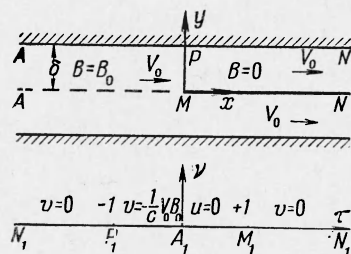


ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЖОУЛЕВОЙ ДИССИПАЦИИ В КАНАЛЕ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СТЕНКАМИ И ОДНОЙ НЕПРОВОДЯЩЕЙ ПЕРЕГОРОДКОЙ ПРИ ТЕЧЕНИИ ПО НЕМУ ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЫ В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. Б. Ватажин (Москва)

В работе [1] было указано на целесообразность введения непроводящих перегородок в канал магнитогидродинамического генератора для увеличения его электрического к. п. д. в случае неоднородного по длине канала магнитного поля. Если же магнитное поле в канале однородно, то при помощи моделирования канала на электролитической ванне было показано, что введение перегородок уменьшает к. п. д. генератора [2]. Электрические характеристики каналов генератора с непроводящими перегородками в случае однородного магнитного поля и поля, сосредоточенного только в электродной зоне, подробно изучены в статье [3]. В каналах генератора могут реализоваться условия, когда однородное магнитное поле достаточно далеко выходит за электродную зону, а затем его величина резко уменьшается до нуля. В областях входа и выхода электропроводной среды из зоны магнитного поля возникают замкнутые токи, приводящие к дополнительным потерям. Если длина участка однородного поля вне электродной зоны более чем в два раза превосходит ширину канала, то с большой степенью точности эффекты входа и выхода среды из поля в канале генератора можно изучать, рассматривая задачу о распределении тока в проводящей среде, движущейся в бесконечно длинном канале с диэлектрическими стенками при наличии магнитного поля, постоянного в одной половине канала и равного нулю в другой. Различные задачи о распределении тока в каналах с диэлектрическими стенками без перегородок рассматривались в работах [4-7]. Ниже определяется джоулева диссипация в канале



Фиг. 1

с диэлектрическими стенками при наличии одной бесконечно длинной непроводящей перегородки.

Рассмотрим изображенный на фигуре плоский канал $|x| < \infty, |y| < \delta$ с бесконечно тонкой непроводящей перегородкой $0 < x < \infty, y = 0$. Внешнее магнитное поле зададим в виде

$$\mathbf{B} = (0, 0, -B)$$

$$B = \begin{cases} B_0 = \text{const} & \text{при } x < 0 \\ 0 & \text{при } x > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Предположим, что электропроводность среды σ постоянна, скорость задается в виде $\mathbf{v} = (V_0 = \text{const}, 0, 0)$, а магнитные числа Рей-

нольдса намного меньше единицы¹. В силу симметрии достаточно рассмотреть верхнюю половину канала $AMNPA$. Система уравнений и граничных условий для распределения в области $|x| < \infty, 0 < y < \delta$ компонент $i_x(x, y), i_y(x, y)$ вектора плотности тока и электростатического потенциала $\varphi(x, y)$ имеет вид

$$i_x = -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad i_y = -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\sigma}{c} V_0 B, \quad \Delta \varphi = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \text{ на } AM; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \text{ на } MN, PN; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{c} V_0 B_0 \text{ на } AP \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{c} V_0 B_0 \quad \text{при } x = -\infty; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } x = \infty$$

Здесь B определяется формулой (1). Введем аналитическую функцию

$$f_1(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = u_1(z) + i v_1(z) \quad (z = x + iy)$$

Область $AMNPA$ конформно отобразим на верхнюю полуплоскость функцией

$$t = \exp(\pi z / \delta) \quad (t = \tau + i\nu)$$

Функция $f_1(z)$ переходит в аналитическую в области $\text{Im } t > 0$ функцию

$$f(t) = f_1[z(t)] = u(t) + i v(t)$$

¹ Задача решается в приближении, когда гидродинамические величины можно считать известными [8].

удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} u &= 0 & \text{на } A_1M_1, & & f(N_1) &= 0 \\ v &= 0 & \text{на } M_1N_1, N_1P_1, & & v &= -c^{-1}V_0B_0 & \text{на } P_1A_1 \end{aligned}$$

Функция $f(t)$ определяется при помощи формулы Келдыша — Седова [9]. Учитывая, что $f(A_1)$ ограничена, находим

$$f(t) = -\frac{1}{c\pi g(t)} V_0 B_0 \int_{-1}^0 \frac{1}{\tau - t} \left(\frac{1 + |\tau|}{|\tau|} \right)^{1/2} d\tau, \quad g(t) = \left(\frac{t-1}{t} \right)^{1/2} \quad (3)$$

Интеграл, входящий в (3), является интегралом типа Коши. Для квадратного корня выбрана ветвь, которая положительна при $\tau > 1$, $v = 0$. Для определения $u(\tau, 0)$ при $-1 < \tau < 0$ воспользуемся известной формулой для вычисления предельных значений интеграла типа Коши при t , стремящемся сверху к линии интегрирования. Получим

$$u(\tau, 0) = -\frac{1}{\pi c} V_0 B_0 \left[\ln \frac{\varepsilon + \sqrt{2}}{\varepsilon - \sqrt{2}} + \frac{2}{\varepsilon} \ln(\sqrt{2} - 1) \right], \quad \varepsilon^2 = \frac{1 + |\tau|}{|\tau|} \quad (4)$$

($-1 < \tau < 0$)

Определим джоулеву диссипацию

$$\begin{aligned} Q &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\delta} \frac{j^2}{\sigma} dx dy = \frac{2\sigma}{c} B_0 V_0 \int_{-\infty}^0 \int_0^{\delta} \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{c} V_0 B_0 \right) dx dy = \\ &= -\frac{2\sigma}{c} B_0 V_0 \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^x u_1(\xi, \delta) d\xi dx = -\frac{2\sigma \delta^2}{c\pi^2} B_0 V_0 \int_{-1}^0 \left(\int_{\mu}^0 \frac{u(\tau, 0)}{\tau} d\tau \right) \frac{d\mu}{\mu} \quad (5) \end{aligned}$$

Выражая функцию $u(\tau, 0)$ согласно (4) и интегрируя (5) по частям, найдем

$$Q = \frac{16\sigma\delta^2}{c^2\pi^3} B_0^2 V_0^2 \gamma, \quad \gamma = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} - 1) + \frac{\alpha\sqrt{2}}{16} - \frac{\beta \ln(\sqrt{2} - 1)}{16} \quad (6)$$

$$\alpha = \int_0^1 \frac{\ln^2 \mu}{V\mu} \left[\frac{1}{(1-\mu)\sqrt{1+\mu}} - 1 \right] d\mu, \quad \beta = \int_0^1 \frac{\ln^2 \mu}{V\mu} \left[1 - \frac{1}{(1+\mu)^{1/2}} \right] d\mu$$

Величина γ равна 0.6. Для канала без перегородки джоулева диссипация определяется формулой (6), в которой надо положить $\gamma = \gamma_* = 1.052$ [9]. Таким образом, наличие перегородки приводит к уменьшению диссипации в 1.76 раза. Заметим, что если бы перегородка занимала положение AMN , т. е. делила канал пополам, то джоулева диссипация определялась бы первой формулой в выражениях (6), в которой $\gamma = 0.5\gamma_*$. Как и следовало ожидать, $0.5\gamma_* < \gamma < \gamma_*$.

Поступила 10 III 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Sutton G. W. Design considerations of a magnetohydrodynamic electrical power generator. *Vistas Astronautics*, 1960, 3, 53—64 (N. Y. Soc. Automot. Engrs).
2. Назаренко В. В. О моделировании магнитогидродинамического течения в канале на электролитической ванне. *ПМТФ*, 1963, № 5, стр. 145.
3. Ватажин А. В., Немкова Н. Г. Некоторые двумерные задачи о распределении электрического тока в канале магнитогидродинамического генератора с непроводящими перегородками. *ПМТФ*, 1964, № 2.
4. Shercliff J. A. Edge effects in electromagnetic flowmeters. *J. Nuclear energy*, 1956, 3, 4, p. 305.
5. Voucher R. A., Ames D. B. End effect losses in dc magnetohydrodynamic generators. *J. Appl. Phys.*, 1961, 32, 5.
6. Ватажин А. В. Определение джоулевой диссипации в канале магнитогидродинамического генератора. *ПМТФ*, 1962, № 5, стр. 59—69.
7. Ватажин А. В. Некоторые двумерные задачи о распределении тока в электропроводной среде, движущейся по каналу в магнитном поле. *ПМТФ*, 1963, № 2.
8. Ватажин А. В., Регерер С. А. Приближенный расчет распределения тока при течении проводящей жидкости по каналу в магнитном поле. *ПММ*, 1962, т. 26, вып. 3.
9. Келдыш М. В., Седов Л. И. Эффективное решение некоторых задач для гармонических функций. *Докл. АН СССР*, 1937, т. 16, № 1.