

го значения. При этом эффективное значение коэффициента вязкости предполагается известным.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность Р. И. Нигматулину и В. М. Фомину за обсуждение некоторых аспектов данной работы и А. С. Старостиной за помощь в проведении экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дерibas А. А., Нестеренко В. Ф., Ставер А. М. Сепарация компонент при взрывном прессовании многокомпонентных материалов // *Обработка металлов взрывом. Материалы III Междунар. симпоз.* — Марианске Лазне, 1976.
2. Соболев В. В. Возникновение спиральных вихрей в смесевых цилиндрических образцах при ударном сжатии // *Письма в ЖТФ.* — 1984. — Т. 10, вып. 8.
3. Eichhorn R., Small S. Experiments on the lift and drag of spheres suspended in a Poiseuille flow // *J. Fluid Mech.* — 1964. — V. 20, N 3.
4. Селберг Б. П., Николле Д. А. Коэффициент лобового сопротивления сферических частиц небольшого размера // *РГК.* — 1968. — Т. 6, № 3.
5. Степанов Г. В. Коэффициент вязкости металлических материалов при высокоскоростном деформировании в упругопластических волнах нагрузки // *Детонация. Критические явления. Физико-химические превращения в ударных волнах.* — Черногоровка: ОИХФ АН СССР, 1978.
6. Альшуглер Л. В., Доронин Г. С., Ким Г. А. Вязкость ударно-сжатых жидкостей // *ПМТФ.* — 1986. — № 6.
7. Соколов В. И. Современные промышленные центрифуги. — М.: Машгиз, 1961.
8. Нестеренко В. Ф. Ударное сжатие многокомпонентных материалов // *Динамика сплошной среды.* — Новосибирск: ИГ СО АН СССР. — 1977. — Вып. 29.
9. Schwarz R. B., Kasiraj P. et al. A theory for the shock-wave consolidation of powders // *Acta Metallurg.* — 1984. — V. 32, N 8.
10. Костюков Н. А. Структура течения двухкомпонентных смесей твердых частиц в условиях двумерного ударно-волнового нагружения // *ПМТФ.* — 1988. — № 3.
11. Ставер А. М., Кузьмин Г. Е., Нестеренко В. Ф. Экспериментальное исследование ударных волн в пористых средах // *II Совец. по обработке материалов взрывом.* — Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1981.

г. Новосибирск

Поступила 18/III 1988 г.,
в окончательном варианте — 24/VIII 1988 г.

УДК 534.213

А. Д. Зайкин

ЭФФЕКТИВНЫЕ УПРУГИЕ МОДУЛИ ЗЕРНИСТЫХ СРЕД

Решение задачи деформирования гетерогенной среды часто основывается на гипотезе эффективной гомогенности [1], заключающейся в предположении о возможности замены гетерогенной среды гомогенным континуумом, обладающим некоторыми эффективными параметрами. Проблема состоит в определении эффективных свойств гетерогенной среды через свойства фаз и некоторые их геометрические характеристики. Нахождение эффективных упругих модулей песчаных нефтегазовых коллекторов и, в частности, скоростей продольных и поперечных волн, определение связи между скоростями и структурой порового пространства, свойствами флюида — весьма актуальная задача для сейсморазведки.

Остановимся на более простой ситуации пустого, т. е. не содержащего флюида, консолидированного зернистого скелета. Существует несколько подходов к решению поставленной задачи, но зернистый характер скелета учитывался до последнего времени лишь в решениях, основанных на задаче Герца о деформации двух шаров в точке контакта под действием приложенных сил [2]. Однако предположение о точечном контакте в начальный момент нагружения не отвечает условию консолидации породы и приводит к тому, что упругие волны в такой модели распространяются лишь при наличии внешнего давления. В ряде других решений [1] учитывается лишь доля объема, приходящегося на поровое пространство. На практике широко применяются полученные на основе статистического анализа большого количества лабораторных измерений уравнения связи скоростей упругих волн с некоторыми характеристиками структуры, прежде всего пористостью, а также средним размером зерна, проницаемостью и т. д. Таким образом, существует потребность в новых подходах к расчету эффективных упругих модулей зернистых сред.

В [3] для вычисления напряженного состояния отдельного зерна и эффективных упругих модулей пустого зернистого скелета предлагается использовать вариационный

подход. Рассматривается длинноволновое приближение, т. е. ситуация, когда длина упругой волны много больше размеров зерна, что позволяет перейти на отдельном зерне к уравнениям статики. Зернистое тело подвергается тестовому одностороннему сжатию

$$(1) \quad e_{11} = e_{22} = e_{21} = e_{13} = e_{23} = 0, \quad e_{33} = 1.$$

Предполагается, что энергия деформирования отдельного зерна минимальна при некоторых ограничениях на характер этого деформирования, а именно: зерно как целое не перемещается и не вращается, тензор деформаций в центре зерна имеет вид (1). Эти требования позволяют полностью определить неизвестные на контактах зерна нагрузки. Однако гипотеза о характере упругих деформаций зерна нуждается в более тщательном обосновании. Во всяком случае, она должна удовлетворять предельному переходу к сплошной среде.

Рассмотрим зерно объемом V_0 . Его поверхность S состоит из площадок контактов с соседними зернами общей площадью ΔS и свободной поверхности $S - \Delta S$. Пусть нагрузки f_i , отличные от нуля только на ΔS , удовлетворяют некоторым условиям связи, линейным по f_i :

$$(2) \quad T^k = \int_{\Delta S} t_i^k(y) f_i(y) dS,$$

т. е. на характер деформирования зерна наложены некоторые ограничения. Найдем вариацию функционала энергии

$$E = \frac{1}{2} \int \sigma_{ij} e_{ij} dV.$$

Поскольку $e_{ij} = (1/2)(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$, а деформации и напряжения связаны законом Гука, запишем

$$\delta E = - \int \delta u_i U_i dV + \int \frac{\partial F_i}{\partial x_i} dV,$$

где

$$F_i = u_m \left(\lambda \frac{\partial \delta u_k}{\partial x_k} \delta_{mi} + \mu \left(\frac{\partial \delta u_m}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_m} \right) \right);$$

$$U_i = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Так как смещения u_i удовлетворяют уравнениям Ламэ, первый интеграл равен нулю. Второй, по теореме о дивергенции, преобразуем в поверхностный:

$$(3) \quad \delta E = \int F_i n_i dS = \int u_i(y) \delta f_i(y) dS.$$

Минимум функционала (3) при условиях связи (2) достигается, если $u_i(y) = -\lambda_k t_i^k(y)$, $y \in \Delta S$ (λ_k — константы Лагранжа). Таким образом, задача минимизации энергии, сформулированная в [3], сведена к внутренней задаче теории упругости со смешанными граничными условиями

$$(4) \quad u_i(y) = -\lambda_k t_i^k(y), \quad y \in \Delta S,$$

$$f_i(y) = 0, \quad y \in S - \Delta S.$$

Осуществим переход к сплошному телу, в этом случае $\Delta S \rightarrow S$. Форма поверхности зерна может быть произвольной, выберем сферу радиуса R , что позволяет получить результат в аналитическом виде. Смещения вблизи центра упругой сферы определяются первым и третьим членами ряда разложения поверхностных нагрузок по сферическим функциям [4]:

$$(5) \quad 2\mu \frac{\mathbf{u}}{R} = \frac{r}{R} \mathbf{Y}_1 + \frac{R^2 m}{2(7m+5)} \nabla \operatorname{div} \left(\left(\frac{r}{R} \right)^3 \mathbf{Y}_3 \right) - \frac{r}{m+1} \operatorname{div} \left(\frac{r}{R} \mathbf{Y}_1 \right).$$

Здесь $\mathbf{Y}_n(\theta, \varphi) = (2n+1)/4\pi R^2 \int \mathbf{f}(\theta, \varphi) P_n(\cos \gamma) dS$; $\cos \gamma = \sin \theta \times \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos \theta \cos \theta'$, $m = 2(\lambda + \mu)/\lambda$. Находим тензор де-

формаций в центре сферы через поверхностный интеграл по нагрузкам

$$(6) \quad e_{np}(0) = A \int \left(5y_n \delta_{pi} + 5y_p \delta_{ni} + 35 \frac{m}{R^2} y_n y_p y_i - B y_i \delta_{np} \right) f_i(y) dS$$

$$(A = (16\pi\mu(7m + 5)R^3/3)^{-1}, B = (7m^2 + 21m + 10)/(m + 1))$$

и аналитический вид функций $t_i^k(y)$, отвечающих условиям связи (1). Для решения уравнения равновесия с граничными условиями (4) при $\Delta S = S$ и явном виде $t_i^k(y)$, определенном из (6), воспользуемся решением первой внутренней задачи для сферы [4]. Прделав необходимые выкладки, окончательно получаем на поверхности сферы смещения, не удовлетворяющие тестовому одностороннему сжатию:

$$(7) \quad u_i(y) = (1 + D(4-7m))y_i \delta_{3i} + D y_i (2 + (7m - 10)y_3^2/R^2) \\ (D = 7m/(49m^2 - 14m - 20)).$$

Таким образом, существует напряженное состояние зерна с меньшей, чем при одностороннем сжатии, энергией, но с тем же видом тензора деформаций в центре, следовательно, условия (1) не удовлетворяют предельному переходу к сплошной среде.

Учитывая изложенный выше подход к определению напряженного состояния зерна, воспользуемся энергетическим методом [1], заключающимся в определении эффективных упругих модулей через равенство энергий деформирования, запасаемых гетерогенной и эффективной гомогенной средами. Пусть некоторый объем V зернистого тела с пористостью f подвергнут всестороннему сжатию. Для эффективного гомогенного тела с упругими модулями K^* и μ^* имеем средний тензор напряжений $\sigma_{ij} = P \delta_{ij}$ и энергию $E = VP^2/2K^*$. Тензор напряжений такого вида есть результат усреднения по макрообъему зернистого тела. Поскольку скелет пустой, интегрирование осуществляется лишь по зернам. Если V_0 — объем одного зерна, то в объеме содержится $N = V(1 - f)/V_0$ зерен. Пусть $\langle \sigma_{ij}^0 \rangle$ — средний тензор напряжений типичного зерна, тогда

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{V} \int \sigma_{ij}^0 dV = \frac{1}{V} \langle \sigma_{ij}^0 \rangle N V_0.$$

Таким образом, для среднего тензора напряжений зерна

$$\langle \sigma_{ij}^0 \rangle = \frac{P}{1-f} \delta_{ij}.$$

Вывод этого соотношения не претендует на строгость и, по-видимому, может рассматриваться лишь как оценка среднего тензора напряжений зерна.

Выберем из всех возможных состояний зерна с таким видом среднего тензора напряжений напряженное состояние с минимальной энергией E_0 . Условия связи записываются весьма просто, поскольку известно [5], что

$$(8) \quad \langle \sigma_{ij}^0 \rangle = \frac{1}{2V_0} \int (u_i t_j + y_j f_i) dS.$$

Найденные по решению задачи теории упругости со смешанными граничными условиями (4) нагрузки на контактах в силу линейности уравнений Ламэ можно представить в виде ряда по константам Лагранжа. В таком случае условия связи (8) сводятся к системе линейных алгебраических уравнений $B_{nm}^{pk} \lambda_{nm} = -\langle \sigma_{pk}^0 \rangle$. Для удобства записи константы Лагранжа и условия связи будем употреблять с двойным индексом. Учитывая, что $E = (1/2) \int u_{if} dS$, и используя граничные условия (4), получаем

$$E_0 = -\frac{\lambda_{nm}}{2} \int t_i^{nm}(y) f_i(y) dS = -\lambda_{nm} \langle \sigma^0 \rangle / 2,$$

или

$$E_0 = \langle \sigma_{nm}^0 \rangle (B_{pk}^{nm})^{-1} \langle \sigma_{pk}^0 \rangle.$$

Энергия всего объема V есть NE_0 , поэтому окончательно имеем

$$K^* = V_0(1-f)/(B_{11}^{II})^{-1}.$$

Для определения второго упругого модуля аналогично ставится задача о тестовом чистом сдвиге, тогда $\sigma_{ij} = P\delta_{i1}\delta_{j3}$, $E = VP^2/2\mu^*$. Эффективный модуль сдвига

$$\mu^* = V_0(1-f)/(B_{13}^{I3})^{-1},$$

а скорости продольных и поперечных волн

$$V_P^* = \sqrt{\frac{K^* + 4\mu^*/3}{\rho(1-f)}}, \quad V_S^* = \sqrt{\frac{\mu^*}{\rho(1-f)}}$$

(ρ — плотность материала зерна). Матрица B по способу построения зависит лишь от геометрии зерна и его упругих свойств. При этом в выражениях для μ^*/μ , K^*/K , V_P^*/V_P , V_S^*/V_S упругие константы зерна входят лишь в форме коэффициента Пуассона.

Для решения задачи со смешанными граничными условиями (4) на зерне с известным распределением контактов используем методы граничных интегральных уравнений [6]. Представим вектор смещений в виде потенциала простого слоя

$$(9) \quad u_i(x) = \int \Gamma_{ij}(x, y) \varphi_j(y) dS$$

($\varphi_j(y)$ — плотность потенциала, $\Gamma_{ij}(x, y)$ — матрица Кельвина—Сомильяны). Плотность потенциала связана с поверхностными нагрузками системой граничных интегральных уравнений

$$(10) \quad \varphi_i(y) + \int \Gamma_{ij}^1(y, y') \varphi_j(y') dS = f_i(y),$$

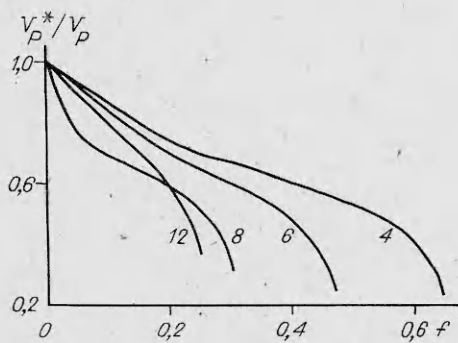
которая может быть решена методом последовательных приближений. Для его численной реализации разобьем поверхность зерна на элементарные площадки dS^k , предполагая, что все неизвестные постоянны на площадке и отнесены к ее центру. Будем искать нагрузки в виде ряда с постоянными коэффициентами a_i^m :

$$f_i(y) = \sum_{m=1}^M a_i^m \Omega^m(y),$$

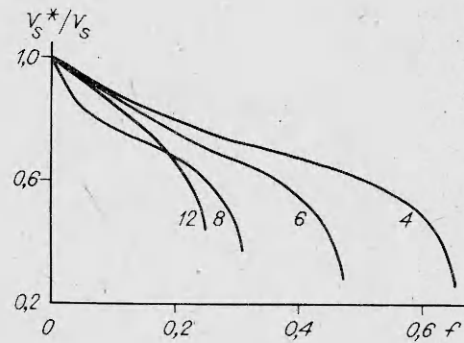
где M — количество элементарных площадок на контактах; $\Omega^m(y)$ — характеристическая функция площадки; причем $\Omega^m(y) = 0$, если $y \notin dS^m$, и $\Omega^m(y) = 1$, если $y \in dS^m$. Используя (9), (10), представим смещения на контактах в виде ряда с коэффициентами a_i^m . Смешанные граничные условия (3) сводятся к системе алгебраических линейных уравнений размерностью $3M \times 3M$ относительно коэффициентов a_i^m , которая решается методом исключений Гаусса.

Определение эффективных свойств зернистого тела невозможно без более или менее подробного описания его строения. Применяемые в этих целях модели должны отражать существенные для изучаемых свойств объекта особенности структуры порового пространства и матрицы. Наиболее подходящей для наших целей является модель пересекающихся сфер [7], позволяющая перейти от системы распределенных на зерне контактов к интегральным параметрам структуры.

Рассмотрим систему случайно распределенных в пространстве сфер радиуса R_0 , касающихся друг друга в точке (N — среднее число контактов, приходящихся на одну сферу, f_0 — пористость системы). Известен целый ряд достаточно близких зависимостей $f_0(N)$, полученных как теоретически, так и экспериментально. Воспользуемся следующим приемом [8]. Существуют регулярные упаковки шаров одинакового радиуса, отличающиеся пористостью и количеством контактов: кубическая гранецентрированная $f_0 = 0,2595$, $N = 12$, кубическая объемно центрированная $f_0 = 0,3198$, $N = 8$, кубическая $f_0 = 0,4764$, $N = 6$, тетраэдрическая



Р и с. 1



Р и с. 2

$f_0 = 0,6599$, $N = 4$. Можно отойти от реального геометрического представления и предположить, что статические параметры случайных упаковок непрерывно изменяются в соответствии с интерполяционной кривой, проведенной через точки, принадлежащие регулярным упаковкам. Таким образом найдем функцию $f(N)$ в диапазоне от 4 до 12.

Зафиксировав центры случайно распределенных в пространстве сфер, увеличим их радиус с R_0 до $R = \sqrt{R_0^2 + r^2}$ (r — радиус пятна контакта). Пористость такой системы пересекающихся сфер

$$f = 1 - \frac{1 - f_0}{(1 - \delta^2)^{3/2}} \left(1 - \frac{N}{4} (1 - \sqrt{1 - \delta^2}) (1 + \delta^2 - \sqrt{1 - \delta^2}) \right),$$

а удельная поверхность (поверхность порового пространства в единице объема)

$$S_V = \frac{3(1 - f_0)}{R} \left(1 - \frac{N}{2} (1 - \sqrt{1 - \delta^2}) \right) (1 - \delta^2)^{3/2} \quad (\delta = r/R).$$

Определив средний размер зерна $\langle D \rangle$ как диаметр сферы с тем же отношением объема к поверхности, введем безразмерный параметр в виде произведения удельной поверхности на средний размер зерна $\eta = S_V \langle D \rangle$. Геометрия такой модели полностью определяется двумя безразмерными параметрами, например f и η , а также характеристикой линейного размера $\langle D \rangle$. Поскольку длина волны $l \gg \langle D \rangle$, естественно предположить, что скорости упругих волн в таких средах есть функции двух параметров структуры порового пространства.

Используем модель пересекающихся сфер для расчета эффективных упругих модулей. Задав распределение контактов в зерне в соответствии с одной из регулярных упаковок, приведенных выше, будем изменять радиус пятна контакта, следовательно, и пористость упаковки. Решая при этом задачу со смешанными граничными условиями (4), получим зависимость скоростей продольных и поперечных волн от пористости для каждой из упаковок. На рис. 1, 2 приведены подобные зависимости, при этом коэффициент Пуассона зерна полагался равным 0,25. Шифр кривых отвечает типу упаковки. Конечно, значение упругой энергии зависит от распределения контактов по направлениям, и надежнее проводить усреднение по ансамблю зерен с одинаковым количеством контактов и различным распределением их по направлениям. Более того, в случайных упаковках реализуется некоторое распределение зерен по количеству контактов, и усреднение необходимо проводить и по этому распределению. Однако мало вероятно, что подобная процедура существенно исказит характер полученных зависимостей, поскольку основными факторами, влияющими на энергию зерна, являются все же количество контактов и их размеры. Поэтому будем полагать, что полученные кривые справедливы и для случайных упаковок со средним количеством контактов, приходящихся на одно зерно ($N = 4, 6, 8, 12$). Скорости при промежуточных значениях N , в том числе и дробных, могут быть найдены путем той или иной интерполя-

ции. Удобнее все же перейти к параметрам f и η . Методом множественной регрессии зависимости V_P^*/V_P и V_S^*/V_S от f и η аппроксимируются уравнениями

$$V_P^* = V_P(1 - 0,712f - 0,0776\eta),$$
$$V_S^* = V_S(1 - 0,660f - 0,0617\eta).$$

Средняя ошибка прогноза при такой аппроксимации кривых рис. 1, 2 равна 5,6 % для продольных и 6,2 % для поперечных волн.

Итак, можно сделать выводы. Скорости продольных и поперечных волн в консолидированных зернистых средах зависят как минимум от двух параметров структуры порового пространства, например: пористости и произведения удельной поверхности на средний размер зерна. Причем увеличение последнего ведет к уменьшению скоростей. Скорости продольных волн более чувствительны к изменению параметров структуры по сравнению с поперечными. Это приводит к падению эффективного коэффициента Пуассона. Эффективные упругие параметры зависят лишь от коэффициента Пуассона материала матрицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. — М.: Мир, 1982.
2. Дересевич Г. Механика зернистой среды // Проблемы механики. — М.: ИЛ, 1961. — Вып. 3.
3. Сибиряков Б. П. Упругие свойства пустых скелетов зернистых коллекторов // ЦМТФ. — 1983. — № 4.
4. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. — М.: Гостехиздат, 1955.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. — М.: Наука, 1987.
6. Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. — М.: Наука, 1967.
7. Фенелонов В. Б., Заграфская Р. В. Некоторые вопросы моделирования структуры катализаторов, носителей и адсорбентов // Моделирование пористых материалов. — Новосибирск: ИК СО АН СССР, 1976.
8. Карнаузов А. П. Модели пористых систем // Там же.

г. Новосибирск

Поступила 16/XII 1987 г.
в окончательном варианте — 11/VIII 1988 г.

УДК 539.32

П. В. Гельд, Е. А. Митюшов

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД САМОСГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УПРУГИХ СВОЙСТВ ГЕТЕРОГЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Упругие характеристики гетерогенных материалов в течение многих лет остаются предметом многочисленных как экспериментальных, так и теоретических исследований. Это неудивительно, поскольку они являются одними из важнейших характеристик конструкционных, в частности композиционных, материалов, во многом определяющими их служебные свойства.

Однако следует отметить, что многие феноменологические и теоретические методы оценки упругих характеристик гетерогенных материалов по данным об особенностях их структуры и свойствам фазовых составляющих зачастую основываются на формальных допущениях математического характера, облегчающих решение уравнений, учитывающих сложный характер взаимодействия между образующими их структурными элементами. При этом в них отсутствует четкая связь между используемыми упрощающими предположениями и соответствующими изменениями в описываемой физической модели гетерогенной системы. Между тем различные допущения иногда приводят к одинаковым результатам. Это, очевидно, достаточно однозначно свидетельствует об эквивалентности физических моделей, что не всегда принимается во внимание при выборе тех или иных расчетных зависимостей, применяемых при исследовании упругих характеристик реальных гетерогенных материалов статистической и матричной структуры.

© 1990 Гельд П. В., Митюшов Е. А.