Физика горения и взрыва

№ 2
1991 г.

УДК 536.46

А. Д. Марголин, Г. Н. Мохин, В. Г. Крупкин

ВОСПЛАМЕНЕНИЕ ТЕПЛОВЫМ ПОТОКОМ КЛИНА И КОНУСА С ИЗОТЕРМИЧЕСКИМ ОСНОВАНИЕМ

Проведен численный анализ воспламенения постоянным тепловым потоком клина и конуса конечной длины с основанием, поддерживаемым при постоянной температуре. Найдены критические условия невозможности существования стационарного распределения температуры в теле при различных режимах нагрева.

В [1] найдены характеристики воспламенения клина и конуса бесконечной длины тепловым потоком. Цель настоящей работы — теоретическое исследование условий воспламенения постоянным тепловым потоком заостренного тела типа клина и конуса конечной длины с основанием, поддерживаемым при постоянной (низкой) температуре. В данной постановке задачу можно отнести к смешанной задаче теории теплового взрыва, когда на части поверхности заданы граничные условия первого, на другой части — второго рода. Наличие холодного основания приводит к появлению критического потока тепла, ниже которого возможно стационарное распределение температуры в теле; при превышении тепловым потоком критического значения стационарное распределение температуры невозможно и происходит воспламенение. Проводится сравнение воспламенения клина и конуса с ранее рассмотренной [2] задачей воспламенения пластины постоянным потоком тепла.

В обычных предположениях твердофазной теории зажигания [3] задача о воспламенении клина или конуса в стационарной постановке сводится к двумерному уравнению теплопроводности с объемным источником тепла — гомогенной химической реакцией. Используются цилиндрическая система координат (r, φ) для клина и сферическая (r, φ) для конуса, причем зависимость всех величин от третьей пространственной переменной можно не учитывать в силу симметрии граничных условий.

Клин (сектор $0 \leqslant r \leqslant L$, $-\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$):

$$L_1(T) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{Qz}{\lambda}\exp(-E/RT) = 0.$$

расчет
в объёме
[illegible] (Кон-о)
т.е. корот., ВК.

Конус (шаровой сектор $0 \leqslant r \leqslant L$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$):

$$L_2(T) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) + \frac{Qz}{\lambda}e^{-\frac{E}{RT}} = 0.$$

Граничные условия:

$$\frac{\lambda}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi}(r, \varphi_0) = q, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi}(r, 0) = 0,$$

?

$$T(L, \varphi) = T_0, \quad r^k\frac{\partial T}{\partial r}(0, \varphi) = 0.$$

Здесь $T = T_k(r, \varphi)$ — температура ($k = 1$ — клин, $k = 2$ — конус); φ_0 — полуугол при вершине тела; L — длина; Q — тепловой эффект химической реакции; z — предэкспонент; λ — коэффициент теплопроводности; E — энергия активации; R — универсальная газовая постоянная; q — тепловой поток; T_0 — температура основания.

Согласно [1, 4], можно предположить, что тонкое тело ($\varphi_0 \ll 1$) прогрето в поперечном направлении, так что температура эффективно зависит только от радиальной переменной r и слабо зависит от угловой φ. Усредняя по [1] уравнение теплопроводности по углу φ для клина

$$\overline{L_1(T)} = \frac{1}{\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} L_1(T)\, \partial\varphi$$

и для конуса

$$\overline{L_2(T)} = \frac{1}{1 - \cos\varphi_0} \int_0^{\varphi_0} L_2(T) \sin\varphi d\varphi,$$

приходим к формуле (знак усреднения для краткости опускаем), описывающей распределение температуры в тонком клине и конусе

$$\frac{1}{r^k}\frac{d}{dr}\left(r^k \frac{dT}{dr}\right) + \frac{kq}{\lambda r \varphi_0} + \frac{Qz}{\lambda}\exp(-E/RT) = 0, \qquad (1)$$
$$r^k T'(0) = 0, \quad T(L) = T_0.$$

При усреднении уравнения для конуса во втором члене в (1) получается не φ_0/k, а $\operatorname{tg}(\varphi_0/2)$, что примерно равно φ_0/k при малых φ_0. Выражение (1) также описывает воспламенение цилиндрического или сферического образца, в котором наряду с химической реакцией имеются дополнительные источники тепловыделения, плотность которых распределена пропорционально r^{-1}, а поверхность $r = L$ поддерживается при постоянной температуре T_0.

Инертная (в отсутствие химической реакции) задача (1) имеет аналитическое решение

$$T = T_0 + q(L - r)/\lambda\varphi_0.$$

Таким образом, в случае инертного нагрева температура вершины и клина, и конуса

$$T_s = T_0 + qL/\lambda\varphi_0. \qquad (2)$$

Разложим экспоненту по Франк-Каменецкому [5], принимая за масштабную температуру T_s, введем безразмерные переменные

$$\Theta = E(T - T_s)/RT_s^2, \quad x = r/r_0, \quad r_0 = \lambda R T_s^2 \varphi_0/qE \qquad (3)$$

и запишем безразмерное усредненное уравнение теплопроводности

$$\frac{1}{x^k}\frac{d}{dx}\left(x^k \frac{d\Theta}{dx}\right) + \frac{k}{x} + \omega \exp(\Theta/(1 + \beta\Theta)) = 0 \qquad (4)$$

с граничными условиями

$$x^k\Theta'(0) = 0, \quad \Theta(x_0) = -x_0. \qquad (5)$$

Анализ (4), (5) показывает, что при малых x решение ведет себя как $\Theta = \Theta(0) - x + \ldots$, где $\Theta(0)$ — заранее неизвестная температура вершины тела. Здесь $\omega = r_0^2 EQz \exp(-E/RT_s)/\lambda RT_s$; $x_0 = L/r_0$; $\beta = RT_s/E$. Физический смысл введенных величин: r_0 — характерная длина, на которой температура уменьшается на один характеристический интервал RT_s^2/E; x_0 — безразмерная длина тела; ω — параметр, характеризующий относительную роль химической реакции и нагрева внешним тепловым потоком; β — малый параметр.

Решение (4), (5) — функция $\Theta = \Theta_k(x, \omega, x_0, \beta)$. Как показали расчеты, зависимость от β носит характер малой поправки. Это обусловлено выбором в качестве масштабной температуры T_s. В дальнейшем зависимостью от β пренебрегается.

Таким образом, условие существования стационарного решения (4), (5) дается некоторым функциональным соотношениям между безразмерными параметрами

$$\omega^* = \omega^*(x_0). \tag{6}$$

Значение температуры вершины дает максимальный предвзрывной разогрев

$$\Theta^*(0) = \Theta(x=0,\ \omega=\omega^*). \tag{7}$$

Уравнения (6), (7) решались численно. При этом использовалось два метода. Первый, обычно применяемый в теории теплового взрыва [5], основывается на нахождении зависимости $\Theta(0)(\omega)$ при заданном x_0. Если $\omega < \omega^*(x_0)$, то решение (4), (5) неединственно, при этом устойчиво самое «нижнее» решение. Когда ω достигает критического значения $\omega^*(x_0)$, устойчивое и неустойчивое решение сливаются; при $\omega > \omega^*(x_0)$ стационарного решения (4), (5) не существует. По построенной таким образом бифуркационной диаграмме определяются $\omega^*(x_0)$ и величина максимального предвзрывного разогрева $\Theta^*(0)$. Поскольку экстремум на диаграмме пологий, точно определить предвзрывной разогрев по ней трудно.

Второй метод основан на исследовании устойчивости стационарных решений (4), (5). При этом используется следующее свойство инвариантности уравнения (4) при $\beta = 0$: замена $\Theta(x) = y(x) + \Theta(0)$ ($\Theta(0)$ — пока неизвестная температура вершины, y — новая неизвестная функция) приводит к выражению

$$\frac{1}{x^k}\frac{d}{dx}\left(x^k\frac{dy}{dx}\right) + \frac{k}{x} + B\exp(y) = 0, \tag{8}$$

где $B = \omega\exp(\Theta(0))$. Краевая задача (4), (5) сводится при этом к задаче Коши для (8) с начальными условиями

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = -1, \tag{9}$$

решение которой: $y = y_k(x, B)$. Положив $y(x_0) = -x_0 - \Theta(0)$ и найдя таким образом температуру вершины, получим решение системы (4), (5).

Исследуем в линейном приближении устойчивость решения (8), (9), налагая обращающееся в нуль при $x = x_0$ малое возмущение $f(t, x)$:

$$y = y_k(x, B) + f(t, x),$$

где t — время. Подставим y в нестационарное уравнение (8) с правой частью $\partial y/\partial t$ и линеаризуем его по f. Разделим переменные и найдем, что $f(t, x) = \exp(-vt)X(x)$. В результате получаем систему

$$\begin{gathered}\frac{1}{x^k}\frac{d}{dx}\left(x^k\frac{dy}{dx}\right) + \frac{k}{x} + B\exp(y) = 0,\\ \frac{1}{x^k}\frac{d}{dx}\left(x^k\frac{dX}{dx}\right) + (B\exp(y) + v)X = 0,\end{gathered} \tag{10}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = -1, \quad X'(0) = 0, \quad X(x_0) = 0. \tag{11}$$

Второе уравнение в (10) с соответствующими граничными условиями — задача Штурма — Лиувилля для нахождения собственных значений v_n и функций $X_n(x)$. Потеря устойчивости наступает, если наименьшее собственное значение v_0, которому отвечает собственная функция $X_0(x)$, не имеющая нулей внутри интервала $(0, x_0)$, становится равным нулю. Поэтому в (10) полагалось $v = 0$. В силу линейности по X и однородности второго уравнения системы (10) можно задаваться произвольным начальным значением X при $x = 0$, например $X(0) = 1$, тем самым приводя (10) к задаче Коши. Численное интегрирование (10) с заданным B проводится до тех пор, пока X не обращается первый раз в нуль: $X(x_0) = 0$.

Таким образом, в результате численного решения (10), (11) находится $B^*(x_0)$. Искомая зависимость $\omega^*(x_0)$ связана с $B^*(x_0)$ как $\omega^*(x_0) = B^*(x_0)\exp(-A)$, а предвзрывной разогрев $\Theta^*(0) = A$, $A = -y(x_0) - x_0$. Максимальный предвзрывной разогрев может быть найден при этом с хорошей точностью.

Следует сказать, что исследование потери устойчивости стационарного решения квазилинейного уравнения теории теплового взрыва проводилось в работах [6, 7]. Его изложение приведено в [8]. Однако там этот метод основывался на известных [5] точных аналитических решениях стационарного уравнения. Его применение оказывается возможным и в том случае, когда стационарное решение находится численно. Метод удобен при численных расчетах, так как сводит решение краевой задачи к решению задачи Коши.

Результаты расчетов с применением обоих изложенных способов совпадают. Искомые зависимости (6), (7) могут быть аппроксимированы следующими формулами (диапазон изменения $0 < x_0 < 50$, точность аппроксимации не хуже 5 %): клин

$$\omega^* = 2/x_0^2 + 0{,}46/x_0 + 0{,}37/\ln(1 + x_0), \tag{12}$$

$$\Theta^*(0) = 1 + 1/\ln(15 + x_0^2); \tag{13}$$

конус

$$\omega^* = 3{,}32/x_0^2 + 1{,}53/x_0 + 0{,}51, \tag{12'}$$

$$\Theta^*(0) = 1{,}45 + 0{,}15/(1 + 0{,}24x_0). \tag{13'}$$

Задача о воспламенении тепловым потоком пластины ($k = 0$) конечной толщины рассмотрена в [2]. Для пластины известно [5] аналитическое решение (4) с $k = 0$. После подстановки в общее решение граничных условий авторы пришли к трансцендентной системе из двух уравнений, из которой можно найти критические условия воспламенения пластины.

Можно предложить формулу, аппроксимирующую зависимость критерия воспламенения пластины и предвзрывного разогрева:

$$\omega^* = 0{,}88/x_0^2 + 1/ex_0, \tag{12''}$$

$$\Theta^*(0) = 1 + 0{,}19/(1 + 0{,}36x_0). \tag{13''}$$

Случай $x_0 \to 0$ физически отвечает малому тепловому потоку, условия теплового взрыва клина и конуса при этом аналогичны случаям цилиндра и шара соответственно [5]. В самом деле, величина ωx_0^2 совпадает в пределе малых x_0 с параметром Франк-Каменецкого (2,00 — для цилиндра и 3,32 — для шара). Другой предельный случай $x_0 \to \infty$ отвечает большим потокам тепла. В реальных условиях величина x_0 практически не может быть больше 50. Можно, однако, получить асимптотические формулы в пределе $x_0 \to \infty$ для критерия воспламенения, которые являются хорошим приближением для ω^* уже при $x_0 > 15$ (точность не хуже 1 %):

$$\omega^* = 0{,}37/(\ln x_0 - 1), \tag{14}$$

$$\omega^* = 0{,}17/(1/3 - 1/x_0), \tag{14'}$$

(14) — для клина, (14′) — для конуса. Асимптотика для пластины найдена в [2]: $\omega^* = 1/ex_0$. Формулы (12), (13) получены сопоставлением двух предельных случаев.

Таким образом, в размерном виде условия воспламенения тонкого клина потоком тепла запишутся следующим образом:

$$\frac{L^2EQz}{\lambda RT_s^2}e^{-\frac{E}{RT_s}} = 2{,}0 + 0{,}46\frac{EqL}{\lambda RT_s^2\varphi_0} + \frac{0{,}37\left(EqL/\lambda RT_s^2\varphi_0\right)^2}{\ln\left(1 + EqL/\lambda RT_s^2\varphi_0\right)}, \tag{15}$$

где $T_s = T_0 + qL/\lambda\varphi_0$.

С учетом того, что для конуса вместо φ_0 следует писать $2\operatorname{tg}(\varphi_0/2)$, условия воспламенения примут вид

$$\frac{L^2EQz}{\lambda RT_s^2}e^{-\frac{E}{RT_s}} = 3{,}32 + \frac{1{,}53EqL}{2\lambda RT_s^2\operatorname{tg}(0{,}5\varphi_0)} + 0{,}51\left(\frac{0{,}5EqL}{\lambda RT_s^2\operatorname{tg}(0{,}5\varphi_0)}\right)^2, \quad (15')$$

где $T_s = T_0 + 0{,}5qL/\lambda\operatorname{tg}(0{,}5\varphi_0)$.

При конечных углах раствора тела следует различать две возможные геометрические формы клина и конуса. Первая, рассмотрение которой велось до сих пор, когда постоянная температура T_0 поддерживается при постоянном радиусе $r = L$. Клин или конус в этом случае является сектором круга или шаровым сектором. Формулы (15), полученные для малых углов φ_0, могут быть использованы для оценок условий воспламенения клина и конуса с конечным углом раствора.

Если основание клина или конуса плоское, то условия воспламенения будут отличаться от того, что дают выражения (15). Пусть L — высота клина или конуса с плоским основанием, ξ и η — декартовы координаты, в которых уравнение образующей будет $\eta = \xi\operatorname{tg}\varphi_0$, а температура основания T_0 постоянна при $\xi = L$. Точное решение инертной задачи при произвольном $0 < \varphi_0 < \pi/2$

$$T(\xi, \eta) = T_0 + q(L - \xi)/\lambda\sin\varphi_0$$

показывает, что изотермы в такой геометрии представляют собой прямые линии, перпендикулярные оси тела. Температура вершины

$$T_s = T_0 + qL/\lambda\sin\varphi_0. \quad (16)$$

В этом случае проведем усреднение уравнения теплопроводности с химическим источником по плоскостям $\xi = \mathrm{const}$, где ξ — расстояние, отсчитываемое вдоль оси тела. В результате приходим к уравнению

$$\frac{1}{\xi^k}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^k\frac{dT}{d\xi}\right) + \frac{kq}{\lambda\xi\sin\varphi_0} + \frac{Qz}{\lambda}\exp(-E/RT) = 0, \quad (17)$$

отличающемуся от (1) лишь тем, что вместо φ_0 в (17) входит $\sin\varphi_0$. После введения безразмерных переменных получим уравнение, совпадающее по виду с (4), и таким образом сразу же получаем условия воспламенения тепловым потоком клина и конуса с плоским основанием:

$$\frac{L^2EQz}{\lambda RT_s^2}e^{-E/RT_s} = 2{,}0 + 0{,}46\frac{EqL}{\lambda RT_s^2\sin\varphi_0} + 0{,}37\frac{\left(EqL/\lambda RT_s^2\sin\varphi_0\right)^2}{\ln\left(1 + EqL/\lambda RT_s^2\sin\varphi_0\right)},$$
$$\frac{L^2EQz}{\lambda RT_s^2}e^{-\frac{E}{RT_s}} = 3{,}32 + 1{,}53\frac{EqL}{\lambda RT_s^2\sin\varphi_0} + 0{,}51\left(\frac{EqL}{\lambda RT_s^2\sin\varphi_0}\right)^2, \quad (18)$$

T_s находится из (16).

Так как температура вершины входит в критерий воспламенения экспоненциальным образом, в первом приближении можно считать, что определяющим параметром является величина $qL/\lambda\varphi_0$: чем меньше угол при вершине тела или чем больше его длина, тем меньшим потоком можно его воспламенить.

Выше исследовалось воспламенение клина и конуса, нагреваемых постоянным потоком интенсивности q. Это имеет место, например, при нагреве изотропным тепловым излучением. Если же поток тепла анизотропен, то условия воспламенения будут определяться выражениями (15) или (18), в которые входит усредненная по поверхности тела величина теплового потока. Так, если плоскопараллельный поток излучения интенсивности q_0 (рассчитанный на площадку, перпендикулярную направлению распространения) падает под углом ψ к оси конуса или клина, то следует различать два случая.

Если угол падения меньше полуугла при вершине $\psi \leqslant \varphi_0$, то в (15) или (18) следует подставлять величину теплового потока $q = q_0 \cos \psi \sin \varphi_0$, если $\psi > \varphi_0$, то для клина

$$q = q_0 \cos \psi \sin \varphi_0 (1 + \gamma)/2,$$

для конуса

$$q = [q_0 \cos \psi \sin \varphi_0 (\pi + \sqrt{\gamma^2 - 1} - \arccos 1/\gamma)]/\pi,$$

где $\gamma = \operatorname{tg} \psi / \operatorname{tg} \varphi_0$. В предельном случае нормального к оси тела падения ($\psi = \pi/2$) эти выражения упрощаются: для клина $q = 0{,}5 q_0 \cos \varphi_0$, для конуса $q = q_0 \cos \varphi_0 / \pi$.

Если тепловой поток больше критического теплового, определяемого из (15) или (18), то стационарное распределение температуры невозможно, и тело через некоторое время воспламеняется. В том случае, когда тепловой поток много больше критического, наличие холодного основания не сказывается и время воспламенения тела конечной длины будет совпадать с временем воспламенения тела бесконечной длины [1]. При незначительном превышении тепловым потоком критической интенсивности время воспламенения будет больше, чем для тела бесконечной длины.

Таким образом, в работе проведено рассмотрение воспламенения клина и конуса конечной длины с основанием, поддерживаемым при постоянной температуре, постоянным тепловым потоком. На основе метода численного исследования устойчивости квазилинейного уравнения стационарной теории теплового взрыва, при котором решение краевой задачи сведено к решению задачи Коши, найдены критические условия, когда стационарное распределение температуры в теле становится невозможным.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Марголин А. Д., Мохин Г. Н., Крупкин В. Г.** Зажигание клина и конуса потоком тепла при гомогенной реакции // ФГВ.— 1990.— 26, № 1.— С. 21.
2. **Clemmov D. M., Huffington J. D.** An extension of the theory of thermal explosion and its application to the oscillatory burning by explosives // Trans. Far. Soc.— 1956.— 52.— Pt 3.
3. **Вилюнов В. Н.** Теория зажигания конденсированных веществ.— Новосибирск: Наука, 1984.
4. **Марголин А. Д., Крупкин В. Г.** Теория гетерогенного воспламенения заостренных тел в турбулентном потоке газообразного окислителя // Химическая физика процессов горения и взрыва. Горение конденсированных систем.— Черноголовка, 1986.
5. **Франк-Каменецкий Д. А.** Диффузия и теплопередача в химической кинетике.— М.: Наука, 1987.
6. **Истратов А. Г., Либрович В. Б.** Об устойчивости решений в стационарной теории теплового взрыва // ПММ.— 1963.— 27, № 2.— С. 343.
7. **Гришин А. М.** Линеаризация уравнения теплового взрыва и устойчивость его решений в случае граничных условий третьего рода // ИФЖ.— 1965.— 8, № 5.— С. 620.
8. **Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б. и др.** Математическая теория горения и взрыва.— М.: Наука, 1980.

г. Москва

Поступила в редакцию 7/II 1989, после доработки — 13/IV 1990

УДК 662.215

Л. Г. Страковский

О ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ ВОСПЛАМЕНЕНИЯ ЧАСТИЦ И КРИСТАЛЛОВ ГОМОГЕННЫХ ЭКЗОТЕРМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Установлена связь между временем зажигания частицы тепловым потоком и соответствующей величиной для полупространства. Решена двумерная задача о зажигании клина тепловым потоком. Обнаружено значительное возрастание температуры зажигания с уменьшением угла. Показано, что задержка зажигания кристалла определяется разогревом его ребер. Рассмотрено применение полученных соотношений для интерпретации экспериментов по ПГД.