УДК 536.46

ТЕПЛОВОЙ ВЗРЫВ КОЛЬЦЕВОГО СЛОЯ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ТРЕТЬЕГО РОДА

С. А. Бостанджиян

Институт структурной макрокинетики и проблем материаловедения РАН, 142432 Черноголовка
bosschg@gmail.com

Получено аналитическое решение задачи о тепловом взрыве кольцевого слоя для двух случаев: 1) внутренний цилиндр теплоизолирован, через поверхность внешнего цилиндра осуществляется теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона; 2) внешний цилиндр теплоизолирован, через поверхность внутреннего цилиндра осуществляется теплообмен по тому же закону. При различных значениях критерия Био построена зависимость критического значения параметра Франк-Каменецкого от отношения радиуса внутреннего цилиндра к радиусу внешнего цилиндра. Рассмотрены предельные случаи, когда это отношение стремится к нулю и к единице.

Ключевые слова: кольцевой слой, тепловой взрыв, зажигание, граничные условия третьего рода.

ВВЕДЕНИЕ

Задача о тепловом взрыве в кольцевом слое при граничных условиях первого рода рассматривалась в работах [1–4]. В стационарной теории теплового взрыва при преобразовании экспоненты по Франк-Каменецкому решение уравнения энергии содержит две постоянные интегрирования [5]. В тех случаях, когда удается исключить одну из них и выразить в явной форме зависимость параметра Франк-Каменецкого от второй постоянной и параметров задачи, можно получить зависимость критического значения параметра Франк-Каменецкого от параметров задачи. Так были получены аналитические решения задач теплового взрыва сплошного цилиндра [5], симметричного и несимметричного воспламенения плоского слоя [5, 6], полого цилиндра при граничных условиях первого рода [1–4].

Значительно сложнее обстоит дело, когда теплообмен с окружающей средой осуществляется по закону Ньютона и задается граничное условие третьего рода. В общем случае не удавалось исключить одну из постоянных интегрирования и выразить в явной форме параметр Франк-Каменецкого через вторую постоянную и параметры задачи. Впервые это было реализовано в работе [7].

Тепловой взрыв полого цилиндра при граничных условиях третьего рода для общего случая, когда заданы коэффициенты теплоотдачи через поверхности цилиндров, рассматривался в работе [8]. Считалось, что температура окружающей среды одинакова для внутреннего и внешнего цилиндров. Поскольку зависимость параметра Франк-Каменецкого от постоянной интегрирования и параметров задачи невозможно получить в явном виде, использовался обратный метод. В отличие от прямого метода, в котором определяется поле температур, соответствующее заданным значениям критерия Био, в обратном методе задаются температуры на поверхностях цилиндров и определяются значения критерия Био, при которых эти температуры принимают заданные значения. С привлечением известных решений задачи теплового взрыва с граничными условиями первого рода были определены поле температур для критического значения параметра Франк-Каменецкого и градиенты температуры на поверхностях цилиндров, через которые выражаются значения параметра Био.

В постановке задачи теплового взрыва кольцевого слоя при граничных условиях третьего рода задаются значения параметра Био на поверхностях цилиндров, поэтому в обратной задаче приходится варьировать два параметра (температуры на поверхностях внутреннего и внешнего цилиндров), чтобы удовлетворить заданным граничным условиям. Даже при одинаковых температурах окружающей среды задача сложная, поэтому в работе [8] расчеты проведены для частных случаев, когда равны либо температуры на поверхностях двух цилиндров, либо критерии Био. При фиксированном значении отношения радиусов оба варианта могут быть реализованы только при определенном соотношении коэффициентов теплоотдачи через поверхности цилиндров.

Для двух практически важных случаев теплообмена с окружающей средой удалось исключить одну из постоянных интегрирования и выразить в явном виде параметр Франк-Каменецкого через вторую постоянную интегрирования и параметры задачи. Это следующие случаи: 1) внутренний цилиндр теплоизолирован, через поверхность внешнего цилиндра осуществляется теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона; 2) внешний цилиндр теплоизолирован, через поверхность внутреннего цилиндра осуществляется теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона. Данная работа посвящена исследованию теплового взрыва кольцевого слоя для этих двух вариантов. Важность такой постановки задачи обусловлена еще и тем, что ее решение является решением задач зажигания кольцевого слоя с поверхности внутреннего или внешнего цилиндра, когда теплообмен с окружающей средой осуществляется с поверхности второго цилиндра по закону Ньютона. Задача зажигания кольцевого слоя с поверхности внутреннего цилиндра при идеальном теплообмене поверхности внешнего цилиндра с внешней средой рассматривалась в [1, 2].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЕ

Имеется бесконечно длинный кольцевой зазор реакционно-способной массы, в которой протекает химическая реакция нулевого порядка, скорость реакции описывается законом Аррениуса.

Для того чтобы исключить одну постоянную интегрирования и получить зависимость параметра Франк-Каменецкого от второй постоянной и параметров задачи, решение уравнения теплового баланса для упомянутых выше двух случаев представим в различных формах.

1. Внутренний цилиндр теплоизолирован, теплообмен с окружающей средой осуществляется через поверхность внешнего цилиндра по закону Ньютона. В качестве характерного размера области принята толщина кольцевого слоя $h = R_0 - R_1$, где R_0 — радиус внешнего цилиндра, R_1 — радиус внутреннего цилиндра. Такой выбор характерного размера продиктован тем, что при заданном значении радиуса внешнего цилиндра толщина кольцевого слоя характеризует объем и геометрию реагирующей массы и позволяет рассмотреть предельные случаи $R_1 \to 0$ (сплошной цилиндр) и $R_0 \to \infty$ (плоский слой).

Если ввести безразмерные переменные и параметры

$$\theta = \frac{E}{RT_0^2}\,(T - T_0), \quad \xi = \frac{r}{h},$$

$$\delta = \frac{Qk_0}{\lambda}\frac{E}{RT_0^2}\,h^2 \exp\left(-\frac{E}{RT_0}\right), \tag{1}$$

$$d = \frac{R_1}{R_0}, \quad \mathrm{Bi} = \frac{\alpha h}{\lambda},$$

то уравнение энергии и граничные условия можно записать в следующем виде:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi} + \delta e^{\theta} = 0, \tag{2}$$

$$\xi = \frac{d}{1-d}\colon \frac{d\theta}{d\xi} = 0, \tag{3}$$

$$\xi = \frac{1}{1-d}\colon \frac{d\theta}{d\xi} = -\mathrm{Bi}\theta_s \left(\theta_s = \frac{E}{RT_0^2}(T_s - T_0)\right). \tag{4}$$

Здесь T — температура; T_0 — температура окружающей среды; T_s — температура поверхности внешнего цилиндра; Q — тепловой эффект реакции; E — энергия активации; k_0 — предэкспонент; R — универсальная газовая постоянная; λ — коэффициент теплопроводности; α — коэффициент теплоотдачи в окружающую среду; r — радиальная координата; d — отношение радиусов внутреннего и внешнего цилиндров; ξ — безразмерная координата; θ — безразмерная температура; δ — параметр Франк-Каменецкого; Bi — критерий Био. Франк-Каменецкий показал [5], что заменой функции и переменной

$$\theta = u - 2\ln\xi, \quad \eta = \ln\xi \tag{5}$$

уравнение (2) можно свести к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2u}{d\eta^2} + \delta e^u = 0, \tag{6}$$

описывающему тепловой взрыв плоского слоя. Общее решение этого уравнения имеет вид [5]

$$u = \ln\frac{a}{\mathrm{ch}^2[b \pm (a\delta/2)^{1/2}\eta]}, \tag{7}$$

где a и b — постоянные интегрирования.

Легко показать, что если замену переменной сделать в виде $\eta = \ln\xi + \ln c$, где c — постоянная величина, то для функции u получится то же самое уравнение (6). Основная идея, позволяющая выразить параметр Франк-Каменецкого в явном виде только через одну постоянную интегрирования, заключается в подборе такого выражения для c, в котором слагаемое, содержащее логарифм, обращалось бы в нуль на теплоизолированной поверхности.

Если в уравнении (2) выполнить замену вида

$$\theta = u - 2\ln\xi, \quad \eta = \ln\xi + \ln\frac{1-d}{d},$$

то для функции $u(\eta)$ получается уравнение теплового взрыва плоского слоя (6). Взяв в (7) знак минус и перейдя к исходным переменным, решение уравнения (2) можно записать в виде

$$\theta(\xi) = \ln\frac{a}{\xi^2\mathrm{ch}^2\{b - (a\delta/2)^{1/2}\ln[\xi(1-d)/d]\}}.$$

Постоянные интегрирования a и b определяются при граничных условиях (3) и (4). При граничном условии (3)

$$(a\delta/2)^{1/2} = \mathrm{cth}\, b. \tag{8}$$

Отсюда видно, что $b > 0$. Разрешим (8) относительно δ:

$$\delta = \frac{2\mathrm{cth}^2 b}{a}. \tag{9}$$

При граничном условии (4)

$$2(1-d)[1 - \mathrm{cth}\, b\, \mathrm{th}\,(b + \mathrm{cth}\, b\ln d)] =$$
$$= \mathrm{Bi}\ln[a(1-d)^2/\mathrm{ch}^2(b + \mathrm{cth}\, b\ln d)]. \tag{10}$$

Отсюда постоянную a можно выразить через постоянную b:

$$a = \frac{\mathrm{ch}^2(b + \mathrm{cth}\, b\ln d)}{(1-d)^2}\times$$
$$\times\exp\Big\{\frac{2(1-d)}{\mathrm{Bi}}[1 - \mathrm{cth}\, b\, \mathrm{th}\,(b + \mathrm{cth}\, b\ln d)]\Big\}.$$

Подставив a в (9), запишем явное выражение δ через b:

$$\delta = 2(1-d)^2\mathrm{cth}^2 b\times$$
$$\times\exp\Big\{-\frac{2(1-d)}{\mathrm{Bi}}[1 - \mathrm{cth}\, b\, \mathrm{th}\,(b + \mathrm{cth}\, b\ln d)]\Big\}\Big/$$
$$\Big/\mathrm{ch}^2(b + \mathrm{cth}\, b\ln d). \tag{11}$$

Приравняв к нулю производную функции δ, получим трансцендентное уравнение

$$\mathrm{th}\, b + (\mathrm{sh}^2 b - \ln d)\mathrm{th}\,(b + \mathrm{cth}\, b\ln d) + \frac{1-d}{\mathrm{Bi}}\times$$
$$\times\Big[\mathrm{th}\,(b + \mathrm{cth}\, b\ln d) - \frac{(\mathrm{sh}^2 b - \ln d)\mathrm{cth}\, b}{\mathrm{ch}^2(b + \mathrm{cth}\, b\ln d)}\Big] = 0 \tag{12}$$

для определения значения b_0, при котором параметр δ достигает максимального значения, являющегося критическим.

Критическое значение параметра Франк-Каменецкого δ^* определяется по формуле (11) при $b = b_0$:

$$\delta^* = 2(1-d)^2\mathrm{cth}^2 b_0\times$$
$$\times\exp\Big\{-\frac{2(1-d)}{\mathrm{Bi}}[1 - \mathrm{cth}\, b_0\mathrm{th}\,(b_0 + \mathrm{cth}\, b_0\ln d)]\Big\}\Big/$$
$$\Big/\mathrm{ch}^2(b_0 + \mathrm{cth}\, b_0\ln d). \tag{13}$$

Значение δ^* является функцией двух параметров — отношения радиусов внутреннего и внешнего цилиндров и критерия Bi, характеризующего интенсивность теплообмена с окружающей средой через поверхность внешнего цилиндра.

2. Внешний цилиндр теплоизолирован, теплообмен с окружающей средой осуществляется через поверхность внутреннего цилиндра по закону Ньютона. Нужно решить уравнение (2) при следующих граничных условиях:

$$\xi = \frac{d}{1-d}: \quad \frac{d\theta}{d\xi} = \mathrm{Bi}\theta_s, \tag{14}$$

$$\xi = \frac{1}{1-d}: \quad \frac{d\theta}{d\xi} = 0. \tag{15}$$

Если в уравнении (2) сделать замену

$$\theta = u - 2\ln\xi, \quad \eta = \ln\xi + \ln(1-d)$$

и в решении полученного уравнения теплового взрыва плоского слоя перейти к исходным переменным, то

$$\theta(\xi) = \ln \frac{a}{\xi^2 \mathrm{ch}^2\{b - (a\delta/2)^{1/2} \ln[\xi(1-d)]\}}. \quad (16)$$

Удовлетворение граничному условию (15) дает выражение (8), из которого вытекает (9). Удовлетворение граничному условию (14) с учетом (8) приводит к выражению

$$2(1-d)[1 - \mathrm{cth}\, b \mathrm{th}\,(b - \mathrm{cth}\, b \ln d)] =$$
$$= -d\mathrm{Bi} \ln[a(1-d)^2/d^2\mathrm{ch}^2(b - \mathrm{cth}\, b \ln d)]. \quad (17)$$

Отсюда

$$a = \frac{d^2\mathrm{ch}^2(b - \mathrm{cth}\, b \ln d)}{(1-d)^2} \times$$
$$\times \exp\left\{ -\frac{2(1-d)}{d\mathrm{Bi}}[1 - \mathrm{cth}\, b \mathrm{th}\,(b - \mathrm{cth}\, b \ln d)]\right\}.$$

Подставив a в (9), получим явное выражение δ через b:

$$\delta = 2(1-d)^2 \mathrm{cth}^2 b \times$$
$$\times \exp\left\{ \frac{2(1-d)}{d\mathrm{Bi}}[1 - \mathrm{cth}\, b \mathrm{th}(b - \mathrm{cth}\, b \ln d)]\right\} \Big/$$
$$\Big/ d^2\mathrm{ch}^2(b - \mathrm{cth}\, b \ln d). \quad (18)$$

Приравняв к нулю производную функции δ, запишем трансцендентное уравнение

$$\mathrm{th}\, b + (\mathrm{sh}^2 b + \ln d)\mathrm{th}\,(b - \mathrm{cth}\, b \ln d) -$$
$$- \frac{1-d}{d\mathrm{Bi}}\Bigg[\mathrm{th}\,(b - \mathrm{cth}\, b \ln d) -$$
$$- \frac{\mathrm{sh}^2 b + \ln d}{\mathrm{th}\, b\, \mathrm{ch}^2(b - \mathrm{cth}\, b \ln d)}\Bigg] = 0, \quad (19)$$

из которого определяется корень b_0, при котором параметр δ достигает своего критического значения:

$$\delta^* = 2(1-d)^2 \mathrm{cth}^2 b_0 \times$$
$$\times \exp\left\{ \frac{2(1-d)}{d\mathrm{Bi}}[1 - \mathrm{cth}\, b_0 \mathrm{th}\,(b_0 - \mathrm{cth}\, b_0 \ln d)]\right\} \Big/$$
$$\Big/ d^2\mathrm{ch}^2(b_0 - \mathrm{cth}\, b_0 \ln d). \quad (20)$$

Полученные решения допускают два предельных случая: а) $d \to 0$; б) $d \to 1$. Из выражения для толщины кольцевого слоя $h = R_0 - R_1$ имеем

$$R_0 = \frac{h}{1-d}. \quad (21)$$

Отсюда видно, что $h \to R_0$, $R_1 \to 0$ при $d \to 0$, и кольцевой слой превращается в сплошной цилиндр. Этот случай рассмотрен в [7]. Из (21) также видно, что если $d \to 1$, то при фиксированной толщине h кольцевого слоя радиусы внутреннего и внешнего цилиндров стремятся к бесконечности, т. е. стремятся к бесконечности радиусы кривизны поверхностей цилиндров, в результате кольцевой слой превращается в плоский толщиной h. Задача о тепловом взрыве плоского слоя при граничных условиях третьего рода рассмотрена в работах [9, 10]. Решая указанную задачу по описанной выше схеме отдельно для случаев, когда теплоизолирована нижняя пластина (предельный случай первого варианта) и когда теплоизолирована верхняя пластина (предельный случай второго варианта), приходим к одним и тем же формулам.

Критическое значение параметра Франк-Каменецкого выражается формулой

$$\delta^* = 2\left[\frac{b_0}{\mathrm{ch}\, b_0} \exp\left(-\frac{b_0 \mathrm{th}\, b_0}{\mathrm{Bi}}\right)\right]^2, \quad (22)$$

где b_0 является корнем трансцендентного уравнения

$$1 - b\mathrm{th}\, b - \frac{1}{\mathrm{Bi}}\left(b\, \mathrm{th}\, b + \frac{b^2}{\mathrm{ch}^2 b}\right) = 0. \quad (23)$$

Эти формулы с точностью до обозначений совпадают с соответствующими формулами из работы [10].

Совпадение двух решений в предельном случае $d \to 1$ — физически очевидный факт, так как неважно, поверхность какой из пластины теплоизолирована.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Обсуждение результатов расчетов проведем для двух рассмотренных выше вариантов.

1. Внутренний цилиндр теплоизолирован, на поверхности внешнего цилиндра задан параметр Bi. На рис. 1 приведена зависимость $\delta^*(d)$ при различных значениях Bi. Значения δ^* на

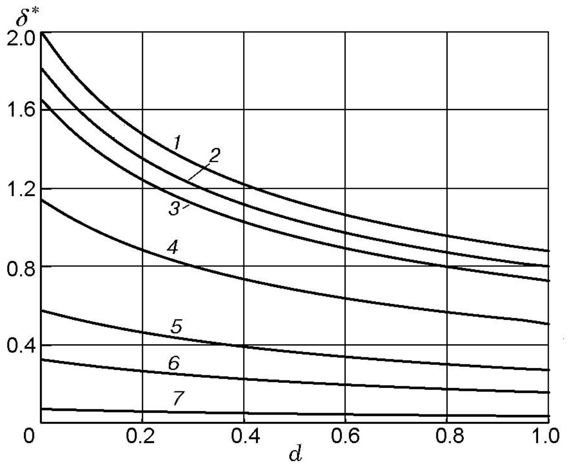

Рис. 1. Зависимость $\delta^*(d)$ при различных значениях Bi. Вариант 1:

1 — Bi = 10 000, *2* — 20, *3* — 10, *4* — 3, *5* — 1, *6* — 0.5, *7* — 0.1

левых концах кривых совпадают с полученными в работе [7] для случая сплошного цилиндра. Значения δ^* на правых концах совпадают с полученными по формуле (22) для предельного случая $d \to 1$. При Bi = 10 000 (кривая *1*) можно считать, что через поверхность внешнего цилиндра осуществляется идеальный теплообмен с окружающей средой, т. е. на этой поверхности задано граничное условие первого рода. С уменьшением числа Bi условия теплообмена ухудшаются, $\delta^* \to 0$ при Bi $\to 0$, т. е. происходит адиабатический тепловой взрыв.

2. Внешний цилиндр теплоизолирован, на поверхности внутреннего цилиндра задан параметр Bi. Зависимость $\delta^*(d)$ при различных значениях Bi приведена на рис. 2. С ростом d кривые монотонно возрастают от нуля до значений δ^* для плоского слоя при соответствующих значениях Bi, которые являются предельными при $d \to 1$. Кривая *1* соответствует случаю, когда на поверхности внутреннего цилиндра задано граничное условие первого рода. Как и в первом варианте, $\delta^* \to 0$ при Bi $\to$ 0. Монотонное убывание δ^* при уменьшении d от единицы до нуля объясняется тем, что при таком уменьшении увеличивается объем реагирующего вещества с одновременным уменьшением теплоотдающей поверхности. В предельном случае $d \to 0$ кольцевой слой превращается в сплошной цилиндр и, поскольку внешний цилиндр теплоизолирован, происходит адиабатический тепловой взрыв. По этой причине независимо от значения числа Био $\delta^* \to 0$ при

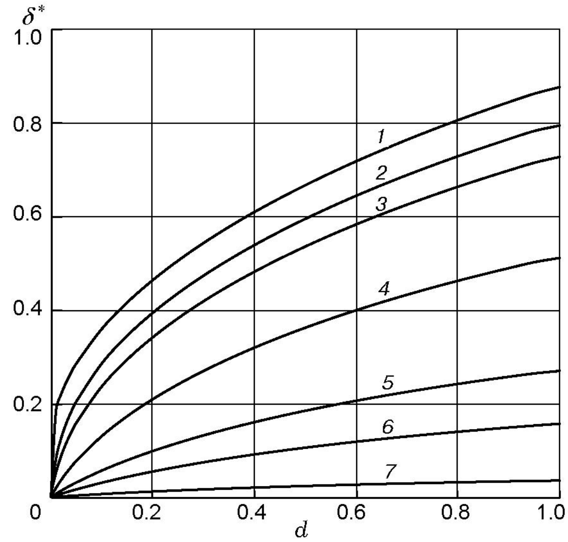

Рис. 2. Зависимость $\delta^*(d)$ при различных значениях Bi. Вариант 2:

1 — Bi = 10 000, *2* — 20, *3* — 10, *4* — 3, *5* — 1, *6* — 0.5, *7* — 0.1

$d \to 0$.

На рис. 3 приведена зависимость $\delta^*(d)$ при двух значениях Bi для двух рассмотренных вариантов решения задачи. Кривые *1* и *2* соответствуют случаю, когда теплоизолирован внутренний цилиндр, кривые *3* и *4* — когда теплоизолирован внешний цилиндр. Рисунок наглядно представляет совпадение δ^* при $d \to 1$. Так как для всех значений Bi зависимость $\delta^*(d)$

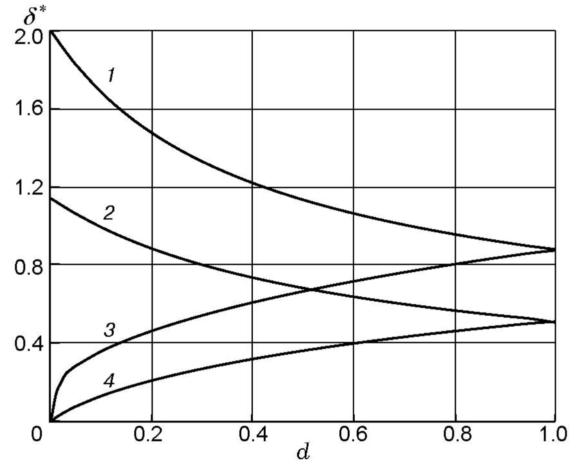

Рис. 3. Зависимость $\delta^*(d)$ при двух значениях Bi:

вариант 1: *1* — Bi = 10 000, *2* — Bi = 3; вариант 2: *3* — Bi = 10 000, *4* — Bi = 3 при теплоизолированном внутреннем цилиндре монотонно убывает (см. рис. 1), а при теплоизолированном внешнем цилиндре монотонно возрастает (см. рис. 2) и в предельном случае $d \to 1$ значения δ^* совпадают, то разность этих критических значений с ростом d монотонно убывает от двух при $d \to 0$ до нуля при $d \to 1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

• Задача о тепловом взрыве кольцевого слоя решена в двух вариантах: 1) внутренний цилиндр теплоизолирован, через поверхность внешнего цилиндра осуществляется теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона; 2) внешний цилиндр теплоизолирован, через поверхность внутреннего цилиндра осуществляется теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона.

• При различных значениях критерия Био построены кривые зависимости критического значения параметра Франк-Каменецкого δ^*, в котором в качестве характерного размера принята толщина кольцевого слоя, от отношения d радиуса внутреннего цилиндра к радиусу внешнего цилиндра.

• Рассмотрены предельные случаи: $d \to 0$ (сплошной цилиндр) и $d \to 1$ (плоский слой). В первом варианте кривые монотонно убывают, во втором — монотонно возрастают, в предельном случае $d \to 1$ критические значения параметра Франк-Каменецкого совпадают.

• Задача в такой постановке является также задачей зажигания кольцевого слоя с поверхности одного из цилиндров, когда на поверхности другого цилиндра задано граничное условие третьего рода, так что полученные решения можно трактовать как решения задачи о зажигании кольцевого слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гришин А. М.** Некоторые задачи теории воспламенения // ПМТФ. — 1962. — № 5. — С. 75–79.
2. **Гришин А. М.** Исправление к работе «Некоторые задачи теории воспламенения» // ПМТФ. — 1963. — № 2. — С. 175–176.
3. **Бостанджиян С. А.** Тепловое воспламенение кольцевого слоя и его гидродинамическая аналогия // Физика горения и взрыва. — 1988. — Т. 24, № 4. — С. 10–19.
4. **Гайнутдинов Р. Ш., Воробьев Е. С., Асадуллина Г. Я.** Тепловой взрыв полого цилиндра // Физика горения и взрыва. — 1999. — Т. 35, № 2. — С. 65–67.
5. **Франк-Каменецкий Д. А.** Диффузия и теплопередача в химической кинетике. — М.: Наука, 1987.
6. **Бостанджиян С. А.** Несимметричное воспламенение плоского слоя и его гидродинамическая аналогия // Физика горения и взрыва. — 1988. — Т. 24, № 5. — С. 3–8.
7. **Барзыкин В. В., Мержанов А. Г.** Краевая задача в теории теплового взрыва // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 120, № 6. — С. 1271–1273.
8. **Гайнутдинов Р. Ш.** Тепловой взрыв полого цилиндра при граничных условиях третьего рода // Физика горения и взрыва. — 2004. — Т. 40, № 2. — С. 29–32.
9. **Thomas P. H.** On the thermal conduction equation for self-heating materials with surface cooling // Trans. Faraday Soc. — 1958. — V. 54, pt 1. — P. 60–65.
10. **Гришин А. М., Тодес О. М.** Об определении условий воспламенения // ПМТФ. — 1965. — № 1. — С. 68–75.

Поступила в редакцию 27/VII 2010 г.,
в окончательном варианте — 18/X 2010 г.