

КОЛЕБАНИЯ ПЛАЗМЫ С ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ
ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Р. З. Муратов, М. В. Самохин

(Москва)

Вопросу о взаимодействии пучков заряженных частиц с плазмой посвящено большое количество работ (подробная библиография приведена, например, в обзоре [1]). Анализ дисперсионного уравнения показывает, что в случае достаточно медленного моноэнергетического пучка электронов малой плотности в системе, состоящей из такого пучка и плазмы, не возбуждаются нарастающие продольные волны [2-4].

Исследуется задача о проникновении внешнего продольного электрического поля в полуограниченную плазму с электронным пучком в отсутствие неустойчивостей в системе (граничная задача для нарастающих волн рассмотрена в [5]). Эта задача является в некотором смысле обобщением второй части известной работы Л. Д. Ландау [6] на случай плазмы с пучком. С другой стороны, в отсутствие внешнего электрического поля эту задачу можно рассматривать как граничную задачу о взаимодействии слабо модулированного пучка электронов с плазмой.

1. Получение интегрального уравнения. Пусть плазма ограничена плоской стенкой, идеально отражающей падающие на нее частицы, и пусть перпендикулярно к этой плоскости в глубь плазмы распространяется пучок электронов с плотностью заряда ρ_0 и скоростью v_0 относительно плазмы. Предполагается, что в пучке нет теплового разброса скоростей. Расположим ось x вдоль стенки в направлении распространения пучка; пусть u — компонента скорости вдоль этой оси.

Функция распределения $f(u, x)$ должна на границе обладать свойством $f(u, 0) = f(-u, 0)$; при этом пользуемся функцией распределения, проинтегрированной по V_y и V_z .

На границе заданы также величина продольного электрического поля E_1 и величины возмущений плотности ρ_1 и скорости v_1 пучка.

Если отклонения от равновесия малы, то плазменные колебания системы описываются линейными уравнениями [3]

$$\begin{aligned} -i\omega f + u \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{e}{m} E \frac{df_0}{du} = 0, \quad -i\omega v + v_0 \frac{dv}{dx} = -\frac{e}{m} E \\ \frac{dE}{dx} = -4\pi e \int_{-\infty}^{\infty} f du + 4\pi \rho, \quad -i\omega \rho + \rho_0 \frac{d\rho}{dx} + v_0 \frac{d\rho}{dx} = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь f — отклонение функции распределения от максвелловской функции распределения f_0 , ρ — отклонение плотности заряда пучка от равновесного значения ρ_0 , которое считается скомпенсированным избытком положительного заряда в плазме, а v — отклонение скорости пучка от равновесного значения v_0 . Зависимость всех величин от времени принята в виде $\exp(-i\omega t)$.

Система уравнений (1.1) может быть сведена к интегральному уравнению относительно $E(x)$. Для этого следует предварительно произвести формальное интегрирование каждого уравнения системы

Так, из двух последних уравнений (1.1) найдем

$$v = \left(v_1 - \frac{e}{mv_0} \int_0^x E \chi(-\xi) d\xi \right) \chi(x) \quad \left(\chi(\xi) = \exp \frac{i\omega\xi}{v_0} \right) \quad (1.2)$$

$$\rho = \left\{ \rho_1 - \frac{\rho_0}{v_0^2} \left[i\omega v_1 x - \frac{e}{m} \int_0^x E \chi(-\xi) d\xi - \frac{i\omega e}{mv_0} \int_0^x E \chi(-\xi) (x-\xi) d\xi \right] \right\} \chi(x) \quad (1.3)$$

Здесь не приводится вытекающее из первого уравнения (1.1) соотношение, связывающее f и E ; оно полностью совпадает с выражением в статье Л. Д. Ландау [6] и необходимо лишь для получения интегрального уравнения. Наконец, интегрирование второго уравнения (1.1) дает

$$E = E_1 + \frac{4\pi i}{\omega} \left(e \int_{-\infty}^{\infty} u f(u, x) du - \rho_0 v - \rho v_0 + j_1 \right) \quad (j_1 = \rho_0 v_1 + \rho_1 v_0) \quad (1.4)$$

Здесь использовалось соотношение (из первого уравнения (1.1))

$$i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f du = \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} u f du$$

Таким образом, приходим к следующему интегральному уравнению:

$$E(x) - \int_0^x L(x-\xi) E(\xi) d\xi - \int_0^x K(x-\xi) E(\xi) d\xi - \\ - \int_x^{\infty} K(\xi-x) E(\xi) d\xi + \int_0^{\infty} K(\xi+x) E(\xi) d\xi = \psi(x) \quad (1.5)$$

$$K_+(\xi) = \frac{4\pi e^2}{m\omega} \int_0^{\infty} \frac{df_0}{du} \exp \frac{i\omega\xi}{u} du \quad (\xi > 0), \quad L(\xi) = \frac{4\pi e\rho_0}{mv_0^2} \xi \exp \frac{i\omega\xi}{v_0} \quad (\xi > 0)$$

$$\psi(x) = E_1 - \frac{mv_0 v_1}{e} L(x) + \frac{4\pi i j_1}{\omega} \left(1 - \exp \frac{i\omega x}{v_0} \right)$$

Заметим, что функция $K(\xi)$ исследована в работе Л. Д. Ландау [6].

2. Интегральное представление решения. Приведем интегральное уравнение к виду, более удобному для решения. Так, поле $E(x)$ удобно представить в виде суммы двух членов

$$E(x) = E_{\infty} + E^{\circ}(x) \quad (2.1)$$

Нетрудно показать, что величина поля при $x \rightarrow \infty$

$$E_{\infty} = \frac{E_1 + 4\pi i j_1 / \omega}{1 - (\omega_- / \omega)^2 - (\omega_+ / \omega)^2} = \frac{E_1 + 4\pi i j_1 / \omega}{\varepsilon} \quad (2.2)$$

где ω_- и ω_+ — ленгмюровские частоты плазмы без пучка и электронного пучка соответственно, а ε — диэлектрическая проницаемость плазмы с пучком. Доопределим формально функции $K(\xi)$ и $L(\xi)$ и неизвестную функцию $E^{\circ}(x)$ в область отрицательных значений аргумента:

$$K(-\xi) = K(\xi), \quad L(-\xi) = L(\xi), \quad E^{\circ}(-x) = -E^{\circ}(x) \quad (2.3)$$

Тогда интегральное уравнение для $E^{\circ}(x)$ может быть записано в виде

$$E^{\circ}(x) - \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi) E^{\circ}(\xi) d\xi \mp \int_0^x L(x-\xi) E^{\circ}(\xi) d\xi = \pm g(\pm x) \quad (2.4)$$

$$g(x) = \psi(x) - E_{\infty} + E_{\infty} \int_0^x [L(\xi) + 2K(\xi)] d\xi \quad (2.5)$$

Здесь верхние знаки — при $x > 0$, нижние — при $x < 0$.

Будем решать интегральное уравнение (2.4) методом Фурье. Умножая обе стороны уравнения на $\exp(-ikx)$ и интегрируя по x от $-\infty$ до $+\infty$, получим

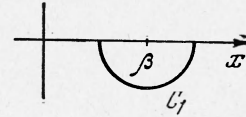
$$E^\circ(k) [1 - K(k)] - E_k^\circ L_k + E_{-k}^\circ L_{-k} = g_k - g_{-k} \quad (2.6)$$

Здесь для любой величины $\varphi(x)$ символы $\varphi(k)$ и φ_k определяются равенствами

$$\varphi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \varphi(x) dx,$$

$$\varphi_k = \int_0^{\infty} e^{-ikx} \varphi(x) dx$$

(2.7)



Фиг. 1

Легко видеть, что если $\varphi(x)$ — четная функция, то ее компонента Фурье $\varphi(k) = \varphi_k + \varphi_{-k}$; если же $\varphi(x)$ — нечетная, то $\varphi(k) = \varphi_k - \varphi_{-k}$.

Учитывая нечетность, представим уравнение (2.6) в виде

$$E_k^\circ [1 - L_k - K(k)] - E_{-k}^\circ [1 - L_{-k} - K(k)] = g_k - g_{-k} \quad (2.8)$$

Для решения уравнения (2.8) следует установить связь между функциями аргумента $-k$ и комплексно-сопряженными функциями аргумента k , что оказывается возможным, если выделить в $E^\circ(x)$, $g(x)$, $L(x)$ и $K(x)$ действительные и мнимые части и отдельно рассмотреть соответствующие им образы. Тогда (2.8) сведется к системе двух уравнений, связывающих мнимые части некоторых аналитических функций от k . Действительные части этих аналитических функций могут отличаться лишь на константы. Однако, анализируя поведение функций при $|k| \rightarrow \infty$, легко показать, что константы равны нулю. В результате получаем

$$E_k^\circ = \frac{g_k}{1 - L_k - K(k)}, \quad E^\circ(k) = \frac{g_k}{1 - L_k - K(k)} - \frac{g_{-k}}{1 - L_{-k} - K(k)} \quad (2.9)$$

Таким образом, электрическое поле представляется в виде

$$E = E_\infty + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{g_k}{1 - L_k - K(k)} - \frac{g_{-k}}{1 - L_{-k} - K(k)} \right] e^{ikx} dk \quad (2.10)$$

3. Распределение электрического поля и малых возмущений скорости пучка и его плотности. Следуя [2,6], введем функции $K_1(k)$ и $K_2(k)$, определяемые соотношениями

$$K_1(k) = \left(\frac{\omega}{\omega}\right)^2 \beta^2 [J_+(\beta) - 1], \quad K_2(k) = \left(\frac{\omega}{\omega}\right)^2 \beta^2 [J_-(\beta) - 1] \quad (3.1)$$

где [2]

$$J_+(\beta) = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_{C_1} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \frac{dx}{\beta - x} \quad \left(\beta = \frac{\omega}{ku^0}, \quad u^0 = \frac{V\theta}{m}\right) \quad (3.2)$$

Здесь θ — температура в энергетических единицах, m — масса электрона, а контур C_1 указан на фигуре.

Функция $J_-(\beta)$ отличается от $J_+(\beta)$ тем, что при интегрировании полюс обходится не снизу, а сверху. Поэтому

$$J_-(\beta) = J_+(\beta) + i\sqrt{2\pi} \beta \exp(-1/2 \beta^2) \quad (3.3)$$

Легко видеть, что $K(k) = K_1(k)$ при $k > 0$ и $K(k) = K_2(k)$ при $k < 0$. Аналогично этому введем функцию $\Pi(k) = K_k - K_{-k}$, а также

функции $\Pi_1(k)$ и $\Pi_2(k)$, определяемые следующими формулами:

$$\begin{aligned} \Pi_1(k) &= \Pi_2(k) - \sqrt{2\pi} i \frac{\omega^2 - \omega}{k^3 u^{\circ 3}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 u^{\circ 2}}\right) \\ \Pi_2(k) &= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\omega_-^2}{\omega k u^{\circ}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega_-^2 \omega}{k^3 u^{\circ 3}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 u^{\circ 2}}\right) \text{Ei}\left(\frac{\omega^2}{2k^2 u^{\circ 2}}\right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь $\text{Ei}(z)$ — интегральная показательная функция.

Можно показать, что $\Pi(k) = \Pi_1(k)$ при $k > 0$ и $\Pi(k) = \Pi_2(k)$ при $k < 0$.

Учитывая (3.1) и (3.4), из формулы (2.10) получим

$$\begin{aligned} E(x) &= E_\infty - \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \left[\frac{\Phi_+(k)}{1 - L_k - K_2(k)} + \frac{\Phi_-(k)}{1 - L_{-k} - K_2(k)} \right] dk - \\ &- \int_0^{\infty} e^{ikx} [K_1(k) - K_2(k)] \left\{ \frac{F_+(k)}{[1 - L_k - K_1(k)][1 - L_k - K_2(k)]} + \right. \\ &\left. + \frac{F_-(k)}{[1 - L_{-k} - K_1(k)][1 - L_{-k} - K_2(k)]} \right\} dk \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_{\pm} &= \frac{iE_\infty [L_{\pm k} - \Omega_+^2 + K_2(k) - \Omega_-^2 \pm \Pi_2(k)]}{2\pi k} + \frac{2j_1}{\omega(k \mp \omega/v_0)} \pm \frac{mv_1 \omega_+^2}{2\pi v_0 (k \mp \omega/v_0)^2} \\ F_{\pm} &= \pm \frac{iF_\infty}{2\pi k} [1 - L_{\pm k} - K_2(k) + \Pi_2(k) \pm \varepsilon] + \frac{2j_1}{\omega(k \mp \omega/v_0)} \pm \frac{mv_1 \omega_+^2}{2\pi v_0 (k \mp \omega/v_0)^2} \\ L_k &= \frac{\omega_+^2}{v_0^2 (k - \omega/v_0)^2}, \quad \Omega_+ = \frac{\omega_+}{\omega}, \quad \Omega_- = \frac{\omega_-}{\omega} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Полное вычисление интегралов (3.5) может быть произведено лишь численно. Однако асимптотическую формулу, дающую закон изменения поля $E(x)$ при значениях x , больших по сравнению с дебаевским радиусом a плазмы без пучка, нетрудно получить. Используя способ вычисления, полностью аналогичный примененному в статье [6], получаем выражение

$$\begin{aligned} E(x) &= E_\infty \left\{ 1 + \frac{2}{\sqrt{3\varepsilon}} \Omega_-^{-4/3} \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} \exp\left[-\frac{3}{4} \left(\frac{x}{\Omega_- a}\right)^{2/3}\right] \times \right. \\ &\left. \times \exp\left(i \left[\frac{3\sqrt{3}}{4} \left(\frac{x}{\Omega_- a}\right)^{2/3} + \frac{2\pi}{3} \right] \right) \right\} \quad \left(a = \left(\frac{\theta}{4\pi n e^2}\right)^{1/2} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Выражение (3.7) дает закон спада разности $E(x) - E_\infty$, аналогичный [6]. Этого и следовало ожидать, так как в пучке отсутствует тепловой разброс скоростей. Если $E_1 + 4\pi i j_1 / \omega$ обращается в нуль, то поле $E(x)$ при $x \rightarrow \infty$ стремится к нулю по экспоненциальному закону, что следует из оценки интегралов при помощи вычетов.

Зная закон распределения электрического поля в плазме, по формулам (1.2) и (1.3) можно найти распределение возмущения скорости пучка и его плотности. Преобразуем эти выражения к виду, более удобному для получения асимптотических формул

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{e}{mv_0} \exp\left(\frac{i\omega x}{v_0}\right) \int_x^\infty E(\xi) \exp\left(-\frac{i\omega \xi}{v_0}\right) d\xi \\ \rho(x) &= -\frac{\rho_0}{v_0} v(x) + \frac{i\omega e \rho_0}{mv_0^3} \exp\left(\frac{i\omega x}{v_0}\right) \int_x^\infty E(\xi) \exp\left(-\frac{i\omega \xi}{v_0}\right) (\xi - x) d\xi \end{aligned} \quad (3.8)$$

Например, возмущение скорости пучка при больших значениях x связано с электрическим полем $E(x)$ простым соотношением

$$v(x) = -\frac{ie}{m\omega} E'(x) \quad (3.9)$$

4. Исследование резонанса. Найдем корни знаменателей подынтегральных выражений в (3.5); дисперсионное уравнение $1 - L_k - K_2(k) = 0$ для продольных колебаний [2] можно представить в виде

$$1 - \left(\frac{\beta\Omega_+}{\beta - v}\right)^2 = \beta^2 \Omega_-^2 [J_-(\beta) - 1] \quad \left(v = \frac{v_0}{c}\right) \quad (4.1)$$

Существенный вклад в интеграл (3.6) дают полюса с малыми $\text{Im } k$. Поэтому будем искать корни уравнения (4.1), лежащие близко к существенно особой точке $k = 0$ в верхней полуплоскости k . Считая $|\beta| \gg 1$, разлагая $1/(\beta - v)$ по степеням v/β и используя асимптотику функции $J_-(\beta)$ в верхней полуплоскости [2], окончательно получаем

$$\frac{1}{\beta} = \frac{-\Omega_+^2 v \pm \sqrt{\Omega_+^4 v^2 + 3(\Omega_-^2 + \Omega_+^2 v^2)\varepsilon}}{3(\Omega_-^2 + \Omega_+^2 v^2)} \quad (4.2)$$

Корни уравнения $1 - L_k - K_2(k) = 0$ определяются той же формулой (4.2), в которой, однако, v меняет знак. Один из корней (4.2) лежит в верхней полуплоскости k только в том случае, если подкоренное выражение отрицательно, т. е.

$$\varepsilon < -\frac{\Omega_+^4 v^2}{3(\Omega_-^2 + \Omega_+^2 v^2)} \quad (4.3)$$

Найдем корни уравнения $1 - L_k - K_1(k) = 0$, также лежащие в верхней полуплоскости k . Это уравнение имеет вид

$$1 - \left(\frac{\beta\Omega_+}{\beta - v}\right)^2 = \beta^2 \Omega_-^2 [J_+(\beta) - 1] \quad (4.4)$$

Асимптотика $J_+(\beta)$ в верхней полуплоскости k (что соответствует нижней полуплоскости β) имеет экспоненциально малый мнимый член [2].

Представим искомый корень уравнения (4.4) в виде

$$\beta = \beta_0 (1 + \beta_1 / \beta_0) \quad (4.5)$$

где β_0 — действительная часть корня, определяемая (4.2) в пренебрежении экспоненциально малым членом, а β_1 — малый мнимый добавок. Тогда

$$\frac{\beta_1}{\beta_0} = \frac{i\Omega_-^2 \sqrt{1/2\pi} \beta_0^5 \exp(-1/2 \beta_0^2)}{3\Omega_-^2 + \Omega_+^2 v (3v + \beta_0)} \quad (4.6)$$

Из постановки задачи следует, что $\Omega_+ \ll \Omega_-$ и $v \ll 1$. Представим диэлектрическую проницаемость ε в виде $\varepsilon = \varepsilon_* + \Delta\varepsilon$, где

$$\varepsilon_* = -\frac{\Omega_+^4 v^2}{3(\Omega_-^2 + \Omega_+^2 v^2)} \quad (4.7)$$

Как увидим ниже, значение ε_* будет критическим, так как при $\varepsilon > \varepsilon_*$ закон изменения поля вблизи границы качественно иной, чем при $\varepsilon < \varepsilon_*$. В [6] критическим значением было $\varepsilon_* = 0$. Сдвиг критического значения ε_* в область отрицательных ε в рассматриваемом случае объясняется уменьшением частоты для движущегося пучка вследствие эффекта Доплера. Рассмотрим случаи $\Delta\varepsilon > 0$ и $\Delta\varepsilon < 0$. Для $\Delta\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{\beta_0} = \frac{-\Omega_+^2 v \pm \sqrt{3(\Omega_-^2 + \Omega_+^2 v^2)\Delta\varepsilon}}{3(\Omega_-^2 + \Omega_+^2 v^2)} \quad (4.8)$$

так что при $v > 0$ и $\Delta\varepsilon > -\varepsilon_*$ также $\beta_0 > 0$, и тогда существует корень

уравнения (4.4) с $\text{Im } \beta_1 < 0$. При $v < 0$ всегда имеется по крайней мере один такой корень уравнения (4.4). Пусть $\Delta\varepsilon < 0$. Тогда в нижней полуплоскости β всегда имеется корень уравнения (4.1)

$$\frac{1}{\beta} = \frac{-\Omega_+^2 v + i \sqrt{3(\Omega_-^2 + \Omega_+^2 v^2)} |\Delta\varepsilon|}{3(\Omega_-^2 + \Omega_+^2 v^2)} \quad (4.9)$$

Учитывая соотношения (4.2) — (4.9) и ограничиваясь линейными членами в разложении по степеням k , находим, что при $\Delta\varepsilon < 0$ электрическое поле вблизи границы изменяется по закону

$$E = \frac{E_1}{\varepsilon} \left\{ 1 - 2 \frac{\sqrt{2/\pi} \Omega_-^2 + \Omega_+^2 v}{\Omega_+^2 v} \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-\frac{x}{\Omega_- a} \left(\frac{|\Delta\varepsilon|}{3(\Omega_-^2 + v^2 \Omega_+^2)} \right)^{1/2} \right] \cos \left[\frac{x}{\Omega_- a} \frac{v \Omega_+^2}{3(\Omega_-^2 + v^2 \Omega_+^2)} \right] \right\} \quad (4.10)$$

Для сокращения формулы (4.10) положено $v_1 = 0$ и $j_1 = 0$.

Аналогичным образом получаем ход поля вблизи границы при $\Delta\varepsilon > 0$

$$E = \frac{E_1}{\varepsilon} \left\{ 1 + \frac{\varepsilon \gamma}{2\Omega_+^2 v} \exp \left[\frac{ix}{\Omega_- a \gamma} - \frac{\Omega_- x}{\Omega_- a} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{\gamma^{1/2}}{\sqrt{v \Delta\varepsilon}} \exp \left(-\frac{\gamma^2}{2} \right) \right] \right\} \quad (4.11)$$

$$\gamma = \frac{3(\Omega_-^2 + \Omega_+^2 v^2)}{\Omega_+^2 v}$$

Формула (4.11) также получена в предположении $v_1 = 0$ и $j_1 = 0$.

Необходимость учитывать вычет в полюсе при оценке интеграла от нуля до бесконечности, приводящая к выражению (4.11), объясняется тем, что при нахождении асимптотики этого интеграла методом спуска первоначальный контур интегрирования приходится деформировать так, чтобы он совпал с линией уровня, проходящей через седловую точку. При такой деформации полюс обходится в правой половине верхней полуплоскости, если он расположен ниже линии уровня и выше оси абсцисс.

В формуле (4.11) нужно считать $\Delta\varepsilon$ малым, но при этом γ должно быть велико, так чтобы поле медленно затухало с увеличением x . В противном случае этим слагаемым можно пренебречь, и поле определяется (3.7).

В отсутствие пучка формулы (4.10) и (4.11), описывающие резонансный случай, неприменимы. Если же учесть квадратичные члены в разложении по степеням k , то предельный переход к случаю отсутствия пучка дает соотношения, полученные в [6].

При $x = 0$ формулы (4.10) и (4.11) не дают правильного граничного значения E_1 в связи с тем, что в вычислениях пренебрегалось членами порядка $|\Delta\varepsilon|$. Однако с ростом x в обоих случаях поле испытывает колебания около значения E_1/ε , к которому оно стремится на бесконечности.

Авторы признательны М. Л. Левину за полезные обсуждения.

Поступила 9 X 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф а й н б е р г Я. Б. Взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой. Сб. «Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза», т. II, Изд. АН УССР, 1963, стр. 88.
2. С и л и н В. П., Р у х а д з е А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред. Госатомиздат, 1961.
3. А х и е з е р А. И. и Ф а й н б е р г Я. Б. О высокочастотных колебаниях электронной плазмы. Ж. эксперим. и теор. физ., 1951, т. 21, вып. 11, стр. 1262.
4. В е д е н о в А. А., В е л и х о в Е. П., С а г д е е в Р. З. Устойчивость плазмы. Успехи физ. наук, 1961, т. 73, вып. 4, стр. 701.
5. S u m i M. Theory of Spatially Growing Plasma Waves. J. Phys. Soc. Japan, 1959, vol. 14, p. 653.
6. Л а н д а у Л. Д. О колебаниях электронной плазмы. Ж. эксперим. и теор. физ., 1946, т. 16, вып. 7, стр. 574.