ПМТФ, № 2, 1970

ЗАДАЧА РЭЛЕЯ ДЛЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Я. Г. Сапунков

(Саратов)

В работах [1–6, 9] изучались течения электропроводной неньютоновской жидкости с учетом влияния внешних электромагнитных полей. В частности, в [4] рассмотрены стационарные течения Куэтта и Гартмана для степенных неньютоновских жидкостей и показано различие поведения дилатантной и псевдопластической жидкости во внешнем магнитном поле. Нестационарные автомодельные течения степенных неньютоновских жидкостей вне магнитного поля рассматривались в [7].

Ниже исследуется неустановившееся автомодельное течение во внешнем магнитном поле степенной неньютоновской электропроводной жидкости под действием пластины, импульсно приведенной в равномерное движение. Решение задачи получено для слабых и сильных магнитных полей. Показано, что в дилатантных жидкостях возникают две области разделенные подвижной границей: покоящаяся жидкость и возмущенная жидкость. Если для псевдопластических жидкостей равномерно точные приближения получены методом разложения по малому параметру, то для дилатантных жидкостей решения, получаемые этим методом, имеют особенности в окрестности подвижной границы. Поэтому в последнем случае решение получено с помощью метода ПЛГ (Пуанкаре — Лайтхилла — Го) и метода внутренних и внешних разложений [8]. Для всех случаев получены два первых приближения решения задачи.

1. Пусть степенная неньютоновская электропроводная несжимаемая жидкость заполняет полупространство $y > 0$. В момент $t = 0$ плоскость $y = 0$ приходит импульсивно в состояние равномерного движения со скоростью U, направленной вдоль оси X. Магнитное число Рейнольдса мало. Вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ параллелен оси y.

Уравнения движения жидкости и граничные условия в этом случае имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\sigma\mu^2H^2}{\rho}u \qquad (1.1)$$

$$u(0,\ y) = 0 \quad u(t,\ 0) = U, \quad u(t,\ \infty) = 0, \quad t > 0$$

Здесь u — составляющая скорости вдоль оси x; ρ — плотность; k, n — параметры в законе, связывающем поверхностные напряжения со скоростями деформаций для степенных жидкостей; σ — электропроводность; μ — магнитная проницаемость.

Для автомодельности задачи потребуем, чтобы

$$H = At^{-1/2} \qquad (A = \text{const}) \qquad (1.2)$$

Решение для уравнения (1.1) будем искать в виде

$$u = Uf(\eta), \qquad \eta = y(nk\rho^{-1}tU^{n-1})^{-1/(n+1)} \qquad (1.3)$$

Для определения функций $f(\eta)$ получим уравнения и граничные условия

$$|f'|^{n-1}f'' + \frac{\eta}{n+1}f' = Nf, \quad f(0) = 1, \quad f(\infty) = 0$$
$$(N = \sigma\mu^2A^2\rho^{-1} = \text{const}) \qquad (1.4)$$

Штрих означает производную функции по ее аргументу. Получить аналитическое решение уравнения (1.4) при любом значении N не удается. Ниже получены решения для малых и больших значений N методами возмущений [8].

2. При малых N решения для функций $f(\eta)$ ищем в виде

$$f = f_0 + Nf_1 + N^2 f_2 + \ldots \tag{2.1}$$

Для нулевого приближения имеем

$$f''_0 |f_0'|^{n-1} + \frac{\eta}{n+1} f_0' = 0, \quad f_0(0) = 1, \quad f_0(\infty) = 0 \tag{2.2}$$

Решение для f_0 имеет вид [7]

$$f_0 = 1 - \int_0^\eta \varphi^{\frac{1}{n-1}} d\xi, \qquad \varphi(\xi) = C_1 + \frac{1-n}{2(1+n)} \xi^2 \tag{2.3}$$

$$C_1 = \left\{ \left[\frac{1+n}{2(1-n)} \right]^{1/2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1+n}{2(1-n)} \right) \right\}^{2(1-n)/(1+n)} \quad \text{при } n < 1$$

$$C_1 = \left\{ \left[\frac{1+n}{2(n-1)} \right]^{1/2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{n-1} \right) \right\}^{2(1-n)/(1+n)} \quad \text{при } n > 1$$

($B(a, b)$ — B-функция Эйлера)

Функцию f_0 можно выразить через неполную B-функцию [7], которая записывается через гипергеометрическую функцию.

Отметим, что в случае дилатантной жидкости ($n > 1$) при

$$0 \leqslant \eta \leqslant \left[\frac{2(n+1)}{n-1} C_1 \right]^{1/2} = s_* \tag{2.4}$$

жидкость движется, а при $\eta \geqslant s_*$ покоится, т. е. возмущения проникают в жидкость постепенно. В нулевом приближении влияние магнитного поля не учитывается.

Уравнение для определения f_1 имеет вид

$$|f_0'|^{n-1} f_1'' + \left[(1-n) |f_0'|^{n-2} f_0'' + \frac{\eta}{1+n} \right] f_1' = f_0 \tag{2.5}$$

$$f_1(0) = f_1(\infty) = 0$$

Учитывая функцию $\varphi(\eta)$, последнее уравнение можно переписать в виде

$$\varphi f_1'' + \eta \frac{2-n}{1+n} f_1' = f_0 \tag{2.6}$$

Решая это уравнение с соответствующими граничными условиями для псевдопластической жидкости ($n < 1$), получаем

$$f_1 = \int_0^\eta \varphi^{\frac{2-n}{n-1}} \left(\int_0^\xi f_0 \varphi^{\frac{1}{1-n}} d\gamma - C_2 \right) d\xi \tag{2.7}$$

$$C_2 = \left(\int_0^\infty \varphi^{\frac{2-n}{n-1}} d\xi \right)^{-1} \int_0^\infty \left(\varphi^{\frac{2-n}{n-1}} \int_0^\xi f_0 \varphi^{\frac{1}{1-n}} d\gamma \right) d\xi = \text{const}$$

Для дилатантной жидкости ($n > 1$) полученное аналогичным способом решение неверно вблизи границы возмущенной области течения, так как в ее окрестности $|f_0'| \ll |f_1'|$.

3. Чтобы получить равномерно пригодные приближения в случае дилатантной жидкости для малых N, воспользуемся методом ПЛГ [8]. Представим f и η в виде

$$f = f_0(s) + Nf_1(s) + \ldots, \qquad \eta = s + N\eta_1(s) + \ldots \tag{3.1}$$

Подставляя (3.1) в (1.4) и собирая члены, не содержащие N, получаем уравнение для $f_0(s)$, совпадающее с (2.2). Следовательно, решение для $f_0(s)$ совпадает с (2.3) для $n > 1$. Собирая члены с N, получаем

$$|f_0'|^{n-1} f_1'' + \frac{2-n}{1+n} s f_1' - |f_0'|^{n-1} f_0' \eta_1'' + \\ + \frac{n}{1+n} s f_0' \eta_1' + \frac{1}{1+n} f_0' \eta_1 = f_0 \tag{3.2}$$

Следуя принципу: приближения высших порядков имеют не большую особенность, чем первое приближение [8], — разобьем уравнение (3.2) на два уравнения для определения η_1 и f_1 соответственно

$$|f_0'|^{n-1} f_0' \eta_1'' - \frac{ns}{1+n} f_0' \eta_1' = -f_0 \tag{3.3}$$

$$|f_0'|^{n-1} f_1'' + \frac{2-n}{1+n} s f_1' = -\frac{1}{1+n} \eta_1 f_0' \tag{3.4}$$

Интегрируя (3.3) и учитывая сформулированный выше принцип, получаем

$$\eta_1 = C_3 + g(s), \qquad g(s) = \int_0^s \varphi^{-\frac{n}{n-1}} \left(\int_{s_*}^s f_0 ds \right) ds \tag{3.5}$$

Постоянная C_3 определится ниже. Интегрируя уравнение (3.4) и удовлетворяя условиям $f_1'(s_*) = f_1(s_*) = 0$, будем иметь

$$f_1 = \frac{1}{n+1} \int_{s_*}^s \varphi^{\frac{2-n}{n-1}} \left(\int_{s_*}^s \eta_1 ds \right) ds \tag{3.6}$$

Из условия $f = 1$ при $\eta = 0$ следует (3.7)

$$C_3 = \frac{f_1(0)}{f_0'(0)} = \left[(n+1) C_1^{\frac{1}{n-1}} + \int_0^{s_*} \varphi^{\frac{2-n}{n-1}} (s_* - s) ds \right]^{-1} \int_s^{s_*} \varphi^{\frac{2-n}{n-1}} \left(\int_{s_*}^s g(s) ds \right) ds$$

В полученном решении величины f_0' и f_1' одного порядка для $0 \leqslant s \leqslant s_*$. Граница возмущенной области по первому приближению определяется соотношением

$$\eta = \eta_* = \eta(s_*) = s_* + N[C_3 + g(s_*)] \tag{3.8}$$

В частном случае, когда $n = 2$, интегралы в формулах (2.3), (3.5) — (3.8) вычисляются в элементарных функциях, и тогда имеем

$$f_0 = {}^1/_{18}(s_* - s)^2(2s_* + s), \qquad s_* = 3^{2/3}$$

$$f_1 = {}^1/_3\{16ss_*^2 \ln 2s_* - 12s_*^2(s + s_*) \ln [{}^1/_2(s + s_*)/s_*] - \\ - 4s_*(s_* + s)^2 \ln(s + s_*) + (s - s_*)^2 [s_*({}^{101}/_{12} + 4 \ln s_* + \\ + 3 \ln 2) + {}^1/_6 s] + (s - s_*) 4s_*(2s_* + s)\}$$

$$\eta_1 = s_*(6 \ln 2 - {}^{23}/_6) - 6s_* s/(s + s_*) + 4s_* \ln(1 + s/s_*) - {}^1/_2 s$$

$$\eta_* = s_*[1 - N({}^{22}/_3 - 10 \ln 2)] = 2.080 - 0.836N \tag{3.9}$$

Из (3.9) видно, что с увеличением N величина η_*, определяющая закон движения границы возмущенной жидкости, уменьшается.

4. Рассмотрим решение задачи для случая больших значений N. Произведя в уравнении (1.4) замену переменных

$$f(\eta) = F(z), \qquad z = \eta N^{1/(1+n)} \tag{4.1}$$

получим

$$|F'|^{n-1}F'' - F = -N^{-1}\frac{z}{1+n}F', \quad F(0) = 1, \quad F(\infty) = 0 \tag{4.2}$$

Решение для $F(z)$ ищем в виде

$$F = F_0 + N^{-1}F_1 + N^{-2}F_2 + \ldots \tag{4.3}$$

Подставляя (4.3) в (4.2) и собирая члены с одинаковыми степенями N, составляем уравнения для определения F_i. Решая эти уравнения и удовлетворяя соответствующим граничным условиям, получаем

$$F_0 = \zeta^{\frac{n+1}{n-1}}, \qquad \zeta = 1 + \frac{1-n}{2}\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{n+1}} z \tag{4.4}$$

$$F_1 = \frac{1}{(n-1)^2}\left(\zeta^{\frac{2}{n-1}} - \zeta^{\frac{1+n}{n-1}}\right) + \frac{2(1+n)}{(1-n)^2(3+n)}\zeta^{\frac{2}{n-1}}\ln\zeta$$

В случае псевдопластической жидкости $0 \leqslant z \leqslant \infty$, а для дилатантной жидкости

$$0 \leqslant z \leqslant z_* = \frac{2}{n-1}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n/(1+n)}$$

Однако если для псевдопластической жидкости формулы (4.4) дают равномерно точные приближения, то для дилатантной жидкости полученные приближения справедливы только вне окрестности $z = z_*$.

В окрестности $z = z_*$, т. е. в окрестности границы возмущенной жидкости, $|F_0'| \ll |F_1'|$ и поэтому разложение (4.2) для дилатантной жидкости в этой окрестности несправедливо.

5. Для того чтобы для дилатантной жидкости получить равномерно точные приближения во всей области течения, применим метод внутренних и внешних разложений [8]. Введем вместо функции $F(z)$ обратную функцию $z(F)$, которая удовлетворяет следующему уравнению и граничным условиям:

$$z''|z'|^{-2-n} - F = -N^{-1}z\,[(1+n)\,z']^{-1} \tag{5.1}$$

$$z(1) = 0, \qquad z'(0) = -\infty$$

Внешнее разложение для функции $z(F)$ будем искать в виде

$$z = z_0 + N^{-1}z_1 + N^{-2}z_2 + \ldots \tag{5.2}$$

Подставляя (5.2) в (5.1) и собирая члены с одинаковыми степенями N, получаем уравнения для z_i, решив которые, будем иметь

$$z_0 = \left(\frac{1+n}{2}\right)^{-1/(1+n)}\frac{1+n}{n-1}\left[1 - F^{(n-1)/(n+1)}\right]$$

$$z_1 = \left(\frac{1+n}{2}\right)^{-1/(1+n)}\frac{1}{n-1}\left[\frac{2}{n+3}\ln F - \frac{1}{n-1}\left(F^{(n-1)/(n+1)} - 1\right)\right] \tag{5.3}$$

Из (5.3) видно, что для дилатантных жидкостей $(n > 1)$ при $F \to 0$ $z_1 \to -\infty$, в то время как z_0 остается конечным. Поэтому в окрестности $F_0 = 0$ необходимо составить внутреннее разложение для $z(F)$, которое будет по известному принципу [8] сращиваться с внешним разложением. Введем внутренние переменные следующим образом:

$$z = Z_* + ZN^{-\alpha}, \qquad F = \Phi N^{-\beta}$$
$$(Z_*,\ \alpha,\ \beta = \mathrm{const}) \tag{5.4}$$

Показатели α и β выбираются так, чтобы во внутренней области в уравнении (5.1) член, стоящий справа, был того же порядка, что и члены слева, т. е. во внутренней области инерциальный член в уравнении (5.1) становится определяющим. Тогда для α и β имеем

$$\alpha = 1, \qquad \beta = (1 + n) / (1 - n) \tag{5.5}$$

Переписывая уравнение (5.1) во внутренних переменных, получаем

$$|Z'|^{-2-n} Z'' - \Phi = -(Z_* + ZN^{-1}) [(1 + n) Z']^{-1} \tag{5.6}$$

Для функции $Z(\Phi)$ имеем граничное условие

$$Z'(0) = -\infty \tag{5.7}$$

и условие сращивания внешнего и внутреннего разложений.

Записывая внешнее разложение (5.2), (5.3) во внутренних переменных (5.4), получаем

$$z = \left(\frac{1+n}{2}\right)^{-\frac{1}{1+n}} \frac{1+n}{n-1}\left[1 - \frac{2}{(n-1)(n+2)}\frac{\ln N}{N}\right] + \left(\frac{1+n}{2}\right)^{-\frac{1}{1+n}} \times$$
$$\times \left[-\frac{1+n}{n-1}\Phi^{\frac{n-1}{n+1}} \frac{2\ln\Phi}{(n+3)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)^2}\right] N^{-1} + o(N^{-1}) \tag{5.8}$$

Если $Z(\Phi)$ представить в виде

$$Z = Z_0 + o(1) \tag{5.9}$$

то из (5.4), (5.8), (5.9) получим

$$Z^* = \left(\frac{1+n}{2}\right)^{-\frac{1}{1+n}} \frac{n+1}{n-1}\left[1 - \frac{2\ln N}{(n-1)(n+3)N}\right] \tag{5.10}$$

$$Z_0 \to \left(\frac{1+n}{2}\right)^{-\frac{1}{1+n}}\left[-\frac{n+1}{n-1}\Phi^{\frac{n-1}{n+1}} + \frac{2\ln\Phi}{(n+3)(n-1)} + \frac{1}{(n-1)^2}\right] \text{ при } \Phi \to \infty \tag{5.11}$$

Соотношения (5.10), (5.11) показывают, что в разложение величины z должны входить не только члены, содержащие степени N, но и члены с $\ln N$. Из уравнения (5.6) получается уравнение для Z_0

$$|Z_0'|^{-2-n} Z_0'' - \Phi = [{}^1\!/_2(1 + n)]^{-1/(n+1)} [(1 + n) Z_0']^{-1} \tag{5.12}$$

Если Z_0' принять за искомую функцию, то (5.12) становится уравнением первого порядка и интегрируется численно с начальным условием (5.7). Затем, используя условие (5.11), можно определить $Z_0(\Phi)$.

Соотношение (5.11) дает первые члены разложения $Z_0(\Phi)$ при больших значениях аргумента. Из уравнения (5.12) легко получить следующие члены разложения. В окрестности $\Phi = 0$ функция $Z_0(\Phi)$ имеет разложение

$$Z_0(\Phi) = Z_0(0) + A_1\Phi^m + A_2\Phi^{2m} + A_3\Phi^{3m} + \ldots \tag{5.13}$$

где $m = (n - 1) / n$, а коэффициенты A_i однозначно определяются из (5.12) и (5.7).