma \neq 1: \qquad c = \frac{\varepsilon |t|^{1-\gamma}}{(1-\gamma)(2-\gamma)}, \\
\gamma = 1: \qquad c = \varepsilon \ln |t|, \\
\gamma = 2: \qquad c = -\varepsilon \, \frac{1 + \ln |t|}{t}.
\end{gathered} \tag{16}$$

Решение второй модели политропного газа задается формулами (14)–(16).

5. Примеры движения частиц газа. Мировые линии движения частиц газа определяются системой дифференциальных уравнений [4] для обеих моделей

$$\frac{dx}{dt} = b'(t)x + c'(t)\, \mathrm{e}^{b(t)}, \quad \frac{dy}{dt} = v(I), \quad \frac{dz}{dt} = w(I), \quad I = x\, \mathrm{e}^{-b} - c. \tag{17}$$

Решение системы (17) имеет вид

$$x = (c(t) + \xi)\, \mathrm{e}^{b}, \quad y = v(\xi)t + \eta, \quad z = w(\xi)t + \zeta, \tag{18}$$

где ξ, η, ζ — значения интегралов системы (18), которые можно выбрать в качестве глобальных лагранжевых координат частицы. Якобиан преобразования (18) равен e^{b} и обращается в нуль при $b \to -\infty$ или в силу (15) для модели без учета ускорения при $t \to 0$. При этом матрица Якоби имеет ранг, равный двум. Получается коллапс на плоскости $x = 0$.

Мировые линии движения частиц газа для модели без учета ускорения при $\varepsilon = 0$ задаются уравнениями

$$x = \xi |t|, \quad y = v(\xi)t + \eta, \quad z = w(\xi)t + \zeta.$$

Эти формулы определяют параметрическое уравнение прямой. Частица с лагранжевыми координатами (ξ, η, ζ) движется со скоростью $(\xi \operatorname{sign} t, v(\xi), w(\xi))$. При $t = 0$ в точке $(0, \eta, \zeta)$ находится бесконечное множество частиц с различными скоростями. Функции $v(\xi)$, $w(\xi)$ задают годограф скорости — кривую l, на которую при $t = 1$ попадают частицы из начальной точки $(0, \eta, \zeta)$. Эта кривая имеет одну точку пересечения с плоскостью $\xi = \mathrm{const}$.

При $t = -1$ частицы находятся на кривой $x = \xi$, $y = -v(\xi) + \eta$, $z = -w(\xi) + \zeta$, которая является отражением кривой l относительно точки $(0, \eta, \zeta)$.

При $t \to 0$ частицы движутся по направлению к плоскости $x = 0$ и встречаются в точке $(0, \eta, \zeta)$. Каждая частица движется по своей траектории со своей скоростью. В результате происходит фокусировка частиц в точке. При $t \to 1$ происходит разлет частиц из точки $(0, \eta, \zeta)$ плоскости $x = 0$. При $t = 1$ частицы находятся на кривой $x = \xi$, $y = v(\xi) + \eta$, $z = w(\xi) + \zeta$ (рис. 1).

Согласно замечанию о виде функций $v(\xi)$, $w(\xi)$ мировые линии движения частиц для всех моделей можно построить в двух случаях:

1) $v(\xi) = \cos\theta(\xi)$, $w(\xi) = \sin\theta(\xi)$;

2) $v(\xi) = 0$, $w(\xi)$ — произвольная функция.

Мировые линии движения частиц для модели без учета ускорения при $\varepsilon = 1$, $\gamma \neq 2$, $\gamma \neq 1$ определяются уравнениями

$$x = \Big(\frac{|t|^{1-\gamma}}{(1-\gamma)(2-\gamma)} + \xi\Big)|t|, \quad y = v(\xi)t + \eta, \quad z = w(\xi)t + \zeta.$$

Частица с лагранжевыми координатами (ξ, η, ζ) движется со скоростью $((|t|^{1-\gamma}/(1-\gamma) + \xi) \operatorname{sign} t, v(\xi), w(\xi))$ (рис. 2).

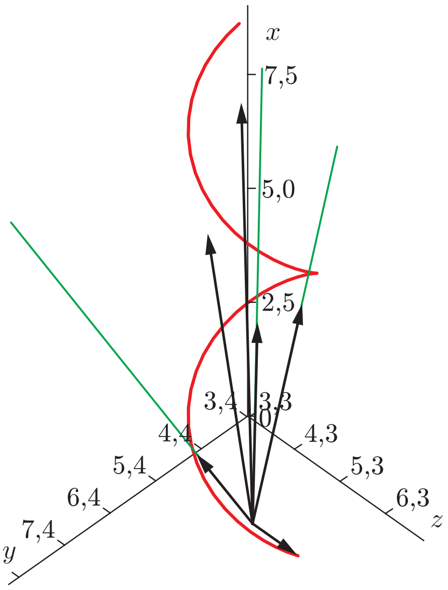

Рис. 1

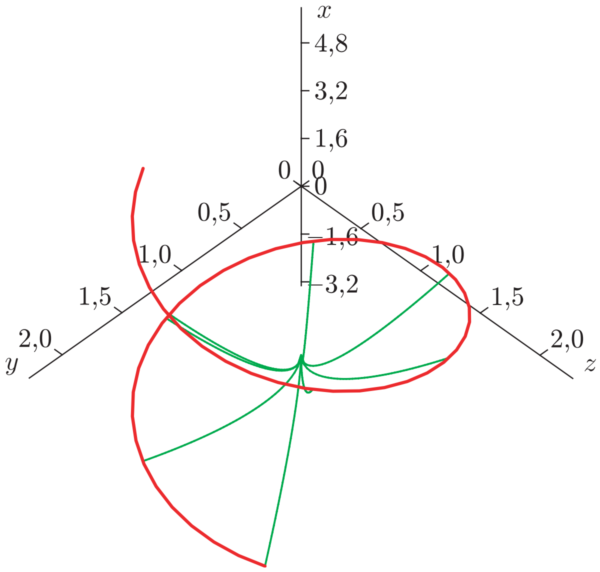

Рис. 2

Рис. 1. Траектории движения частиц для модели без учета ускорения при $\varepsilon = 0$: стрелки — направления движения частиц

Рис. 2. Траектории движения частиц для модели без учета ускорения при $\varepsilon = 1$, $\gamma \neq 1$, $\gamma \neq 2$

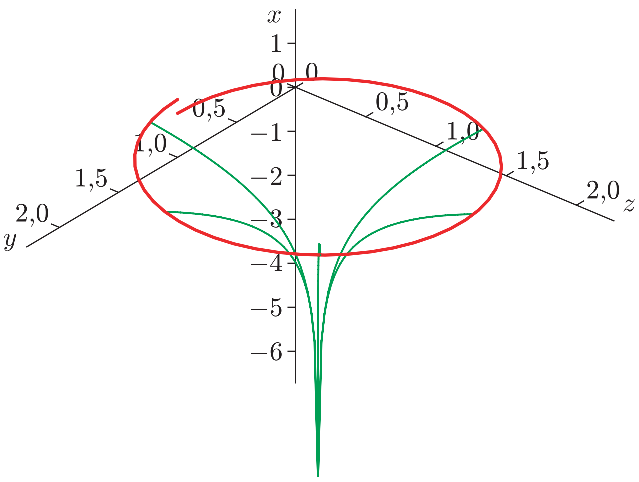

Рис. 3. Траектории движения частиц для модели без учета ускорения при $\varepsilon = 1$, $\gamma = 2$

Мировые линии движения частиц для модели без учета ускорения при $\varepsilon = 1$, $\gamma = 2$ задаются уравнениями

$$x = \Big(\xi - \frac{1 + \ln|t|}{t}\Big)|t|, \quad y = v(\xi)t + \eta, \quad z = w(\xi)t + \zeta.$$

Частица с лагранжевыми координатами (ξ, η, ζ) движется со скоростью $((\xi - t^{-1})\operatorname{sign} t, v(\xi), w(\xi))$ (рис. 3).

Таким образом, в работе изложен метод нахождения точных решений на примере одномерных движений газа. Для модели политропного газа найдены все точные решения. Построены траектории движения частиц газа для моделей без учета ускорения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Юлмухаметова Ю. В.** Подмодели газовой динамики с линейным полем скоростей // Сиб. электрон. мат. изв. 2012. Т. 9. С. 208–226.
2. **Мамонтов Е. В.** Инвариантные подмодели ранга два уравнений газовой динамики // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 50–55.
3. **Мамонтов Е. В.** Групповые свойства 2-подмоделей класса Е уравнений газовой динамики // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 1. С. 33–39.
4. **Хабиров С. В.** Аналитические методы в газовой динамике. Уфа: Гилем, 2003.
5. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. 4-е изд., испр. М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию 29/IX 2014 г.