УДК 539.3

ОБ ИЗГИБЕ УПРУГИХ ПЛАСТИН С ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

И. Ю. Цвелодуб

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: itsvel@hydro.nsc.ru

Рассматривается бесконечная изотропная упругая пластина с эллиптическим физически нелинейным включением, находящаяся в условиях чистого изгиба под действием равномерно распределенных моментов на бесконечности. Поверхностные нагрузки отсутствуют. В замкнутом виде решена задача об определении напряженно-деформированного состояния пластины. Показано, что при достаточно общих связях между напряжениями и деформациями включения поле моментов (и соответствующих кривизн) в нем является однородным.

Ключевые слова: чистый изгиб бесконечной пластины, эллиптическое физически нелинейное включение, однородное поле моментов.

В [1, 2] рассмотрена задача об определении напряженно-деформированного состояния упругой плоскости с эллиптическим физически нелинейным включением (ЭФНВ) в условиях плоской деформации или обобщенного плоского напряженного состояния под действием равномерно распределенных напряжений на бесконечности. Показано, что в предположении устойчивости процесса деформирования включения существует единственное решение этой задачи, такое что напряженно-деформированное состояние в ЭФНВ является однородным. С учетом известной аналогии между плоскими задачами и задачами чистого изгиба пластин в теории упругости [3, 4] в данной работе результаты, полученные в [1, 2], распространяются на указанный выше случай изгиба. В частности, установлены однозначные связи между однородными полями моментов на бесконечности и в ЭФНВ.

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную изотропную упругую пластину постоянной толщины h, содержащую ЭФНВ (той же толщины h) и находящуюся в условиях чистого изгиба под действием равномерно распределенных моментов M_{kl}^{∞} $(k, l = 1, 2)$ на бесконечности. Система координат $Ox_1x_2x_3$ выбрана так, что уравнение границы L между упругой средой S и включением S_* имеет вид $x_k^2 a_k^{-2} = 1$ $(a_1 \geqslant a_2)$. Здесь и далее по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 2.

Деформации и перемещения пластины связаны зависимостями [5]

$$\begin{gathered} \varepsilon_{kl}(x_1, x_2, x_3) = x_3 \varkappa_{kl}, \qquad \varkappa_{kl} = -w_{,kl}, \\ w = w(x_1, x_2), \qquad (x_1 x_2) \in S \cup S_*, \qquad |x_3| \leqslant h/2, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где индекс после запятой означает производную по соответствующей координате. Уравнения равновесия в отсутствие распределенных по поверхности пластины нагрузок имеют

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 05-01-00673, 05-01-08025).

вид [5]

$$Q_k = M_{kl,l}, \qquad Q_{k,k} = 0, \qquad Q_k = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{3k}\, dx_3, \qquad M_{kl} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{kl} x_3\, dx_3, \tag{1.2}$$

где w — прогиб; Q_k, M_{kl} — перерезывающие силы и моменты; σ_{kl} — компоненты напряжений. В (1.1), (1.2) и далее $k, l = 1, 2$.

На границе L выполняются условия непрерывности следующих величин [4]:

$$w, \quad \frac{\partial w}{\partial n}, \quad G, \quad Q + \frac{\partial H}{\partial s}. \tag{1.3}$$

Здесь $G = M_{kl} n_k n_l$; $Q = Q_k n_k$; $H = M_{kl} n_k t_l$; n_k, t_k — компоненты единичных векторов нормали и касательной к контуру L; s — длина дуги контура.

В упругой области S зависимости между моментами M_{kl} и кривизнами $\varkappa_{kl}$ имеют вид [4]

$$M_{kl} = D[(1-\nu)\varkappa_{kl} + \nu\varkappa_{nn}\delta_{kl}], \qquad D = Eh^3/[12(1-\nu^2)], \tag{1.4}$$

где δ_{kl} — компоненты единичного плоского тензора; D — цилиндрическая жесткость; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона.

Определяющие уравнения для ЭФНВ запишем в виде

$$\sigma_{kl} = F_{kl}(\varepsilon_{mn}), \qquad \varepsilon_{kl} = x_3\varkappa_{kl}, \qquad F_{kl}(-\varepsilon_{mn}) = -F_{kl}(\varepsilon_{mn}), \tag{1.5}$$

где F_{kl} — нелинейные дифференцируемые функции аргументов, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial \varepsilon_{mn}}\, \xi_{kl}\xi_{mn} > 0 \qquad \text{при} \quad \xi_{kl}\xi_{kl} \neq 0,$$

которое равносильно условию устойчивости процесса деформирования включения S_* [2, 6]

$$\Delta\sigma_{kl}\Delta\varepsilon_{kl} > 0 \qquad \text{при} \quad \Delta\varepsilon_{kl}\Delta\varepsilon_{kl} \neq 0 \tag{1.6}$$

($\Delta\sigma_{kl}$, $\Delta\varepsilon_{kl}$ — приращения напряжений и деформаций).

Неравенство (1.6) обеспечивает однозначную разрешимость следующих из (1.2) и (1.5) соотношений

$$M_{kl} = 2\int\limits_0^{h/2} F_{kl}(x_3\varkappa_{mn}) x_3\, dx_3$$

относительно кривизн $\varkappa_{kl}$. Действительно, для разности двух возможных решений получим

$$\int\limits_0^{h/2} \Delta F_{kl} x_3\, dx_3 = \int\limits_0^{h/2} a_{klmn}\Delta\varkappa_{mn} x_3^2\, dx_3 = 0,$$

где $a_{klmn} = (\partial F_{kl}/\partial\varepsilon_{mn})\big|_{\varepsilon_{mn}=\varepsilon^*_{mn}}$; $\varepsilon^*_{kl} = \lambda\varepsilon^{(1)}_{kl} + (1-\lambda)\varepsilon^{(2)}_{kl}$, $0 < \lambda < 1$ [6]. Отсюда в силу того, что $\Delta\varkappa_{kl}$ не зависят от x_3, следует

$$\int\limits_0^{h/2} a_{klmn}\Delta\varkappa_{mn}\Delta\varkappa_{kl} x_3^2\, dx_3 = 0,$$

что возможно только при $\Delta\varkappa_{kl} = 0$ $(k, l = 1, 2)$.

Заметим также, что если поле моментов M_{kl} в S_* однородно, т. е. $M_{kl,i} = 0$, то однородным будет и поле кривизн $\varkappa_{kl}$. Это следует из соотношений

$$M_{kl,i} = 2\int\limits_0^{h/2} \sigma_{kl,i} x_3\, dx_3 = 2\int\limits_0^{h/2} \frac{\partial F_{kl}}{\partial \varepsilon_{mn}}\, \varkappa_{mk,i} x_3^2\, dx_3, \tag{1.7}$$

которые вытекают из (1.5). Приравнивая правую часть в (1.7) к нулю, умножая на $\varkappa_{kl,i}$ и суммируя по k и l, получим равенство

$$\int\limits_0^{h/2} \frac{\partial F_{kl}}{\partial \varepsilon_{mn}}\, \varkappa_{mn,i} \varkappa_{kl,i} x_3^2\, dx_3 = 0$$

(по i суммирование не проводится), возможное только при $\varkappa_{kl,i} = 0$ $(i, k, l = 1, 2)$.

Примером функций (1.5) могут служить функции, аналогичные рассмотренным в [5]:

$$\begin{gathered} \sigma_{kl} = \frac{2}{3}\, x_3\, \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\, (\varkappa_{kl} + \varkappa_{nn}\delta_{kl}), \qquad \sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i), \\ \sigma_i^2 = \sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2, \qquad \varepsilon_i = |x_3| \varkappa_i, \\ \varkappa_i^2 = 4(\varkappa_{11}^2 + \varkappa_{11}\varkappa_{22} + \varkappa_{22}^2 + \varkappa_{12}^2)/3, \end{gathered} \tag{1.8}$$

где σ_i, ε_i — интенсивности напряжений и деформаций.

Условие (1.6) сводится к неравенству [6] $\sigma_i' > 0$, которое для степенной функции $\sigma_i = B_0 \varepsilon_i^p$ эквивалентно неравенству $p > 0$. В этом случае из (1.8) получим зависимости между M_{kl} и $\varkappa_{kl}$

$$M_{kl} = D_0 \varkappa_i^{p-1}\, \frac{\varkappa_{kl} + \varkappa_{nn}\delta_{kl}}{2}, \qquad D_0 = \frac{8B_0}{3(p+2)} \Big(\frac{h}{2}\Big)^{p+2},$$

которые легко обращаются:

$$\begin{gathered} \varkappa_{kl} = C_0 M_i^{(1-p)/p} (M_{kl} - M_{nn}\delta_{kl}/3), \\ M_i^2 = M_{11}^2 - M_{11}M_{22} + M_{22}^2 + 3M_{12}^2, \qquad C_0 = (3/2)(3D_0/4)^{-1/p}. \end{gathered}$$

2. Решение задачи. Как отмечено выше, в аналогичной задаче об упругой плоскости под действием равномерно распределенных напряжений на бесконечности во включении реализуется однородное напряженно-деформированное состояние. Покажем, что и в рассматриваемом случае чистого изгиба поля моментов и кривизн в ЭФНВ являются однородными.

Из (1.2) и (1.4) следует, что в упругой области S прогиб w удовлетворяет бигармоническому уравнению, поэтому выражается через две функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ комплексной переменной $z = x_1 + ix_2$ [3]:

$$2w = \bar z \varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}. \tag{2.1}$$

Рассматривая w как функцию двух независимых переменных z и $\bar z$, для моментов M_{kl} в S имеем [3, 4, 7]

$$\begin{gathered} M_{11} + M_{22} = -2D(1+\nu)[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] = -4D(1+\nu) w_{,z\bar z}, \\ M_{22} - M_{11} + 2iM_{12} = 2D(1-\nu)[\bar z \Phi'(z) + \Psi(z)] = 4D(1-\nu) w_{,zz}, \\ \Phi(z) = \varphi'(z), \qquad \Psi(z) = \chi''(z). \end{gathered} \tag{2.2}$$

Предположим, что в ЭФНВ поле моментов M_{kl} (а следовательно, и кривизн $\varkappa_{kl}$) однородно. Тогда из равенств $w_{,kl} = -\varkappa_{kl}$ с точностью до линейной относительно x_1 и x_2 функции, не влияющей на напряженно-деформированное состояние в S_*, найдем $2w = -\varkappa_{kl}x_kx_l$ или в переменных z и $\overline{z}$

$$8w(z,\overline{z}) = (\varkappa_{22} - \varkappa_{11} + 2i\varkappa_{12})z^2 + (\varkappa_{22} - \varkappa_{11} - 2i\varkappa_{12})\overline{z}^2 - 2(\varkappa_{11} + \varkappa_{22})z\overline{z}. \tag{2.3}$$

Граничные условия на L для функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ в (2.2) имеют вид [4]

$$\begin{gathered} \Phi(\tau) - \lambda_k\overline{\Phi(\tau)} - [\overline{\tau}\Phi'(\tau) + \Psi(\tau)]\,\mathrm{e}^{2i\alpha} = f_k \qquad (k = 1,2), \\ \lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = (3+v)/(1-\nu), \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$f_1 = \mathrm{e}^{i\alpha}\,\frac{d(w_{,2} + iw_{,1})}{ds} = 2i\,\mathrm{e}^{i\alpha}\,\frac{dw_{,z}}{ds}, \qquad f_2 = \frac{1}{D(1-\nu)}\Big[G - i\Big(H + \int\limits_0^s Q\,ds\Big)\Big],$$

где α — угол между нормалью к контуру L в точке τ и осью Ox_1. Входящие в выражения для f_1 и f_2 величины считаются заданными на L как функции дуговой координаты s.

Из равенств [3, 7]

$$2\,\frac{\partial}{\partial\overline{z}} = \mathrm{e}^{i\alpha}\Big(\frac{\partial}{\partial n} + i\,\frac{\partial}{\partial s}\Big), \qquad 2\,\frac{\partial}{\partial z} = \mathrm{e}^{-i\alpha}\Big(\frac{\partial}{\partial n} - i\,\frac{\partial}{\partial s}\Big)$$

следует, что

$$i\,\frac{\partial}{\partial s} = \mathrm{e}^{-i\alpha}\,\frac{\partial}{\partial\overline{z}} - \mathrm{e}^{i\alpha}\,\frac{\partial}{\partial z},$$

поэтому в (2.4) f_1 — граничное значение функции $2(w_{,z\overline{z}} - \mathrm{e}^{2i\alpha}\,w_{,zz})$. Из (2.3) получаем

$$2f_1 = -[\varkappa_{11} + \varkappa_{22} + (\varkappa_{22} - \varkappa_{11} + 2i\varkappa_{12})\,\mathrm{e}^{2i\alpha}]. \tag{2.5}$$

Приближаясь к границе L из области S_* и учитывая, что $n_1 = t_2 = \cos\alpha$, $n_2 = -t_1 = \sin\alpha$ и по предположению $M_{kl,i} = 0$ $(i,k,l = 1,2)$, для величин G, H и Q в (1.3) получим

$$\begin{gathered} 2G = M_{11} + M_{22} - (M_{22} - M_{11})\cos 2\alpha + 2M_{12}\sin 2\alpha, \\ 2H = (M_{22} - M_{11})\sin 2\alpha + 2M_{12}\cos 2\alpha, \qquad Q = 0. \end{gathered}$$

Отсюда следует

$$2D(1-\nu)f_2 = M_{11} + M_{22} - (M_{22} - M_{11} + 2iM_{12})\,\mathrm{e}^{2i\alpha}. \tag{2.6}$$

Отобразим область S на внешность единичной окружности γ комплексной плоскости ζ [3]:

$$\begin{gathered} z = \omega(\zeta) = R_0(\zeta + m\zeta^{-1}), \qquad \zeta = \rho\,\mathrm{e}^{i\theta}, \qquad 2R_0 = a_1 + a_2, \\ m = (a_1 - a_2)/(a_1 + a_2) \quad (0 \leqslant m < 1). \end{gathered} \tag{2.7}$$

При $\rho = 1$ из (2.4)–(2.6) получим граничные условия для функций $\Phi_1(\zeta) = \Phi(\omega(\zeta))$ и $\Psi_1(\zeta) = \Psi(\omega(\zeta))$, определяющих напряженно-деформированное состояние при $|\zeta| > 1$ [3]:

$$\begin{gathered} \Phi_1(\sigma) - \lambda_k\overline{\Phi_1(\sigma)} - [\overline{\omega(\sigma)}\Phi_1'(\sigma)/\omega'(\sigma) + \Psi_1(\sigma)]\,\mathrm{e}^{2i\alpha} = \overline{F_k(\sigma)} \quad \text{на} \quad \gamma, \\ \overline{F_k(\sigma)} = f_k \quad (k = 1,2), \qquad \sigma = \mathrm{e}^{i\theta}, \qquad \mathrm{e}^{2i\alpha} = \sigma^2\omega'(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}. \end{gathered} \tag{2.8}$$

Вычитая в (2.8) из первого равенства второе, найдем

$$\Phi_1(\sigma) = (1-\nu)[F_1(\sigma) - F_2(\sigma)]/4 \quad \text{на} \quad \gamma.$$

Тогда с учетом (2.5)–(2.8) и известных формул [3, 7] имеем

$$
\begin{gathered}
\Phi_1(\zeta) = A - (B + iC)(m - \zeta^{-2})/(1 - m\zeta^{-2}), \\
\Psi_1(\zeta) = \frac{[A_1 - \Phi_1(\zeta) - \overline{\Phi_1}(\zeta^{-1})](m - \zeta^{-2}) - \Phi_1'(\zeta)(\zeta^{-1} + m\zeta)}{1 - m\zeta^{-2}} - (B_1 - iC_1), \qquad (2.9) \\
\overline{\Phi_1}(\zeta^{-1}) \equiv \overline{\Phi_1(\bar{\zeta}^{\,-1})} = A - (B - iC)(m - \zeta^2)/(1 - m\zeta^2), \qquad |\zeta| > 1, \\
8A = 2(1-\nu)A_1 - (M_{11} + M_{22})/D, \qquad 8B = 2(1-\nu)B_1 + (M_{22} - M_{11})/D, \\
4C = (1-\nu)C_1 - M_{12}/D, \qquad 2A_1 = -(\varkappa_{11} + \varkappa_{22}), \\
2B_1 = -(\varkappa_{22} - \varkappa_{11}), \qquad C_1 = \varkappa_{12}.
\end{gathered}
$$

Из (2.2) и (2.9) при $|\zeta| \to \infty$ получим следующие соотношения, связывающие напряженно-деформированное состояние в ЭФНВ и на бесконечности:

$$
\begin{gathered}
M_{11}^\infty + M_{22}^\infty = 4D(1+\nu)(mB - A), \\
M_{22}^\infty - M_{11}^\infty + 2iM_{12}^\infty = 2D(1-\nu)\{m(A_1 - 2A) + (1+m^2)B - B_1 + i[C_1 - (1-m^2)C]\}.
\end{gathered}
$$

Разрешая эти соотношения относительно кривизн $\varkappa_{kl}$ в области S_*, найдем

$$
\begin{gathered}
D(1-\nu)\varkappa_{11} = a_{11}M_{11} + a_{12}M_{22} + b_{11}M_{11}^\infty + b_{12}M_{22}^\infty, \\
D(1-\nu)\varkappa_{22} = a_{12}M_{11} + a_{22}M_{22} + b_{12}M_{11}^\infty + b_{22}M_{22}^\infty, \\
D(1-\nu)\varkappa_{12} = aM_{12} + bM_{12}^\infty, \qquad a_{11} = F_1^0(m), \qquad a_{22} = F_1^0(-m), \qquad (2.10) \\
a_{12} = -(1+\nu)/(3+\nu), \qquad a = -(1-\nu)(1-m^2)/[4 - (1-\nu)(1-m^2)], \\
b_{11} = F_2^0(m), \qquad b_{22} = F_2^0(-m), \qquad b_{12} = (1-\nu)/[(3+\nu)(1+\nu)], \qquad b = 1 - a, \\
F_1^0(x) = -2(1-x)/[(3+\nu)(1+x)], \\
F_2^0(x) = [3\nu + 5 + x(1-\nu)]/[(3+\nu)(1+\nu)(1+x)].
\end{gathered}
$$

Зависимости (2.10) и (1.5) при условии (1.6) однозначно разрешимы относительно моментов M_{kl} в ЭФНВ. Действительно, при заданных M_{kl}^∞ для разности двух возможных решений в (2.10) имеем

$$
D(1-\nu)\Delta M_{kl}\Delta\varkappa_{kl} = a_{11}(\Delta M_{11})^2 + 2a_{12}\Delta M_{11}\Delta M_{22} + a_{22}(\Delta M_{22})^2 + 2a(\Delta M_{12})^2 < 0,
$$

поскольку $a_{11} < 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ и $a < 0$, в то время как согласно (1.6)

$$
\Delta M_{kl}\Delta\varkappa_{kl} = 2\int\limits_0^{h/2} \Delta\sigma_{kl}\Delta\varepsilon_{kl}x_3\,dx_3 > 0 \qquad \text{при} \quad \Delta\varkappa_{kl}\Delta\varkappa_{kl} \neq 0.
$$

Отсюда следует, что $\Delta\varkappa_{kl} = 0$ и $\Delta M_{kl} = 0$ $(k, l = 1, 2)$ в S_*.

Заметим также, что построенное выше решение для напряженно-деформированного состояния в области $S \cup S_*$ при заданных на бесконечности моментах M_{kl}^∞ является единственным, т. е. напряженно-деформированное состояние в ЭФНВ является однородным. Доказательство этого факта основано на неравенстве (1.6) и следующих соображениях, аналогичных приведенным в [3] для плоской упругой задачи в случае бесконечной области. Поскольку M_{kl} ограничены при $|z| \to \infty$, функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ в (2.2) будут голоморфными на бесконечности. Отсюда после отбрасывания в выражении (2.1) для w логарифмических и не влияющих на напряженно-деформированное состояние линейных относительно z и $\overline{z}$ членов при $|z| \to \infty$ получим

$$\varphi(z) = a_1 z + a_{-1} z^{-1} + \dots, \qquad \chi(z) = b_2 z^2 + b_{-1} z^{-1} + \dots,$$

где

$$a_1 = -(M_{11}^\infty + M_{22}^\infty)/[4D(1+\nu)], \qquad b_2 = (M_{22}^\infty - M_{11}^\infty + 2iM_{12}^\infty)/[4D(1-\nu)].$$

Поскольку $\operatorname{Im} a_1$ не влияет на напряженно-деформированное состояние, выше принято, что $a_1 = \overline{a_1}$. С учетом представлений для функций $\varphi(z)$, $\chi(z)$ из (2.1) и (2.2) для разности двух возможных решений, соответствующих моментам M_{kl}^∞, следует, что Δw является ограниченной величиной при $|z| \to \infty$, а $\partial \Delta w/\partial n = O(z^{-1})$, $\Delta M_{kl} = O(z^{-2})$, $\Delta Q + \partial \Delta H/\partial s = O(z^{-3})$.

Вместо области S рассмотрим конечную упругую область S_r, внешней границей которой являются окружность L_r радиусом r, а внутренней — эллиптический контур L. Тогда из уравнения виртуальных работ [5], которое в силу условий непрерывности на L величин в (1.3) справедливо и для области $S_r \cup S_*$, следует

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} \int\limits_{S_r \cup S_*} \Delta\sigma_{kl} \Delta\varepsilon_{kl} \, dS \, dx_3 = I, \qquad I \equiv \int\limits_{L_r} \Big[\Big(\Delta Q + \frac{\partial \Delta H}{\partial s}\Big)\Delta w - \Delta G \, \frac{\partial \Delta w}{\partial n}\Big] \, ds.$$

В интеграле по L_r подынтегральная функция имеет порядок $|z|^{-3} = r^{-3}$, откуда следует, что $I = O(r^{-2})$. При $r \to \infty$ получим

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2} \int\limits_{S \cup S_*} \Delta\sigma_{kl} \Delta\varepsilon_{kl} \, dS \, dx_3 = 0,$$

что в силу (1.4) и (1.6) возможно только при $\Delta\varepsilon_{kl} = 0$ и $\Delta\sigma_{kl} = 0$ $(k, l = 1, 2)$ всюду в области $S \cup S_*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Цвелодуб И. Ю.** К определению прочностных характеристик физически нелинейного включения в линейно-упругой среде // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 4. С. 178–184.
2. **Цвелодуб И. Ю.** Физически нелинейное включение в линейно-упругой среде (плоская задача) // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 5. С. 72–84.
3. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
4. **Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А.** Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970.
5. **Цвелодуб И. Ю.** Обратная упругопластическая задача для пластин // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 186–194.
6. **Цвелодуб И. Ю.** Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1991.
7. **Савин Г. Н.** Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968.

Поступила в редакцию 5/XII 2005 г.