

лучить более точные решения в плоском случае (задача 3) и перейти к осесимметричному.

Автор признателен Н. Х. Арутюняну и В. М. Александрову за внимание к работе.

Поступила 28 VI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-стареющих тел. — Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3.
2. Арутюнян Н. Х. О теории ползучести для неоднородно наследственно-стареющих сред. — Докл. АН СССР, 1976, т. 229, вып. 3.
3. Арутюнян Н. Х., Шойхет Б. А. Асимптотическое поведение решения краевой задачи теории ползучести неоднородных стареющих тел с односторонними связями. — Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 3.
4. Сумбатян М. А. Плоская задача для тонкого слоя в условиях установившейся нелинейной ползучести. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1980, т. 33, № 1.

УДК 539.3 : 678.067.5

ОПТИМАЛЬНОЕ АРМИРОВАНИЕ ПЛАСТИН ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

С. Б. БУШМАНОВ, Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ

(Новосибирск)

При решении задач оптимизации внутренней структуры упругих композитных тел, находящихся в плоском напряженном состоянии, последние рассматривались либо как однородные анизотропные [1], либо как нитяной континуумы [2, 3]. Основным критерием оптимальности в [4, 5] было условие равнонапряженности волокон арматуры.

В настоящей работе на основе модели армированного слоя, предложенной в [6], рассматривается задача о выборе направлений и интенсивностей армирования, соответствующих минимуму суммарного объема арматуры в упругих пластинах, нагруженных в своей плоскости. Показано, что оптимальными в указанном смысле будут проекты с равнонапряженной арматурой, направления армирования которых являются одновременно и направлениями главных удлинений. Получены уравнения и граничные условия, определяющие параметры армирования оптимального проекта. Установлена связь между оптимальными траекториями армирования и линиями скольжения при плоской деформации жесткопластического тела.

1. Рассматривается пластинка, состоящая из изотропной матрицы и внедренной в нее тонковолокнистой арматуры, которая уложена в двух направлениях, составляющих углы α_k с положительным направлением 1 некоторой ортогональной системы координат x_1, x_2 . Предполагается, что пластинка имеет постоянную единичную толщину, нагружена в своей плоскости силами p_i на части контура L_p и жестко закреплена на оставшейся части контура L_u . Объемные силы отсутствуют. Обе фазы композита считаются линейно-упругими, причем жесткость арматуры значительно выше жесткости матрицы. Направления и интенсивности армирования могут варьироваться независимо друг от друга.

В качестве механической модели композита принимаются следующие соотношения, связывающие осредненные напряжения σ_{ij}^c со структурными напряжениями σ_{ij} в матрице, σ_k в арматуре, направлениями α_k и интенсивностями ω_k армирования [6]:

$$(1.1) \quad \sigma_{ij}^c = (1 - \omega) \sigma_{ij} + \omega_k \sigma_k l_{ik} l_{jk} \quad (i, j, k = 1, 2),$$

где $\omega = \omega_1 + \omega_2$; $l_{1k} = \cos \alpha_k$; $l_{2k} = \sin \alpha_k$. Здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование.

Интенсивности армирования должны удовлетворять естественным ограничениям

$$(1.2) \quad \omega_k \geq 0 \quad (k = 1, 2), \quad \omega \leq \omega_*,$$

где $\omega_* < 1$ — предельно допустимое значение суммарной интенсивности армирования.

Структурные напряжения связаны с деформациями ε_{ij} композита законом Гука

$$(1.3) \quad \sigma_{11} = \frac{E_m}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22}), \quad \sigma_{12} = \frac{E_m}{1 + \nu} \varepsilon_{12},$$

$$\sigma_{22} = \frac{E_m}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11});$$

$$(1.4) \quad \sigma_k = E_a \varepsilon_k = E_a \varepsilon_{ij} l_{ik} l_{jk} \quad (i, j, k = 1, 2).$$

Здесь E_a, E_m — модули Юнга арматуры и матрицы; ν — коэффициент Пуассона матрицы.

Рассмотрим задачу определения схемы укладки арматуры в пластинке, которая соответствует минимуму суммарного объема арматуры среди всех допустимых проектов. К сравнению допускаются все возможные проекты пластинки, удовлетворяющие одним и тем же граничным условиям и имеющие значение упругой податливости, измеряемой как работа внешних сил на производимых ими перемещениях, не превосходящее заданной величины J_0 :

$$(1.5) \quad J = \int_{L_p} p_i u_i dl \leq J_0.$$

Такие проекты будут называться в дальнейшем допустимыми.

Покажем, что среди всех допустимых проектов пластинки, армированной двумя семействами волокон, наименьшим суммарным объемом арматуры обладают проекты с равнонапряженной арматурой, уложенной вдоль траекторий главных удлинений композита, и имеющие предельное значение J_0 упругой податливости. Такие проекты в дальнейшем будут называться оптимальными. Переходя с помощью формулы Грина в (1.5) от интегрирования по контуру к интегрированию по области S , занимаемой срединной плоскостью пластинки, и используя при этом соотношения (1.1), можно представить упругую податливость оптимального и произвольного допустимого проектов в виде

$$(1.6) \quad J_0 = \int_S \int (1 - \omega) \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} ds + \int_S \int \omega_k \sigma_k \varepsilon_k ds;$$

$$(1.7) \quad J^* = \int_S \int (1 - \omega^*) \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}^* ds + \int_S \int \omega_k^* \sigma_k^* \varepsilon_k^* ds \leq J_0.$$

Здесь и далее все величины, помеченные звездочками, соответствуют произвольному допустимому проекту, а без звездочек — оптимальному.

Применим теперь принцип виртуальной работы к произвольному допустимому проекту, взяв в качестве виртуального поля перемещений действительное поле перемещений оптимального проекта:

$$(1.8) \quad J_0 = \int_S \int (1 - \omega^*) \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} ds + \int_S \int \omega_k^* \sigma_k^* \varepsilon_k' ds.$$

Здесь ε_k' — виртуальные удлинения в направлениях укладки арматуры произвольного допустимого проекта, вычисленные по действительному полю перемещений оптимального проекта.

Неравенство (1.7) с помощью соотношений (1.4), (1.6) (1.8) и легко проверяемого равенства

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* = \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij}$$

можно преобразовать к следующему виду:

$$(1.9) \quad E_a \int_S \int (\omega_k^* - \omega_k) \varepsilon_k^2 ds - \int_S \int (\omega^* - \omega) \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} ds \geq \int_S \int (1 - \omega^*) (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}) (\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}) ds + E_a \int_S \int \omega_k^* (\varepsilon_k^* - \varepsilon_k')^2 ds + E_a \int_S \int \omega_k^* (\varepsilon_k^2 - \varepsilon_k'^2) ds.$$

Так как разности напряжений $\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}$ и деформаций $\varepsilon_{ij}^* - \varepsilon_{ij}$ связаны законом Гука (1.3), а интенсивности армирования любого допустимого проекта удовлетворяют ограничениям (1.2), то при дополнительном условии $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2$ все слагаемые в правой части неравенства (1.9) неотрицательны. Поскольку арматура в оптимальном проекте равнонапряжена и уложена вдоль траекторий главных удлинений, то неравенство (1.9) с учетом соотношений (1.3) принимает форму

$$(1 - E_k) \varepsilon_1^2 (V_a^* - V_a) \geq 0 \quad (k = 1, 2),$$

где $E_{1,2} = 2E_m / (1 \pm \nu) E_a$.

Здесь V_a, V_a^* — суммарные объемы арматуры оптимального и произвольного допустимого проектов, E_1 соответствует оптимальным проектам с удлинениями арматуры $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ (оптимальные проекты первого рода), а E_2 — проектам с удлинениями арматуры $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ (оптимальные проекты второго рода).

Таким образом, условие $E_h < 1$ гарантирует, что среди всех допустимых проектов пластинки минимальным объемом арматуры обладают оптимальные проекты. Поскольку оптимальные проекты второго рода находятся в однородном деформированном состоянии, они могут быть реализованы лишь в случаях, когда граничные условия на контуре пластинки заданы в напряжениях. Как будет показано ниже, условие жесткого закрепления пластинки на контуре L_u позволяет однозначно строить оптимальные проекты первого рода.

2. Так как направления армирования оптимального проекта первого рода взаимно ортогональны, то можно положить $\alpha_1 = \alpha_2 - \pi/2 = \alpha$. Пусть u, v — компоненты перемещения в направлениях осей x, y прямоугольной декартовой системы координат. Тогда компоненты деформации и поворота оптимального проекта первого рода могут быть представлены в виде

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x - \partial u / \partial x &= \varepsilon_1 \cos 2\alpha, \quad \varepsilon_y = \partial v / \partial y = -\varepsilon_1 \cos 2\alpha, \\ \varepsilon_{xy} &= (1/2)(\partial v / \partial x + \partial u / \partial y) = \varepsilon_1 \sin 2\alpha, \quad \Omega = (1/2)(\partial v / \partial x - \partial u / \partial y). \end{aligned}$$

Исключая из (2.1) u и v с помощью перекрестного дифференцирования, получаем систему уравнений, определяющую направления армирования оптимального проекта первого рода:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \partial \Omega / \partial x - 2\varepsilon_1(\cos 2\alpha \partial \alpha / \partial x + \sin 2\alpha \partial \alpha / \partial y) &= 0, \\ \partial \Omega / \partial y - 2\varepsilon_1(\sin 2\alpha \partial \alpha / \partial x - \cos 2\alpha \partial \alpha / \partial y) &= 0. \end{aligned}$$

Система уравнений (2.2) является гиперболической, причем ее характеристические направления совпадают с направлениями армирования. Как нетрудно заметить, система уравнений (2.2) тождественна основным уравнениям теории плоской деформации жесткопластического тела [7]. Следовательно, траектории армирования оптимального проекта первого рода геометрически совпадают с линиями скольжения некоторой сетки Генки — Прандтля и обладают всеми известными свойствами последней. Наиболее существенные из этих свойств сформулированы в теоремах Генки [7]. Аналогами первой и второй теорем Генки являются следующие утверждения: 1) при переходе от одного волокна к другому того же семейства вдоль любого волокна другого семейства угол α изменяется на одну и ту же величину; 2) при движении вдоль фиксированного волокна радиусы кривизны волокон другого семейства изменяются на пройденные расстояния. На основании сформулированных теорем система уравнений (2.2) может быть заменена другой, более удобной для численных расчетов [8]:

$$(2.3) \quad dR_2 + R_1 d\alpha = 0, \quad dR_1 - R_2 d\alpha = 0.$$

Здесь R_1, R_2 — радиусы кривизны волокон первого и второго семейств. Уравнения (2.3) справедливы вдоль волокон первого и второго семейств соответственно.

Если угол α уже определен, то траектории армирования находятся из решения уравнений

$$(2.4) \quad dy/dx = \operatorname{tg} \alpha, \quad dy/dx = -\operatorname{ctg} \alpha,$$

справедливых вдоль волокон первого и второго семейств соответственно. Путем введения вспомогательных переменных

$$(2.5) \quad \bar{x} = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad \bar{y} = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

уравнения (2.4) могут быть представлены в более удобной для численных расчетов форме

$$(2.6) \quad d\bar{y} + \bar{x} d\alpha = 0, \quad d\bar{x} - \bar{y} d\alpha = 0.$$

Уравнения (2.6) справедливы вдоль волокон первого и второго семейств соответственно.

Осредненные напряжения в оптимальном проекте первого рода в силу соотношений (1.1), (1.3), (1.4) и (2.1) можно представить в виде

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \sigma_x^c &= \frac{1}{2} \sigma_1 (\chi + \kappa \cos 2\alpha), \\ \sigma_y^c &= \frac{1}{2} \sigma_1 (\chi - \kappa \cos 2\alpha), \quad \tau_{xy}^c = \frac{1}{2} \sigma_1 \kappa \sin 2\alpha, \end{aligned}$$

где

$$(2.8) \quad \chi = \omega_1 - \omega_2, \quad \kappa = E_1 + (1 - E_1)\omega.$$

Подстановка соотношений (2.7) в уравнения равновесия

$$(2.9) \quad \frac{\partial \sigma_x^c}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^c}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}^c}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^c}{\partial y} = 0$$

приводит к следующей системе уравнений:

$$(2.10) \quad \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\kappa \cos 2\alpha) + \frac{\partial}{\partial y} (\kappa \sin 2\alpha) = 0,$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (\kappa \sin 2\alpha) - \frac{\partial}{\partial y} (\kappa \cos 2\alpha) = 0,$$

которая является гиперболической с характеристиками, совпадающими с траекториями армирования. Для численных расчетов удобнее форма уравнений (2.10), записанных вдоль волокон первого и второго семейств соответственно:

$$(2.11) \quad R_2 d(\chi + \kappa) - 2\kappa R_1 d\alpha = 0, \quad R_1 d(\chi - \kappa) - 2\kappa R_2 d\alpha = 0.$$

На основании аналогов теорем Генки и определения интенсивностей армирования [6] последние можно представить в виде

$$(2.12) \quad \omega_1 = -AS_1/R_2, \quad \omega_2 = -AS_2/R_1,$$

где S_1, S_2 — площади поперечных сечений волокон первого и второго семейств; A — положительная постоянная, значение которой в настоящем рассмотрении несущественно. Учитывая соотношения (2.8), (2.12), уравнения (2.11) в случае $E_1 = 0$ можно преобразовать к виду

$$(2.13) \quad dS_1 - S_2 d\alpha = 0, \quad dS_2 + S_1 d\alpha = 0.$$

Из анализа уравнений (2.13), которые справедливы вдоль волокон первого и второго семейств соответственно, можно сделать вывод, что в случае $E_1 = 0$ площади поперечных сечений волокон арматуры монотонно убывают при движении вдоль волокон в сторону их расхождения. Ввиду непрерывной зависимости решения рассматриваемой задачи от входных данных сформулированное утверждение сохраняет силу и для достаточно малых значений $E_1 > 0$.

Граничные условия, сформулированные в начале п. 1, могут быть переформулированы в терминах функций, введенных выше. В силу жесткого закрепления пластинки по контуру L_u получаем следующие граничные условия для системы уравнений (2.2) на этом контуре:

$$(2.14) \quad \alpha = \varphi \pm \pi/4 + n\pi, \quad \Omega = \pm \varepsilon_1,$$

где φ — угол между внешней нормалью к L_u и осью x ; n — произвольное целое число. Если сравнить граничные условия (2.14) с формулами (35.4) из [7], то можно заметить, что задача Коши для системы (2.2) с граничными условиями (2.14) полностью аналогична задаче о плоской деформации жесткопластического тела со свободной от нагрузок границей, имеющей такую же форму, как и контур L_u . Поле линий скольжения этой задачи, а значит, и поле траекторий армирования оптимального проекта первого рода могут быть построены хорошо известными методами [7, 8]. Так как в граничные условия (2.14) входят только параметры контура L_u , то траектории армирования оптимального проекта первого рода зависят только от формы L_u . Выбор знаков в (2.14) не влияет на геометрию траекторий армирования, устанавливая лишь, какое из семейств волокон работает на растяжение, а какое — на сжатие, и должен согласовываться с видом приложенных на L_p нагрузок. Если L_u представляет собой замкнутый гладкий выпуклый контур, то, как показано в [9], поле линий скольжения, а стало быть, и поле траекторий армирования вне контура L_u образованы спиралевидными кривыми, расходящимися при удалении от L_u , и могут быть продолжены сколь угодно далеко от L_u . Если при этом окажется, что контур L_p , на котором заданы нагрузки, нигде не имеет характеристического направления и пересекает каждую характеристику только один раз, то будет корректна задача Коши для системы уравнений (2.10). Пусть на контуре L_p заданы нормальное давление σ и касательное напряжение τ , тогда в силу соотношений (2.7) граничные условия на контуре L_p могут быть записаны в виде

$$(2.15) \quad \sigma = (1/2)\sigma_1[\chi + \kappa \cos 2(\alpha - \varphi)], \quad \tau = (1/2)\sigma_1\kappa \sin 2(\alpha - \varphi),$$

где φ — угол между внешней нормалью к L_p и осью x .

Таким образом, задача построения оптимального проекта первого рода подразделяется на два этапа. На первом этапе решается задача Коши для системы уравнений (2.2) с граничными условиями (2.14), заданными на контуре L_u . Решение этой задачи определяет поле траекторий армирования в области S . На втором этапе при уже известных направлениях армирования решается задача Коши для системы уравнений (2.10) с граничными условиями (2.15), заданными на контуре L_p . Эта задача решается в обратном по отношению к первому этапу направлении. После ее решения становятся известными все параметры оптимального проекта первого рода. Следует иметь в виду, что построенное таким образом решение имеет механический смысл лишь при выполнении неравенств (1.2), которые накладывают определенные ограничения на внешние нагрузки σ, τ . Эти ограничения существенным образом зависят от формы области S .

При численном построении поля траекторий армирования используются системы уравнений (2.3), (2.6). Соответствующие начальные значения радиусов кривизны волокон R_1 и R_2 на контуре L_u определяются формулами

$$\frac{1}{R_1} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial l}, \quad \frac{1}{R_2} = - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial l},$$

в которых фигурирует производная по направлению касательной к контуру L_u , определяемая соотношением

$$\partial/\partial l = -\sin \varphi \partial/\partial x + \cos \varphi \partial/\partial y.$$

Начальные условия для системы уравнений (2.6) определяются соотношениями (2.5), в которых x, y представляют собой координаты точек контура L_u , а угол α определяется из граничных условий (2.14).

3. В качестве простейшего примера построим оптимальный проект первого рода для круглой кольцевой пластинки, закрепленной по внутренней окружности радиуса r_0 и нагруженной равномерно распределенными по внешней окружности радиуса r_1 нагрузками σ, τ . Траекториями оптимальной укладки арматуры будут в этом случае два семейства логарифмических спиралей, пересекающих радиальные направления под углами $\pm \pi/4$. Если перейти к безразмерным переменным

$$R = r/r_0, R_0 = r_1/r_0, \sigma_R = \sigma_r/\sigma_1, \sigma_\theta = \sigma_\theta^c/\sigma_1, \tau_{R\theta} = \tau_{r\theta}^c/\sigma_1,$$

где $\sigma_r^c, \sigma_\theta^c, \tau_{r\theta}^c$ — осредненные напряжения в полярной системе координат (r, θ) , и считать безразмерными по σ_1 также и внешние нагрузки σ, τ , то интенсивности армирования оптимального проекта первого рода определяются следующими формулами:

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{1-E_1} \left(|\tau| \frac{R_0^2}{R^2} - \frac{1}{2} E_1 \right) \pm \sigma.$$

Так как радиусы кривизны логарифмических спиралей $R_1 = R_2 = -R\sqrt{2}$, то согласно формулам (2.12), площади поперечных сечений волокон арматуры изменяются следующим образом:

$$S_{1,2} = \frac{A\sqrt{2}}{1-E_1} \left\{ |\tau| \frac{R_0^2}{R} - \left[\frac{1}{2} E_1 \pm (1-E_1)\sigma \right] R \right\}.$$

Напряженное состояние построенного проекта имеет вид

$$\sigma_R = \sigma_\sigma = \sigma, \quad \tau_{R\theta} = \tau R_0^2/R^2.$$

Неравенства (1.2) накладывают на внешние нагрузки σ, τ следующие ограничения:

$$(3.1) \quad |\tau| \pm (1-E_1)\sigma \geq \frac{1}{2} E_1, \quad |\tau| \leq [E_1 + (1-E_1)\omega_*]/2R_0^2.$$

В плоскости (σ, τ) неравенства (3.1) определяют область допустимых значений внешних нагрузок, которая состоит из двух треугольных частей и симметрична относительно обеих осей. Эта область не пуста при выполнении условия

$$R_0^2 \leq 1 + \omega_* (1-E_1)/E_1,$$

которое определяет максимально допустимые относительные размеры пластинки. Суммарный относительный объем арматуры построенного оптимального проекта первого рода равен

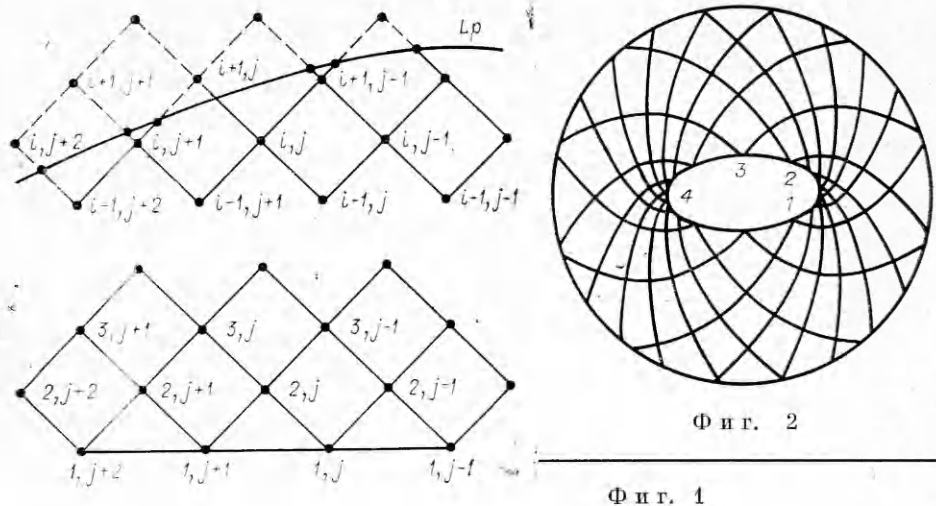
$$V_0 = \frac{1}{1-E_1} \left(\frac{4|\tau|R_0^2 \ln R_0}{R_0^2-1} - E_1 \right).$$

4. При численном построении оптимальных проектов первого рода используется метод характеристик с постоянным приращением $\Delta\alpha$ между смежными узлами [8]. Постоянство $\Delta\alpha$ по всему полю траекторий армирования гарантируется аналогом первой теоремы Генки, сформулированным в п. 2. Дифференциальные уравнения (2.3), (2.6) и (2.11) заменяются разностными. Например, система уравнений (2.6) заменяется разностными уравнениями

$$(4.1) \quad y_{i+1,j} - y_{i,j+1} = (x_{i,j+1} + x_{i+1,j})\Delta\alpha/2,$$

$$x_{i+1,j} - x_{i,j} = (y_{i,j} + y_{i+1,j})\Delta\alpha/2.$$

Здесь принята следующая нумерация узлов сетки: первый индекс обозначает номер слоя узлов, а второй — номер узла в слое, причем нумерация узлов в соседних слоях выбрана таким образом, что узлы, соответствующие одной траектории армирования второго семейства, имеют один и тот же номер j . Характерный фрагмент сетки схематично показан на фиг. 1. Первый слой узлов сетки лежит на контуре L_u . Координаты остальных узлов заранее неизвестны и определяются в процессе расчета.



Ф и г. 2

Ф и г. 1

Разностные уравнения (4.1) аппроксимируют исходные дифференциальные уравнения (2.6) со вторым порядком точности относительно шага сетки $\Delta\alpha$. Разрешая уравнения (4.1) относительно значений сеточных функций на $i + 1$ -м слое, получим следующие рекуррентные соотношения:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} x_{i+1,j} &= A_1 x_{i,j} + A_2 (y_{i,j} + y_{i,j+1}) + A_3 x_{i,j+1}, \\ y_{i+1,j} &= A_1 y_{i,j+1} + A_2 (x_{i,j} + x_{i,j+1}) + A_3 y_{i,j}, \end{aligned}$$

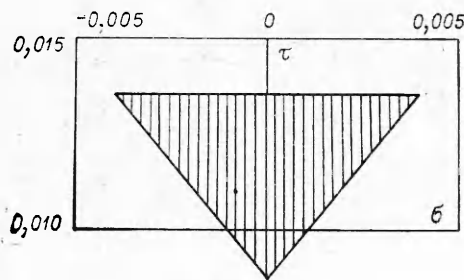
где $A_1 = (1 - \Delta\alpha^2/4)^{-1}$; $A_2 = A_1 \Delta\alpha/2$; $A_3 = A_2 \Delta\alpha/2$.

Рекуррентные соотношения (4.2) позволяют приближенно построить сетку траекторий армирования оптимального проекта первого рода. Аналогичным образом получаются рекуррентные соотношения для определения радиусов кривизны волокон и интенсивностей армирования, которые в целях экономии места здесь не приводятся.

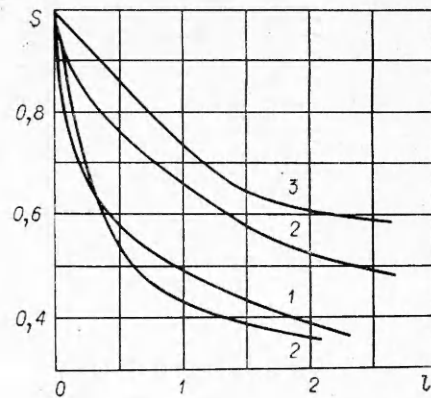
Узлы построенной с помощью рекуррентных соотношений (4.2) сетки траекторий армирования, вообще говоря, не попадают на контур L_p (см. фиг. 1). Поэтому для приближенного задания начальных значений χ и \varkappa предлагается следующая процедура: если два соседних узла сетки, принадлежащих одной и той же траектории армирования, лежат по разные стороны контура L_p , то точка пересечения данной траектории армирования с контуром L_p находится при помощи обратной линейной интерполяции. Считая эту точку дополнительным узлом сетки, определяем в ней с помощью линейной интерполяции значения радиусов кривизны волокон и приращение угла α при переходе от внутреннего узла к дополнительному. Затем с помощью граничных условий (2.15) определяем значения χ и \varkappa в дополнительном узле.

Описанный выше численный алгоритм был использован для построения оптимального проекта первого рода круглой пластинки с эллиптическим отверстием. По внешнему контуру L_p пластинка нагружена равномерно распределенными нагрузками σ , τ , а по внутреннему эллиптическому контуру L_u — жестко закреплена. Расчеты производились на ЭВМ БЭСМ-6 с шагом сетки $\Delta\alpha = \pi/64$. На фиг. 2 показана построенная с помощью графопостроителя сетка траекторий армирования оптимального проекта пластинки, отношение осей контура L_u которой равно 2, а отношение радиуса контура L_p к наибольшей полуоси контура L_u равно 2,5. Здесь показана лишь каждая четвертая из линий сетки, построенной в процессе расчета. На фиг. 3 представлена область допустимых значений внешних нагрузок на плоскости (σ, τ) , построенная при $\nu = 0,4$, $E_m/E_n = 0,01$ и максимально допустимой суммарной плотности армирования $\omega_* = 0,8$. Эта область соответствует проектам, в которых растянутые волокна закручиваются против часовой стрелки. Область допустимых нагрузок для проектов, в которых растянутые волокна закручиваются по часовой стрелке, симметрична области, приведенной на фиг. 3, относительно оси σ . На фиг. 4 приведены графики изменения площади поперечных сечений волокон в зависимости от их текущей длины, построенные при внешних нагрузках $\sigma = 0$, $\tau = 0,012$. При этом принималось, что площадь поперечного сечения в начальной точке на контуре L_u равна 1. Кривые 1—4 на фиг. 4 соответствуют волокнам, выходящим из точек 1—4 на контуре L_u (см. фиг. 2) и закручивающимся против часовой стрелки.

5. Так как деформированное состояние оптимальных проектов второго рода является однородным, то уравнение совместности деформаций автоматически удовлетворяется, не накладывая никаких ограничений на параметры армирования. Для определения четырех структурных параметров оптимальных проектов второго рода остается лишь два уравнения равновесия (2.9), которые после подстановки в них соотноше-



Ф и г. 3



Ф и г. 4

ний (1.1) с учетом закона Гука (1.3), (1.4) и однородности деформированного состояния ($\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = \epsilon_2$, $\epsilon_{xy} = 0$) принимают вид

$$(5.1) \quad \frac{\partial}{\partial x} (\omega_1 \cos^2 \alpha_1) + \frac{\partial}{\partial y} (\omega_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1) + \frac{\partial}{\partial x} (\omega_2 \cos^2 \alpha_2) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} (\omega_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2) - E_2 \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} (\omega_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1) + \frac{\partial}{\partial y} (\omega_1 \sin^2 \alpha_1) + \frac{\partial}{\partial x} (\omega_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2) + \frac{\partial}{\partial y} (\omega_2 \sin^2 \alpha_2) - \\ - E_2 \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0.$$

Уравнения (5.1) определяют класс проектов, эквивалентных в смысле равенства суммарного объема арматуры. Так как система уравнений (5.1) не замкнута, то таких проектов при заданных граничных условиях можно построить бесконечно много. Для выделения конкретных и наиболее предпочтительных проектов привлекаются условия технологичности изготовления последних. Наиболее естественными из них представляются требования постоянства площади поперечного сечения каждого индивидуального волокна арматуры. Для установления связи между параметрами армирования, существующей в этом случае, вводятся в рассмотрение векторные поля ω_k с компонентами $\omega_k l_{ik}$ ($i, k = 1, 2$, по k не суммировать). Пусть $D \subset S$ — произвольная односвязная область с гладкой границей Γ , а \mathbf{n} — вектор внешней нормали к Γ . Тогда абсолютная величина скалярного произведения $\omega_k \mathbf{n}$ имеет смысл суммарной площади поперечных сечений волокон k -го семейства, проходящих через единицу длины дуги контура Γ . Причем $\omega_k \mathbf{n}$ отрицательно, если волокна входят в область D , и положительно, если волокна выходят из области D . Так как волокна имеют постоянные поперечные сечения и не могут обрываться внутри области D , то суммарная площадь поперечных сечений волокон, входящих в D , равна суммарной площади поперечных сечений волокон, выходящих из D , т. е.

$$(5.2) \quad \int_{\Gamma} \omega_k \mathbf{n} dl = \int_D \operatorname{div} \omega_k ds = 0 \quad (k = 1, 2).$$

Здесь при переходе от интегрирования по контуру Γ к интегрированию по области D использована формула Гаусса — Остроградского. В силу произвольности области D из (5.2) следует

$$(5.3) \quad \frac{\partial}{\partial x} (\omega_k \cos \alpha_k) + \frac{\partial}{\partial y} (\omega_k \sin \alpha_k) = 0 \quad (k = 1, 2).$$

Если ввести операторы дифференцирования по направлениям, параллельному и ортогональному волокнам k -го семейства

$$\partial/\partial l_k = \cos \alpha_k \partial/\partial x + \sin \alpha_k \partial/\partial y, \quad \partial/\partial n_k = -\sin \alpha_k \partial/\partial x + \cos \alpha_k \partial/\partial y,$$

то систему уравнений (5.1), (5.3) можно записать в виде

$$(5.4) \quad \omega_1 \sin \alpha \partial \alpha_1 / \partial l_1 + E_2 \partial \omega / \partial l_2 = 0, \quad \partial \omega_1 / \partial l_1 + \omega_1 \partial \alpha_1 / \partial n_1 = 0, \\ \omega_2 \sin \alpha \partial \alpha_2 / \partial l_2 - E_2 \partial \omega / \partial l_1 = 0, \quad \partial \omega_2 / \partial l_2 + \omega_2 \partial \alpha_2 / \partial n_2 = 0,$$

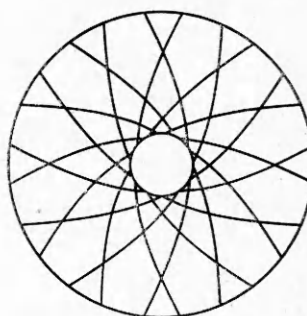
где $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$.

Система уравнений (5.4) принадлежит к эллиптическому типу и определяет направления и интенсивности армирования оптимальных проектов второго рода с волокнами постоянного поперечного сечения.

В качестве простейшего примера оптимального проекта второго рода приведем траектории армирования круглой кольцевой пластинки с относительным размером $R_0 = 5$, нагруженной равномерно распределенными по внешнему и внутреннему контурам нормальными нагрузками p и q . Опуская детали, отметим лишь, что направления армирования в этом случае определяются из решения уравнения;

$$(5.5) \quad (w + E_2)dw/dR + (2w/R)(w - 1 + E_2) = 0,$$

где $w = \cos^2 \alpha$; α — угол между волокнами и радиальными направлениями. Решения уравнения (5.5) с ростом R быстро выходят на асимптотический режим $w = 1 - E_2$, т. е. при достаточном удалении от внутреннего контура пластинки траектории армирования асимптотически приближаются к логарифмическим спиральям, пересекающим радиальные направления под углами $\pm \arccos \sqrt{1 - E_2}$. На фиг. 5 показаны траектории армирования оптимального проекта второго рода, построенного численным методом при следующих значениях входных параметров: $E_2 = 0,1$, $q = 0,2$, $p = 0,15$.



Ф и г. 5

Поступила 20 VII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Баничук Н. В. Оптимизация анизотропных свойств деформируемых сред в плоских задачах теории упругости. — Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 1.
2. Брызгалин Г. И. К рациональному проектированию анизотропных плоских тел со слабым связующим. — Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 4.
3. Брызгалин Г. И. Оптимальное проектирование локально-ортотропных упругих плоских тел со слабым связующим. — Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 3.
4. Боган Ю. А., Немировский Ю. В. О некоторых задачах оптимального управления для армированной среды. — В кн.: Прикладные проблемы прочности и пластичности. Вып. 1. Горький: изд. Горьк. ун-та, 1975.
5. Немировский Ю. В. К вопросу об оптимальной укладке арматуры в пластинках. — Механика полимеров, 1978, № 4.
6. Немировский Ю. В. Об упругопластическом поведении армированного слоя. — ПМТФ, 1969, № 6.
7. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
8. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: ГИИТЛ, 1956.
9. Христианович С. А. Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре. — Мат. сборник. Новая серия, 1936, т. 1 (43), № 4.