Например, положив

$$\mathrm{Stab}\,[A, B] = \frac{100}{\max\{\sqrt{\varkappa(\mathscr{H})},\ \sqrt{1+\|K\|^2}\}}$$

и пользуясь тем, что $\varkappa(\mathscr{H}) \geqslant 1$, $1 + ||K||^2 \geqslant 1$, всегда будем имет Stab $[A, B] \leqslant 100$, характеризуя «степень стабилизируемости» как б в процентах. Возможны и другие предложения по виду формулы, выра жающей Stab $[A, B]$ через $\varkappa(\mathscr{H})$ и $||K||$.

Необходимость введения числовых характеристик степеней стабили зируемости, управляемости, детектируемости и наблюдаемости стала ясн в процессе анализа систем управления при помощи численных методс линейной алгебры, дающих результат с гарантированной оценкой то ности. Обзору проблем, возникающих при разработке таких методов, п священа работа [6].

Автор благодарен А. Я. Булгакову и В. М. Гордиенко за дискусси в процессе которых возникли соображения, изложенные в настояще работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Уонем.** Линейные многомерные системы управления.— М.: Наука, 1980.
2. **Справочник** по теории автоматического управления/Под ред. А. А. Красовского.- М.: Наука, 1987.
3. **Первозванский А. А.** Курс теории автоматического управления.— М.: Наука, 198
4. **Якубович В. А., Старжинский В. М.** Параметрический резонанс в линейных сист мах.— М.: Наука, 1987.
5. **Годунов С. К.** Задача о дихотомии спектра матрицы // Сиб. мат. журн.—1986.- Т. 27, № 5.
6. **Годунов С. К.** Проблема гарантированной точности в численных методах лине ной алгебры // Proc. Intern. Cong. of Mathematicians.— Berkeley, California, US 1986.— V. 2.
7. **Малышев А. Н.** Вычисление инвариантных подпространств регулярного линейно пучка матриц.— Новосибирск, 1988.— (Препр./Ин-т математики СО АН ССС № 6).

Поступила 29/VII 1988 г.

УДК 532.516

АСИМПТОТИКА ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ НА БОЛЬШИХ РАССТОЯНИЯХ ОТ САМОДВИЖУЩЕГОСЯ ТЕЛА

В. В. Пухначев

(*Новосибирск*)

Рассматривается стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости вне огр ниченного тела в трехмерном пространстве. На поверхности тела задано распреде ние скорости жидкости с нулевым суммарным расходом через эту поверхность. На бе конечности вектор скорости стремится к ненулевому постоянному вектору. На жи кость могут действовать внешние массовые силы, достаточно быстро убывающие удалением от тела. Требуется, чтобы полный импульс, вносимый в жидкость гран цей обтекаемого тела и массовыми силами, равнялся нулю. Перечисленные услов формируют краевую задачу для уравнений Навье — Стокса, которую назовем за чей безымпульсного обтекания или задачей обтекания самодвижущегося те Строится асимптотика решения данной задачи на больших расстояниях от тела предположении, что это решение существует. Эта асимптотика имеет существенн отличия от асимптотики решения классической задачи обтекания буксируемо тела [1—3].

1. Постановка задачи. Сформулируем задачу безымпульсного об кания тела вязкой жидкостью. Пусть Σ — гладкая замкнутая поверхнос в $\mathbf{R}^3$, Ω — внешняя по отношению к Σ область. Рассмотрим в этой облас стационарную систему уравнений Навье — Стокса и неразрывности

$$\Delta\mathbf{u} - 2\,\partial\mathbf{u}/\partial x_1 - \nabla p = 2\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \mathbf{g}(x),\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0. \quad (1.1)$$

/равнения (1.1) записаны в безразмерных переменных; в качестве масшта-ов длины, скорости и давления выбраны величины $2\nu/V_\infty$, V_∞ и $\rho V_\infty^2/2$ оответственно. Здесь $V_\infty = \text{const} > 0$ — модуль скорости течения на есконечности; ρ — плотность жидкости; ν — кинематический коэффици-нт вязкости; $\mathbf{u}$ — отклонение безразмерной скорости жидкости от ско-ости обтекания $\mathbf{e}_1 = (1,\ 0,\ 0)$; $\mathbf{g}$ — плотность внешних массовых сил.)ункция $\mathbf{g}$ предполагается гладкой в области Ω и финитной (в п. 5 рас-мотрен случай функции $\mathbf{g}$ с некомпактным носителем, но при условии ее ыстрого убывания при $r = |\mathbf{x}| \to \infty$).

К системе (1.1) присоединяются краевые условия

$$\mathbf{u}|_{\Sigma} = \mathbf{w}(x); \tag{.2}$$

$$\mathbf{u} \to 0 \text{ при } r \to \infty, \tag{.3}$$

це $\mathbf{w} + \mathbf{e}_1$ — заданное распределение скорости на границе тела. Далее удем предполагать, что суммарный расход жидкости через границу тела авен нулю:

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{w}\cdot\mathbf{n}\, d\Sigma = 0 \tag{.4}$$

ı — единичный вектор внешней нормали к границе области Ω). Если по-эрхность Σ неподвижна и непроницаема, то $\mathbf{w} = -\mathbf{e}_1$. Если еще и $\mathbf{g} = 0$,) соотношения (1.1)—(1.3) образуют классическую задачу обтекания для равнений Навье — Стокса. Изучению этой задачи посвящено большое исло работ аналитического характера (см. [1—3] и цитированную там итературу), а также множество исследований, в которых она решается исленно. Хорошо известно, что в этом случае сила сопротивления, дей-:вующая на тело со стороны жидкости, отлична от нуля. Таким образом, ія реализации стационарного режима обтекания тело необходимо удер-ивать в потоке внешними силами. Поэтому классическую задачу обтека-ія следовало бы называть задачей обтекания буксируемого тела.

Нас интересует задача обтекания самодвижущегося тела. Условие імодвижения означает, что полный импульс, вносимый в жидкость грани-эй обтекаемого тела и массовыми силами, равен нулю. Математически это :ловие выражается равенством

$$-F \equiv \oint_{\Sigma} [P\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} - 2\mathbf{u}(\mathbf{u} + \mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{n}]\, d\Sigma + \int_{\Omega} \mathbf{g}\, dx = 0. \tag{.5}$$

цесь $P\mathbf{u}$ — тензор напряжений, соответствующий полям скоростей и давлений p; элементы этого тензора имеют вид $(P\mathbf{u})_{ij} = -p\delta_{ij} + \partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$. Задачу (1.1)—(1.5) назовем за-чей безымпульсного обтекания или задачей обтекания самодвижуще-ся тела.

Известно, что при заданных функциях $\mathbf{w}$ и $\mathbf{g}$, удовлетворяющих неко-рым условиям регулярности, задача (1.1)—(1.4) имеет по крайней мере но решение [1, 3]. (Например, для этого достаточно, чтобы $\mathbf{w} \in C^{2+\alpha}(\Sigma)$, $\mathbf{g} \in L_2(\Omega)$; причем Σ — поверхность Ляпунова с показателем $\in (0,1)$.) При достаточно малых (в подходящих метриках) функциях $\mathbf{w}$ и решение задачи (1.1)—(1.4) единственно [1, 2]. Отсюда следует, что за-ча обтекания самодвижущегося тела (1.1)—(1.5) разрешима, вообще го-ря, лишь при выполнении дополнительных условий на функции $\mathbf{w}$ и $\mathbf{g}$. эрмулировка таких условий (иными словами, исследование вопроса о зрешимости задачи (1.1)—(1.5)) представляет весьма трудную пробле-. В настоящее время вопрос о существовании решения задачи безым-льсного обтекания положительно решен лишь в стоксовом приближении] (в [4] содержится также обзор предшествующих результатов изучения дачи обтекания самодвижущегося тела). В [5] построено приближенное шение одного из вариантов осесимметричной задачи (1.1)—(1.5) при лых числах Рейнольдса в случае, когда Σ — сфера.

Цель данной работы — построение асимптотики решения задач (1.1)—(1.5) при $r = |\mathbf{x}| \to \infty$ в предположении, что оно существует. Не которые предварительные результаты исследования этого вопроса в слу чае обтекания тела с неподвижной непроницаемой границей (что соответст вует $\mathbf{w} = -\mathbf{e}_1$) имеются в [6]. Оценка убывания вихря скорости пр $r \to \infty$ (без выделения главного члена асимптотики) для решения задач (1.1)—(1.5) при $\mathbf{g} = 0$ получена в [7].

2. Интегральное представление решения. Сформулируем сначал условия гладкости относительно входных данных задачи (1.1)—(1.4), ко торые далее всюду будут считаться выполненными. Пусть $\Sigma \in C^{2+\alpha}$ $w \in C^{2+\alpha}(\Sigma)$, $\mathbf{g} \in C^{\alpha}(\Omega)$, где $0 < \alpha < 1$ (функция $\mathbf{g}$ предполагается имек щей компактный носитель). При этих предположениях справедлива теоре ма существования классического решения задачи (1.1)—(1.4) в классе век тор-функций $\mathbf{u}$, имеющих конечный интеграл Дирихле [3]:

$$\int_{\Omega} \nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{u}\, dx < \infty. \tag{2.1}$$

В [2] установлено, что всякое решение указанной задачи, удовлетворяю щее неравенству (2.1), допускает оценку

$$|\mathbf{u}(x)| \leqslant Cr^{-1/2-\varepsilon} \text{ при } r \to \infty \tag{2.2}$$

с положительными постоянными ε и C. В [1] показано, что для решени задачи (1.1)—(1.4), подчиняющегося условию (2.2), справедливо интеграл ное представление

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x) = &-\int_{\Omega} [2\mathbf{u}(y)\cdot\mathbf{u}(y)\cdot\nabla E(x-y) + \mathbf{g}(y)\cdot E(x-y)]\, dy + \\ &+ \int_{\Sigma} \{\mathbf{u}(y)\cdot PE(x-y) - E(x-y)\cdot P\mathbf{u}(y) + \\ &+ 2[E(x-y)\cdot\mathbf{u}(y)][\mathbf{u}(y)+\mathbf{e}_1]\}\cdot\mathbf{n}\, d\Sigma_y. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь $E(x)$ — фундаментальный тензор системы Озеена, соответствующе (1.1). Его элементы E_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ даются формулами

$$E_{ij} = \delta_{ij}\Delta v - \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}, \quad v = -\frac{1}{8\pi}\int_0^s \frac{1-e^{-t}}{t}\, dt, \quad s = r - x_1. \tag{2.4}$$

Символ $PE(x)$ обозначает тензор третьего ранга с элементами

$$(PE)_{ijk} = -P_k\delta_{ij} + \frac{\partial E_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial E_{jk}}{\partial x_i}, \quad P_k = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right), \quad i, j, k = 1, 2, 3. \tag{2.5}$$

Для элементов тензора E и их первых производных при больших зн чениях $r = |\mathbf{x}|$ имеют место оценки [1, 2]

$$|E_{ij}| \leqslant C\frac{1}{r}\frac{1-e^{-s}}{s}; \tag{2.6}$$

$$|\nabla E_{ij}| \leqslant C\left(\frac{1}{r^{3/2}}\frac{1-e^{-s}-se^{-s}}{s^{3/2}} + \frac{1}{r^2}\frac{1-e^{-s}}{s}\right). \tag{2.7}$$

Здесь и ниже C (с индексами или без индексов) — различные положител ные постоянные. Кроме того, потребуются оценки вторых производнь функций E_{ij}. Эти оценки путем довольно громоздких вычислений пол чаются из представления (2.4) в виде

$$\left|\frac{\partial^2 E_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}\right| \leqslant C\left(\frac{1}{r^2}\frac{1-e^{-s}-se^{-s}}{s^{3/2}(s+1)^{1/2}} + \frac{1}{r^{5/2}}\frac{1-e^{-s}}{s(s+1)^{1/2}}\right) \equiv C\psi(x), \tag{2.8}$$

если $r \to \infty$ $(i, j, k, l = 1, 2, 3)$.

В [1], исходя из представления (2.3), доказано, что всякое решение задачи (1.1)—(1.4), удовлетворяющее неравенству (2.2), допускает выделение главного члена асимптотики при больших значениях r:

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{F}\cdot E(x) + \zeta(x), \tag{2.9}$$

где $\mathbf{F}$ — постоянный вектор, определенный формулой (1.5), а $\zeta(x)$ — остаточный член, для которого получена оценка

$$|\zeta| \leqslant Cr^{-3/2+\varepsilon}(s+1)^{-1+\varepsilon} \tag{2.10}$$

($\varepsilon > 0$ произвольно мала). Из (2.9), (2.10) вытекает, что имеется параболоидальная область следа в направлении $\mathbf{e}_1$, внутри которой $\mathbf{u} = O(r^{-1})$. Вне любого кругового конуса с осью, направленной вдоль $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{u} = O(r^{-2})$. (Оценка величины $|\zeta|$ вне следа может быть уточнена, но нам это пока не потребуется.)

В предположении коллинеарности векторов $\mathbf{F}$ и $\mathbf{e}_1$ в [8] получены следующие члены асимптотики поля $\mathbf{u}$, имеющие порядок $r^{-3/2}$ (это предположение выполнено, например, в случае осесимметричного обтекания). В [7, 8] изучено поведение вихря скорости на больших расстояниях от обтекаемого тела и показано, что вне следа вихрь убывает по экспоненциальному закону. Как в [7], так и в [8] считается, что $\mathbf{g} = 0$, а в [8] дополнительно предполагается $\mathbf{w} = -\mathbf{e}_1$, что отвечает классической задаче обтекания. Для этого же случая в [9] построена «двойная» асимптотика поля скоростей, когда $r \to \infty$, а число Рейнольдса стремится к нулю.

Формула (2.9) означает, что на больших расстояниях от буксируемого тела возмущение поля скоростей будет (с точностью до малых высшего порядка) таким же, как у озееновского потока, «обтекающего» сосредоточенную силу $\mathbf{F}$. Следствием этого обстоятельства является тот факт, что информация о форме буксируемого тела быстро забывается при удалении от него. Ниже показано, что асимптотика поля скоростей в задаче безымпульсного обтекания определяется значительно большим числом функционалов, характеризующих как форму тела, так и способ реализации режима самодвижения.

3. Основной результат. Здесь и ниже предполагается, что решение задачи (1.1)—(1.4) удовлетворяет дополнительному условию самодвижения (1.5). Кроме того, считается выполненным условие (2.1), что в силу сказанного выше позволяет представить $\mathbf{u}(x)$ в виде (2.3). Разобьем функцию $\mathbf{u}$ на сумму трех слагаемых: $\mathbf{u} = \mathbf{I} + \mathbf{J} + \mathbf{N}$, где

$$\mathbf{N}(x) = -2\int_{\Omega} \mathbf{u}(y)\cdot\mathbf{u}(y)\cdot\nabla E(x-y)\,dy,$$

$$\mathbf{J}(x) = -\int_{\Omega} \mathbf{g}(y)\cdot E(x-y)\,dy + \int_{\Sigma} \{-E(x-y)\,P\mathbf{u}(y) + $$
$$+ 2\,[E(x-y)\cdot\mathbf{u}(y)]\,[\mathbf{u}(y)+\mathbf{e}_1]\}\cdot\mathbf{n}\,d\Sigma_y,$$

а I — поверхностный интеграл от $\mathbf{u}(y)\cdot PE(x-y)\cdot\mathbf{n}$. На основании (2.5) его можно записать как

$$\mathbf{I}(x) = \int_{\Sigma}\left\{[\mathbf{u}(y)\cdot\mathbf{n}]\,\nabla\frac{1}{4\pi\,|\,\mathbf{x}-\mathbf{y}\,|} + \mathbf{u}(y)\cdot 2DE(x-y)\cdot\mathbf{n}\right\}d\Sigma_y.$$

Здесь $DE(x)$ — тензор третьего ранга с элементами

$$(DE)_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial E_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial E_{jk}}{\partial x_i}\right), \quad i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3$$

(суммирование во втором слагаемом подынтегрального выражения ведется по индексам i и j). Будем последовательно оценивать интегралы $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ и $\mathbf{N}$.

Для оценки функции $\mathbf{I}(x)$ заметим, что вследствие условия (1.4) главный член асимптотики интеграла от первого слагаемого при $r \to \infty$ равен нулю. Второй член этой асимптотики имеет порядок r^{-3} при $r \to \infty$, и его необходимо учитывать наряду с главным членом асимптотики интеграла, содержащего $DE(x-y)$, поскольку последний интеграл вне области следа также имеет порядок $O(r^{-3})$. Учитывая ограниченность поверхности Σ и пользуясь формулой Тейлора, получаем

$$(3.1)\qquad \mathbf{I}(x) = R : DE(x) + \mathbf{q}\cdot\nabla\left(\nabla\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) + \chi_1(x),$$

где R — постоянный тензор второго ранга; $\mathbf{q}$ — постоянный вектор; χ_1 — остаточный член. Вектор $\mathbf{q}$ и элементы R_{ij} тензора R в силу условия (1.2) вычисляются явно:

$$\mathbf{q} = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}(\mathbf{w}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{y}\,d\Sigma,\quad R_{ij} = 2\int\limits_{\Sigma} w_i n_j d\Sigma,\quad i,\ j = 1,\ 2,\ 3.$$

Выражение $R : DE$ означает свертку по индексам i и j. Остаток χ_1 допускает оценку

$$(3.2)\qquad |\chi_1(x)| \leqslant C\psi(x) \text{ при } r\to\infty$$

($\psi(x)$ — функция, стоящая в правой части неравенства (2.8)). Отметим, что в зоне следа, определяемой неравенством $s\equiv r - x_1 \leqslant C$, $\psi = O(r^{-2})$; вне любого конуса с осью $\mathbf{e}_1$ $\psi = O(r^{-4})$, когда $r\to\infty$.

Рассматривая интеграл $\mathbf{J}(x)$, убеждаемся, что главный член его асимптотики при больших r, согласно равенству (1.5), обращается в нуль. Для выделения следующих членов и оценки остатка снова воспользуемся формулой Тейлора и неравенствами (2.8), а также учтем финитность функции $\mathbf{g}$. В результате приходим к соотношению

$$(3.3)\qquad \mathbf{J}(x) = (Q_1 + Q_2) : \nabla E(x) + \chi_2(x).$$

Здесь Q_1 и Q_2 — постоянные тензоры второго ранга; $\nabla E(x)$ — тензор третьего ранга с элементами $(\nabla E)_{ijk} = \partial E_{jk}/\partial x_i$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$; χ_2 — остаточный член, допускающий, подобно χ_1, оценку (3.2). Суммирование в свертках $Q_l : \nabla E(x)$ $(l = 1, 2)$ производится по индексам i и j. Элементы тензора Q_1 могут быть вычислены априори:

$$(Q_1)_{ij} = \int\limits_{\Omega} y_i g_j dy - 2\int\limits_{\Sigma} y_i w_j \sum_{l=1}^{3}(w_l + \delta_{1l})\, n_l d\Sigma.$$

В отличие от этого, элементы тензора Q_2 являются функционалами от решения задачи (1.1)—(1.5). Они вычисляются по формулам

$$(Q_2)_{ij} = \int\limits_{\Sigma} y_i \sum_{l=1}^{3}\left(-p\delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right) n_l d\Sigma.$$

Оценка интеграла $\mathbf{N}(x)$ базируется на результатах работы [8]. Для этого заметим, что ввиду (1.5) и (2.9) $\mathbf{u} = \zeta$, что влечет неравенство (2.10) для функции $|\mathbf{u}(x)|$. Наличие оценок (2.7) и (2.10) позволяет применить теорему 2 из [8] для вычисления главной части интеграла по области Ω от выражений $u_i(y)u_j(y)\partial E_{ik}(x-y)/\partial y_j$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$ и оценки остаточного члена. В результате при $r\to\infty$

$$(3.4)\qquad \mathbf{N}(x) = Q_3 : \nabla E + \omega(x),$$

где Q_3 — постоянный тензор второго ранга, а функция $|\omega|$ удовлетворяет неравенству

$$(3.5)\qquad |\omega(x)| \leqslant Cr^{-2+\varepsilon}(s+1)^{-1/2},$$

в котором число $\varepsilon > 0$ может быть взято сколь угодно малым. Отметим, что стоящая в правой части (3.5) функция убывает медленнее, чем $\psi(x)$, при удалении в бесконечность по любому направлению. Поэтому остаточные члены в формулах (3.1), (3.3) будут подчиненными по сравнению с $\omega(x)$.

Объединяя равенства (3.1), (3.3) и (3.4), приходим к искомому представлению функции $\mathbf{u}$ при больших значениях $|\mathbf{x}| = r$:

$$\mathbf{u}(x) = R : DE(x) + Q : \nabla E(x) + \eta(x). \tag{3.6}$$

Здесь $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$, $\eta = \omega + \chi_1 + \chi_2$. Из (3.2), (3.5) и сделанного выше замечания следует

$$|\eta(x)| \leqslant C_0 r^{-2+\varepsilon}(s+1)^{-1/2} \text{ при } r \to \infty. \tag{3.7}$$

Отметим, что в формулу (3.6) не вошел член $\mathbf{q}\cdot\nabla(\nabla|\mathbf{x}|^{-1})$ как внепорядковый: в зоне следа он подчинен первым двум членам правой части (3.6), а вне этой зоны — последнему члену.

Сформулируем основной результат настоящей работы. Пусть $\mathbf{u}$, p — решение задачи (1.1)—(1.4) из класса (2.1), удовлетворяющее дополнительному условию (1.5). Тогда при $r \to \infty$ справедливо асимптотическое представление $\mathbf{u}(x)$ в виде (3.6), в котором R и Q — постоянные тензоры второго ранга. Элементы тензора R выражаются явно в терминах заданной функции $\mathbf{w}(x)$. Функция $\eta(x)$ допускает оценку (3.7), в которой ε и C_0 — положительные постоянные, причем ε произвольно мало, а $s = r - x_1$.

В связи с представлением (3.6) возникает ряд нерешенных вопросов. Мы не располагаем пока явными выражениями в терминах функции $\mathbf{u}$ для элементов тензора Q_3, фигурирующего в (3.4) и входящего в сумму, составляющую Q. Было бы естественно предположить, что

$$(Q_3)_{ij} = -2\int_\Omega u_i(y)\,u_j(y)\,dy, \quad i,\ j = 1,\ 2,\ 3.$$

(В следующем пункте установлено, что указанные интегралы сходятся.) Далее, из (2.7) и (3.7) вытекает, что вне любого конуса с осью $\mathbf{e}_1$ первые два слагаемых в правой части (3.6) убывают быстрее, чем последнее. (Есть основания полагать, что в указанной области показатель $-2+\varepsilon$ степени r в неравенстве (3.7) можно заменить на $-5/2$, однако доказательство этого предположения требует весьма детального изучения интеграла $\mathbf{N}(x)$.) Однако в области следа $s \leqslant C$, наиболее интересной с физической точки зрения, функция $\eta(x)$ — полноценный остаточный член в формуле (3.6).

Сравнивая асимптотические представления (2.9) при $\mathbf{F} \neq 0$ и (3.6), видим, что в параболоидальной области следа $\mathbf{u} = O(r^{-1})$ в первом случае и $\mathbf{u} = O(r^{-3/2})$ — во втором. Вне любого конуса с осью $\mathbf{e}_1$ $\mathbf{u} = O(r^{-2})$ для буксируемого тела ($\mathbf{F} \neq 0$) и $\mathbf{u} = O(r^{-5/2+\varepsilon})$ для самодвижущегося тела. Таким образом, налицо более быстрое убывание возмущения скорости на больших расстояниях от самодвижущегося тела. Кроме того, асимптотическое поведение скорости при безымпульсном обтекании тел характеризуется гораздо большим разнообразием, чем в классическом случае. Напомним, что в задаче обтекания буксируемого тела с неподвижной непроницаемой границей в отсутствие внешних массовых сил главный член асимптотики определяется единственным вектором $\mathbf{F}$ (а для осесимметричного режима обтекания — единственным скаляром F_1). Как показано в [1], этот вектор пропорционален силе сопротивления, действующей на тело со стороны жидкости.

Представление (3.6) означает, что (по крайней мере, в области следа) главные члены асимптотики поля скоростей в задаче безымпульсного обтекания характеризуются 18 параметрами — это элементы тензоров R и Q. В осесимметричном случае число параметров снижается до восьми. Идентификация элементов тензора Q, являющихся некоторыми функционалами от решения задачи (1.1)—(1.5), — один из наиболее важных в рассматриваемом круге вопросов.

4. Конечность интеграла энергии. Отметим один из парадоксальных результатов, связанных с классической задачей обтекания для уравнений Навье — Стокса. Пусть в системе (1.1) $\mathbf{g} = 0$ и в условии (1.2) $\mathbf{w} = -\mathbf{e}_1$ (последнее означает неподвижность и непроницаемость границы тела). Тогда для любого решения $\mathbf{u}$, p задачи (1.1)—(1.4), удовлетворяющего условию (2.1), $\int\limits_{\Omega} |\mathbf{u}|^2\,dx = \infty$ (впервые утверждение подобного рода относительно энергии возмущенного движения в задаче вязкого обтекания установлено в [10]).

Интуитивно ясно, что самодвижущееся тело не может вносить столь большого возмущения в поток. Надлежащая точная формулировка такова. Пусть $\mathbf{u}$, p — решение задачи (1.1)—(1.4), удовлетворяющее дополнительным условиям (1.5), (2.1). Тогда

$$W = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\mathbf{u}|^2\,dx < \infty. \tag{4.1}$$

Как уже отмечалось, условие (2.1) влечет справедливость представления (2.9) для любого решения задачи (1.1)—(1.4). Дополнительное условие (1.5) означает, что функция $\mathbf{u}(x)$ сама по себе удовлетворяет неравенству (2.10). Требуемое утверждение (4.1) будет доказано, если установить, что функция, стоящая в правой части (2.10), квадратично-суммируема в области $r \geqslant 1$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Последнее для $\varepsilon < 1/2$ почти очевидно:

$$\int\limits_1^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} r^{-3+2\varepsilon}\,[r(1-\cos\theta)+1]^{-2+2\varepsilon}\,r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= 2\pi\int\limits_1^{\infty} r^{-2+2\varepsilon}\left[\int\limits_0^{2r}(z+1)^{-2+2\varepsilon}\,dz\right]dr < \infty$$

(r, θ и φ — сферические координаты). Поэтому $W < \infty$.

Свойство решения задачи безымпульсного обтекания, выражаемое неравенством (4.1), выделяет это решение из всех возможных решений задачи (1.1)—(1.4), если варьировать входящие в ее формулировку функции $\mathbf{w}$ и $\mathbf{g}$. Это свойство может быть использовано для исследования вопроса существования решения задачи (1.1)—(1.5), если рассматривать ее как задачу оптимизации.

Пусть число $N > 0$ настолько велико, что поверхность Σ лежит строго внутри сферы $\Sigma_N : |\mathbf{x}| = N$. Обозначим через Ω_N область, заключенную между поверхностями Σ и Σ_N, через $\mathbf{u}^N$, p^N — решение системы (1.1) в области Ω_N, удовлетворяющее условию (1.2) и

$$\mathbf{u}^N|_{\Sigma_N} = 0. \tag{4.2}$$

Если выполнены соотношение (1.4) и перечисленные в начале п. 2 условия регулярности относительно Σ, $\mathbf{w}$ и $\mathbf{g}$, то задача (1.1), (1.2), (4.2) имеет по крайней мере одно классическое решение. Ясно, что для этого решения конечен интеграл энергии $W_N = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_N} |\mathbf{u}^N|^2\,dx$.

Устремим теперь N к бесконечности. Семейство $\{\mathbf{u}^N\}$ компактно в метрике, порожденной интегралом Дирихле, при фиксированных $\mathbf{w}$ и $\mathbf{g}$ [3]. Однако, вообще говоря, $W_N \to \infty$ при $N \to \infty$. Предлагается найти такую пару функций $\mathbf{w}^N$, $\mathbf{g}^N$, которая доставляет минимум функционалу W_N при данном конечном N. Если удастся обеспечить ограниченность последовательности W_N при $N \to \infty$ и установить компактность в подходящей метрике семейства $\{\mathbf{w}^N, \mathbf{g}^N\}$, то предельный элемент $\mathbf{w}$, $\mathbf{g}$ будет определять решение задачи (1.1)—(1.4), удовлетворяющее условию (4.1). Отсюда уже нетрудно заключить, что это же решение $\mathbf{u}$, p удовлетворяет условию самодвижения (1.5).

5. Турбулентный режим обтекания. Исследуем стационарное турбулентное обтекание самодвижущегося тела. Оказывается, что и в этом случае можно получить некоторую информацию о поведении скорости вдали от тела на основе п. 3.

Будем рассматривать уравнения (1.1) как уравнения Рейнольдса для осредненных скорости и давления стационарного турбулентного течения, за которыми сохраним прежние обозначения $\mathbf{u}(x)$ и $p(x)$. Плотность внешних сил, фигурирующая в уравнениях (1.1), имеет вид

$$\mathbf{g} = -2\,\mathrm{div}\,\Pi,$$

где Π — тензор рейнольдсовых напряжений с элементами $\Pi_{ij} = \overline{u_i' u_j'}$, u_i' — пульсационная составляющая i-й компоненты вектора скорости, $i, j = 1, 2, 3$; черта сверху означает операцию осреднения.

Как известно, на очень больших расстояниях от тела турбулентность вырождается. Поэтому естественно предположить, что функции Π_{ij} и их производные быстро убывают при $r \to \infty$. В [11, гл. XIV] на основе широко распространенной гипотезы об автомодельности и дополнительных соображений получены выражения для продольной скорости и характерного напряжения Рейнольдса в осесимметричном турбулентном течении за самодвижущимся телом:

$$u_1 = x_1^{-4/5} g\left(\frac{x_2}{x_1^{1/5}}\right), \quad \Pi_{12} = x_1^{-8/5} h\left(\frac{x_2}{x_1^{1/5}}\right). \tag{5.1}$$

Здесь x_1 и x_2 — осевая и радиальная координаты цилиндрической системы; u_1 — отклонение безразмерной осредненной осевой компоненты скорости от единицы. В (5.1) считается $x_1 > 0$. Функции g и h экспоненциально убывают при $\eta = x_2/x_1^{1/5} \to \infty$. (Формулы (5.1) имеют ограниченную область применимости. С одной стороны, $x_1 > 0$ должно быть достаточно велико, чтобы смог развиться вниз по потоку автомодельный режим движения, с другой — при очень больших значениях $x_1 > 0$ турбулентный характер течения сменяется ламинарным. При больших отрицательных значениях x_1 вообще следует считать, что $\Pi_{ij} = 0$.)

Предположим, что при $r \to \infty$ выполнены неравенства

$$|\Pi_{ij}| \leqslant Cr^{-2+\varepsilon}(s+1)^{-2+\varepsilon}, \quad |\nabla \Pi_{ij}| \leqslant Cr^{-5/2+\varepsilon}(s+1)^{-2+\varepsilon} \tag{5.2}$$

с $\varepsilon \in (0, 1)$ $(i, j = 1, 2, 3)$. Тогда для решения незамкнутой системы (1.1) с условиями (1.2)—(1.4) при $\mathbf{g} = -2\,\mathrm{div}\,\Pi$ можно получить подобное (2.3) интегральное представление, в котором второй из объемных интегралов заменен на $\mathbf{N}_\Pi(x) = -2\int\limits_\Omega \Pi(y) : \nabla E(x-y)\,dy$. Наличие неравенств (5.2) позволяет найти для функции $\mathbf{N}_\Pi$ представление, подобное (3.4). Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным в п. **3**. Их итог можно сформулировать следующим образом.

Пусть элементы Π_{ij} тензора рейнольдсовых напряжений удовлетворяют неравенствам (5.2) при $r \to \infty$. Предположим, что выполнено условие самодвижения $\int\limits_\Sigma [P\mathbf{u}\cdot\mathbf{n} - 2\mathbf{u}(\mathbf{u}+\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{n} - 2\Pi\cdot\mathbf{n}]d\Sigma = 0$. Тогда для осредненного вектора скорости $\mathbf{u}(x)$ справедливо асимптотическое выражение (3.6) при $r \to \infty$, в котором R и Q — постоянные тензоры второго ранга.

Подчеркнем, что к сделанному выводу мы пришли без привлечения каких-либо гипотез полуэмпирического характера. С другой стороны, не следует преувеличивать значения формулы (3.6) для турбулентного течения вдали от самодвижущегося тела. По-видимому, область ее применимости начинается с таких расстояний, на которых член $\mathrm{div}\,\Pi$ по порядку величины становится меньше, чем $\partial\mathbf{u}/\partial x_1$.

Своим интересом к краевым задачам для уравнений Навье — Стокса автор обязан Л. В. Овсянникову. Автор выражает глубокую признательность Л. В. Овсянникову за многолетнее доброжелательное внимание к его работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Finn R.** On the exterior stationary problem for the Navier — Stokes equations, and associated perturbation problems // Arch. Rat. Mech. and Anal.— 1965.— V. 19, N 5.

2. **Бабенко К. И.** О стационарных решениях задачи обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью // Мат. сб.— 1973.— Т. 91(133), № 1(5).
3. **Ладыженская О. А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.— М.: Наука, 1970.
4. **Пухначев В. В.** Стоксово приближение в задаче обтекания самодвижущегося тела // Краевые задачи математической физики и их приложения.— Киев: Наук. думка, 1989.
5. **Сенницкий В. Л.** Пример обтекания самодвижущегося тела осесимметричным потоком жидкости // ПМТФ.— 1984.— № 4.
6. **Пухначев В. В.** О некоторых модификациях задачи обтекания // Проблемы математики и механики.— Новосибирск: Наука, 1983.
7. **Clark D. C.** The vorticity at infinity for solutions of the stationary Navier — Stokes equations in exterior domains // Indiana Univ. Math. J.— 1971.— V. 20, N 7.
8. **Бабенко К. И., Васильев М. М.** Асимптотическое поведение решения задачи обтекания конечного тела вязкой жидкостью.— М., 1971.— (Препр./Ин-т прикл. математики АН СССР; № 84).
9. **Fischer T. M., Hsiao G. C., Wendland W. L.** Singular perturbations for the exterior three-dimensional slow viscous flow problem // J. Math. Anal. and Appl.— 1985.— V. 110, N 2.
10. **Finn R.** An energy theorem for viscous fluid motions // Arch. Rat. Mech. and Anal.— 1960.— V. 6, N 5.
11. **Биркгоф Г., Сарантонелло Э.** Струи, следы и каверны.— М.: Мир, 1964.

Поступила 28/VIII 1988 г.

УДК 532.516 : 532.574.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Б. Л. Рождественский, И. Н. Симакин, М. И. Стойнов

(Москва)

С помощью численного интегрирования уравнений Навье — Стокса для вязкой несжимаемой жидкости проводилось моделирование турбулентного течения Куэтта в плоском канале при переходных числах Рейнольдса. Коэффициент трения, профиль средней скорости, напряжение Рейнольдса и некоторые другие средние характеристики рассчитанных трехмерных вторичных статистически-стационарных течений хорошо согласуются с соответствующими характеристиками реальных турбулентных течений. Установлена неустойчивость ламинарного течения Куэтта по отношению к трехмерным возмущениям конечной амплитуды.

1. Рассматривается безнапорное течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном плоском канале, стенки которого движутся с постоянной скоростью в противоположных направлениях (плоское течение Куэтта). Исследование устойчивости ламинарного течения Куэтта относительно бесконечно малых возмущений выполнено с исчерпывающей полнотой (см. обзор [1]). В частности, строго доказана его устойчивость по отношению к бесконечно малым возмущениям при любых числах Рейнольдса [2]. С другой стороны, экспериментально установлено, что при $R \geqslant 10^3$ * могут происходить разрушение ламинарного режима течения и переход к турбулентности [3, 4]. Этот экспериментальный факт связывают с неустойчивостью рассматриваемого течения относительно возмущений конечной амплитуды.

При использовании методов нелинейной теории гидродинамической устойчивости для исследования устойчивости течения Куэтта возникают серьезные трудности, связанные с отсутствием нейтральной кривой. В большинстве работ рассматривались двумерные уравнения Навье — Стокса [5—10]. Полученные в [5—8] критические числа Рейнольдса отличаются друг от друга на порядок и более. Результаты [9, 10] свидетельствуют об устойчивости течения Куэтта к двумерным конечным возмущениям.

Моделированию турбулентного течения Куэтта на основе численного интегрирования уравнений Навье — Стокса посвящены работы [11—14].

---

* Здесь и далее $R = U_w h/\nu$, U_w — скорость стенок, h — полуширина канала, ν — коэффициент кинематической вязкости.