ПМТФ, № 3, 1964

ПЕРЕНОС ТЕПЛА И ДИФФУЗИЯ В ЧАСТИЧНО ИОНИЗОВАННОЙ ДВУХТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЕ

Г. С. Бисноватый-Коган

(*Москва*)

Дано решение системы уравнений Больцмана для плазмы в магнитном поле методом Чепмена — Энскога. Плазма считается частично ионизованной, температура электронов может отличаться от температуры тяжелых частиц. Получены тензоры, связывающие потоки тепла и диффузионные скорости с градиентами температур и векторами диффузии.

1. Уравнение Больцмана, описывающее изменение со временем функции распределения частиц сорта α по координатам и скоростям f_α $(t,\ x_i,\ c_i)$, имеет вид [1]

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + c_{\alpha i}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left(E_i + \frac{1}{c}\ \varepsilon_{ikl}c_{\alpha k}B_l\right)\frac{\partial f_\alpha}{\partial c_{\alpha i}} + J_\alpha = 0 \qquad (1.1)$$

Здесь e_α, m_α — заряд и масса частиц сорта α, индекс $\alpha = 1,\ 2,\ 3$ соответственно для однозарядных ионов, электронов и нейтралов; E_i, B_i — напряженность электрического поля и магнитная индукция; ε_{ikl} — перестановочный тензор, c — скорость света (1.2)

$$J_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} J_{\alpha\beta}\ (f_\alpha f_\beta) = \sum_{\beta=1}^{3}\int (f_\alpha f_\beta - f_\alpha' f_\beta')\ g_{\alpha\beta} b db d\varepsilon dc_{\beta i} \qquad \begin{pmatrix} dc_{\beta i} = dc_{\beta 1}dc_{\beta 2}dc_{\beta 3} \\ g_{\alpha\beta} = |\,c_{\alpha i} - c_{\beta i}\,| \end{pmatrix}$$

Штрихами обозначены функции скоростей после столкновений, $g_{\alpha\beta}$ — относительная скорость при столкновении; b, ε — геометрические параметры столкновения. Рассматриваются только упругие столкновения. Перейдем в уравнении (1.1) к относительной скорости $v_{\alpha i}$, равной

$$v_{\alpha i} = c_{\alpha i} - c_{0i}, \qquad c_{0i} = \frac{1}{\rho}\sum_{\alpha=1}^{3}\rho_\alpha\,\langle c_{\alpha i}\rangle, \qquad \langle c_{\alpha i}\rangle = \frac{1}{n_\alpha}\int f_\alpha c_{\alpha i} dc_{\alpha i}$$

$$n_\alpha = \int f_\alpha dc_{\alpha i}, \qquad \rho = \sum_{\alpha=1}^{3}\rho_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} m_\alpha n_\alpha \qquad (1.3)$$

Получим

$$\frac{df_\alpha}{dt} + v_{\alpha i}\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} + \left[\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\left(E_i + \frac{1}{c}\ \varepsilon_{ikl}c_{0k}B_l\right) - \frac{dc_{0i}}{dt}\right]\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_{\alpha i}} +$$
$$+ \left\{\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\frac{1}{c}\ \varepsilon_{ikl}v_{\alpha k}B_l\frac{\partial f_\alpha}{\partial v_{\alpha i}}\right\} - \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_{\alpha i}}\ v_{\alpha k}\frac{\partial c_{0i}}{\partial x_k} + J_\alpha = 0 \qquad (1.4)$$

$$\left(\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c_{0i}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

Так же, как в [1], получим уравнения переноса частиц каждой компоненты, переноса импульса всей смеси и переноса энергии для электронов и тяжелых частиц

$$\frac{dn_\alpha}{dt} + n_\alpha \frac{\partial c_{0i}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(n_\alpha \langle v_{\alpha i}\rangle) = 0 \tag{1.5}$$

$$\rho \frac{dc_{0i}}{dt} = \frac{1}{c}\,\varepsilon_{ikl} j_k B_l - \frac{\partial}{\partial x_k}\Pi_{ik} + \rho_e\Big(E_i + \frac{1}{c}\,\varepsilon_{ikl} c_{0k} B_l\Big) \tag{1.6}$$

$$\frac{3}{2}kn_2\frac{dT_2}{dt} + \frac{\partial q_{2i}}{\partial x_i} + \Pi_{2ik}\frac{\partial c_{0i}}{\partial x_k} = j_{2i}\Big(E_i + \frac{1}{c}\,\varepsilon_{ikl}c_{0k}B_l\Big) + $$
$$+ \frac{3}{2}kT_2\frac{\partial}{\partial x_i}(n_2\langle v_{2i}\rangle) - \rho_2\langle v_{2i}\rangle\frac{dc_{0i}}{dt} - Q_2 \tag{1.7}$$

$$\frac{3}{2}k(n_1+n_3)\frac{dT}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_i}(q_{1i}+q_{3i}) + (\Pi_{1ik}+\Pi_{3ik})\frac{\partial c_{0i}}{\partial x_k} =$$
$$= j_{1i}\Big(E_i + \frac{1}{c}\,\varepsilon_{ikl}c_{0k}B_l\Big) + \frac{3}{2}kT\frac{\partial}{\partial x_i}(n_1\langle v_{1i}\rangle + n_3\langle v_{3i}\rangle) -$$
$$-(\rho_1\langle v_{1i}\rangle + \rho_3\langle v_{3i}\rangle)\frac{dc_{0i}}{dt} - Q \tag{1.8}$$

где k — постоянная Больцмана

$$\Pi_{\alpha ik} = n_\alpha m_\alpha\langle v_{\alpha i}v_{\alpha k}\rangle, \qquad q_{\alpha i} = \frac{1}{2}n_\alpha m_\alpha\langle v_\alpha^2 v_{\alpha i}\rangle, \qquad j_{\alpha i} = n_\alpha e_\alpha\langle v_{\alpha i}\rangle \tag{1.9}$$

$$\Pi_{ik} = \sum_{\alpha=1}^{3}\Pi_{\alpha ik}, \qquad q_i = \sum_{\alpha=1}^{3} q_{\alpha i}, \qquad j_i = j_{1i} + j_{2i}, \qquad Q_2 = \int\frac{1}{2}m_2v_2^2J_2dc_{2i}$$

$$Q = \int\frac{1}{2}m_1v_1^2J_1dc_{1i} + \int\frac{1}{2}m_3v_3^2J_3dc_{3i} = -Q_2, \qquad \rho_e = e(n_1 - n_2)$$

$$\frac{3kT_2}{2} = \frac{m_2}{2}\langle v_2^2\rangle, \qquad \frac{3kT}{2} = \frac{m_1}{2}\langle v_1^2\rangle = \frac{m_3}{2}\langle v_3^2\rangle, \qquad \langle\varphi_\alpha\rangle = \frac{1}{n_\alpha}\int\varphi_\alpha f_\alpha dc_{\alpha i}$$

Здесь e — абсолютная величина заряда электрона.

Температура электронов T_2 отличается от температуры тяжелых частиц T. Соотношения (1.5) — (1.8) являются системой гидродинамических уравнений. Для нахождения зависимости $\Pi_{\alpha ik}$, $q_{\alpha i}$, $\langle v_{\alpha i}\rangle$, Q, $j_{\alpha i}$ от электрического и магнитного полей, параметров n_α, T, T_2, c_{0i} и их градиентов нужно решить систему (1.4). Решение этой системы проводится методом последовательных приближений Чепмена — Энскога [1].

2. Рассмотрим нулевое приближение. В кинетическом уравнении (1.4) в качестве основных членов рассматриваются столкновительный и магнитный. Если плазма «сильно ионизована» в смысле работы [2], то главные части столкновительных членов будут иметь вид

$$J_1^0 = J_{11}(f_1^0f_1^0) + J_{13}(f_1^0f_3^0), \qquad J_2^0 = J_{22}(f_2^0f_2^0),$$
$$J_3^0 = J_{31}(f_3^0f_1^0) + J_{33}(f_3^0f_3^0) \tag{2.1}$$

В уравнении (1.4) магнитный член (в фигурных скобках) обращается в нуль любой сферически симметричной функцией скоростей. Столкновительные члены в виде (2.1) обращаются в нуль максвелловскими функциями распределения, при этом температура электронов может отличаться от температуры тяжелых частиц. Таким образом

$$f_\alpha^0 = n_\alpha\left(\frac{m_\alpha}{2\pi kT_\alpha}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2kT_\alpha}\right), \qquad T_1 = T_3 = T \neq T_2 \tag{2.2}$$

3. Рассмотрим первое приближение. Подставим $f_\alpha = f_\alpha{}^0 + f_\alpha{}^1$ в (1.4). В малых членах достаточно оставить $f_\alpha{}^0$. Производные по времени от n_α, T, T_2, c_{0i} исключаются при помощи уравнений переноса (1.5) — (1.8), где величины (1.9) вычисляются с помощью максвелловской функции (2.2), только j_i в (1.6) вычисляется с помощью $f_\alpha = f_\alpha{}^0 + f_\alpha{}^1$. Получаем

$$\Pi_{\alpha ik}{}^0 = p_\alpha \delta_{ik}, \quad p_\alpha = n_\alpha k T_\alpha, \quad q_{\alpha i}{}^0 = 0, \quad j_{\alpha i}{}^0 = 0, \quad j_i{}^1 = j_i \neq 0 \tag{3.1}$$

Если пользоваться (2.2) и (1.2), то, согласно (1.9), величина $Q \neq 0$; однако в нулевом приближении пренебрегалось обменом энергией между электронами и тяжелыми частицами, т. е. $J_\alpha{}^0$ выбиралось в виде (2.1), поэтому $Q^0 = Q_2{}^0 = 0$. В столкновительных и магнитных членах оставляются части, линейные по f_α^1. Столкновительный член J_α^1 имеет вид

$$J_\alpha^1 = \sum_{\beta=1}^{3} \left[J_{\alpha\beta}\left(f_\alpha^0 f_\beta^1\right) + J_{\alpha\beta}\left(f_\alpha^1 f_\beta^0\right) + J_{\alpha\beta}\left(f_\alpha^0 f_\beta^0\right)\right] \tag{3.2}$$

Обозначая $f_\alpha^1 = f_\alpha^0 \Phi_\alpha$, получим систему для Φ_α

$$f_\alpha^0 \left[\frac{m_\alpha}{kT_\alpha}\left(v_{\alpha i} v_{\alpha k} - \frac{1}{3}\delta_{ik} v_\alpha{}^2\right)\frac{\partial c_{0i}}{\partial x_k} + \left(\frac{m_\alpha v_\alpha{}^2}{2kT_\alpha} - \frac{5}{2}\right)\frac{1}{T_\alpha}\frac{\partial T_\alpha}{\partial x_i} v_{\alpha i} + v_{\alpha i} d_{\alpha i}\right] =$$
$$= -f_\alpha^0\left(\frac{m_\alpha}{\rho k T_\alpha} v_{\alpha i}\frac{1}{c}\varepsilon_{ikl} j_k B_l + \frac{e_\alpha}{m_\alpha c}\varepsilon_{ikl} v_{\alpha k} B_l \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial v_{\alpha i}}\right) - \sum_{\beta=1}^{3} J_{\alpha\beta}\left(f_\alpha^0 f_\beta^0\right) - I_\alpha(\Phi_\alpha) \tag{3.3}$$

где

$$I_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} \int \left[(\Phi_\alpha + \Phi_\beta) f_\alpha^0 f_\beta^0 - (\Phi_\alpha' + \Phi_\beta') f_\alpha^{0\prime} f_\beta^{0\prime}\right] g_{\alpha\beta}\, b\, db\, d\varepsilon\, dc_{\beta i} \tag{3.4}$$

$$d_{\alpha i} = \frac{1}{p_\alpha}\frac{\partial p_\alpha}{\partial x_i} - \frac{\rho_\alpha}{p_\alpha \rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \left(\frac{m_\alpha \rho_e}{\rho k T_\alpha} - \frac{e_\alpha}{kT_\alpha}\right)\left(E_i + \frac{1}{c}\varepsilon_{ikl} c_{0k} B_l\right)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{3} p_\alpha d_{\alpha i} = 0 \qquad (p = p_1 + p_2 + p_3) \tag{3.5}$$

В качестве независимых векторов диффузии $d_{\alpha i}$ выбираются векторы d_{1i} и d_{3i}. В силу линейности, ищем решение системы (3.3) в виде

$$\Phi_\alpha = -A_{\alpha 1 i}\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x_i} - A_{\alpha 2 i}\frac{1}{T_2}\frac{\partial T_2}{\partial x_i} - G_{\alpha ik}\frac{\partial c_{0i}}{\partial x_k} - nD_{\alpha 1 i} d_{1i} - nD_{\alpha 3 i} d_{3i} - F_\alpha$$
$$(n = n_1 + n_3) \tag{3.6}$$

Здесь $A_{\alpha\beta i}$, $D_{\alpha\beta i}$, $G_{\alpha ik}$, F_α — функции $v_{\alpha i}$, B_i. Вклад в тепловой поток $q_{\alpha i}$ и диффузионную скорость $\langle v_{\alpha i}\rangle$ дадут [1] только члены с $A_{\alpha\beta i}$ и $D_{\alpha\beta i}$. Используем для дальнейшего обозначение

$$K_{\alpha i} = A_{\alpha 1 i}, \quad A_{\alpha 2 i}, D_{\alpha 1 i}, D_{\alpha 3 i} \tag{3.7}$$

Ищем $K_{\alpha i}$ в виде

$$K_{\alpha i} = K_\alpha^1 v_{\alpha i} + K_\alpha^2 \varepsilon_{ijk} v_{\alpha j} B_k + K_\alpha^3 B_i (v_{\alpha j} B_j), \qquad K_\alpha^\beta = K_\alpha^\beta (v_\alpha, B)$$
$$(\alpha,\ \beta = 1, 2, 3) \tag{3.8}$$

Уравнения для K_α^β получаются при подстановке разложений (3.6) — (3.8) в уравнение (3.3) и приравнивании коэффициентов при независимых параметрах нулю. Введем в рассмотрение величину $\zeta_\alpha = K_\alpha^1 + iBK_\alpha^2$ и перейдем к безразмерной скорости $u_{\alpha i} = ({}^1\!/_2 m_\alpha / kT_\alpha)^{1/2} v_{\alpha i}$. Системы, получающиеся для ζ_α при различных $K_{\alpha i}$ из (3.7), линейные, неоднородные, отличаются одна от другой только неоднородными членами. Они имеют вид

$$M_\alpha = -\frac{i}{3} B f_\alpha^0 \frac{e}{c} \frac{m_\alpha}{\rho k T_\alpha} (L_1 - L_2) u_{\alpha i} + i B f_\alpha^0 \frac{e_\alpha}{m_\alpha c} \zeta_\alpha u_{\alpha i} + I_\alpha(\zeta_\alpha u_{\alpha i}) \qquad (3.9)$$

Здесь

$$L_\alpha = \int \zeta_\alpha f_\alpha^0 v_\alpha^2 dc_{\alpha i} \qquad (\alpha = 1, 2, 3;\ e_1 = -e_2 = e,\ e_3 = 0). \qquad (3.10)$$

Левые части системы (3.9) для различных $K_{\alpha i}$ из (3.7) имеют вид

$$M_1 = f_1^0\left(u_1^2 - \frac{5}{2}\right) u_{1i}, \quad M_2 = 0, \quad M_3 = f_3^0\left(u_3^2 - \frac{5}{2}\right) u_{3i} \quad \text{при } K_{\alpha i} = A_{\alpha 1 i}$$

$$M_1 = 0, \quad M_2 = f_2^0\left(u_2^2 - \frac{5}{2}\right) u_{2i}, \quad M_3 = 0 \quad \text{при } K_{\alpha i} = A_{\alpha 2 i}$$

$$M_1 = \frac{1}{n} f_1^0 u_{1i}, \quad M_2 = -\frac{n_1}{n n_2} f_2^0 \frac{T}{T_2} u_{2i}, \quad M_3 = 0 \quad \text{при } K_{\alpha i} = D_{\alpha 1 i} \qquad (3.11)$$

$$M_1 = 0, \quad M_2 = -\frac{n_3}{n n_2} f_2^0 \frac{T}{T_2} u_{2i}, \quad M_3 = \frac{1}{n} f_3^0 u_{3i} \quad \text{при } K_{\alpha i} = D_{\alpha 3 i}$$

Решение системы (3.9) с правыми частями (3.11) ищем в виде разложения в ряд по полиномам Сонина $S_{3/2}^{(p)}(x)$, которые определяются следующим образом [1] (3.12)

$$(1 - s)^{-5/2} \exp \frac{-xs}{1 - s} = \sum_{p=0}^{\infty} s^p S_{3/2}^{(p)}(x); \quad S_{3/2}^{(0)}(x) = 1, \quad S_{3/2}^{(1)}(x) = \frac{5}{2} - x$$

$$\int_0^\infty e^{-x} S_{3/2}^{(p)}(x) S_{3/2}^{(q)}(x) \cdot x^{3/2} dx = \frac{\Gamma(p + 5/2)}{p!} \delta_{pq} \qquad (3.13)$$

Последовательно имеем

$$\zeta_\alpha = \sum_{p=0}^{\infty} \gamma_{\alpha p} S_{3/2}^{(p)}(u_\alpha^2), \qquad L_\alpha = \frac{3kT_\alpha}{m_\alpha} n_\alpha \gamma_{\alpha 0} \qquad (3.14)$$

Из условия того, что поправка к максвелловской функции не дает вклада в среднемассовую скорость, получаем условие

$$n_1 T \gamma_{10} + n_2 T_2 \gamma_{20} + n_3 T \gamma_{30} = 0 \qquad (3.15)$$

Подставляя (3.14) в (3.9), умножая на $S_{3/2}^{(p)}(u_\alpha^2) u_{\alpha i}$ и интегрируя по $dc_{\alpha i}$, получим вместо системы (3.9) бесконечную систему линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$N_{\alpha 0} = -i \frac{3}{2} \frac{eB}{\rho c} \frac{m_\alpha}{T_\alpha} \left(\gamma_{10} \frac{n_1 T}{m_1} - \gamma_{20} \frac{n_2 T_2}{m_2}\right) n_\alpha + i \frac{3}{2} \frac{e_\alpha B}{m_\alpha c} n_\alpha \gamma_{\alpha 0} +$$

$$+ \left(\frac{m_\alpha T}{m_1 T_\alpha}\right)^{1/2} \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_{1r} a_{0r}^{\alpha 1} + \left(\frac{m_\alpha T_2}{m_2 T_\alpha}\right)^{1/2} \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_{2r} a_{0r}^{\alpha 2} + \left(\frac{m_\alpha T}{m_3 T_\alpha}\right)^{1/2} \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_{3r} a_{0r}^{\alpha 3}$$

$$N_{\alpha k} = i \frac{2\Gamma(k + 5/2)}{\sqrt{\pi}\, k!} \frac{e_\alpha B}{m_\alpha c} n_\alpha \gamma_{\alpha k} + \left(\frac{m_\alpha}{m_1} \frac{T}{T_\alpha}\right)^{1/2} \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_{1r} a_{kr}^{\alpha 1} +$$

$$+ \left(\frac{m_\alpha T_2}{m_2 T_\alpha}\right)^{1/2} \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_{2r} a_{kr}^{\alpha 2} + \left(\frac{m_\alpha T}{m_3 T_\alpha}\right)^{1/2} \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_{3r} a_{kr}^{\alpha 3} \qquad \begin{pmatrix} k \geqslant 1 \\ \alpha = 1, 2, 3 \end{pmatrix} \qquad (3.16)$$

Для различных $K_{\alpha i}$ из (3.7) левые части системы (3.16) имеют вид

$$
\begin{array}{lll}
N_{11} = -\frac{15}{4} n_1, \quad N_{31} = -\frac{15}{4} n_3 & \text{при } K_{\alpha i} = A_{\alpha 1 i} & \\
N_{21} = -\frac{15}{4} n_2 & \text{при } K_{\alpha i} = A_{\alpha 2 i} & \\
N_{10} = \frac{3}{2}\frac{n_1}{n}, \quad N_{20} = -\frac{3}{2}\frac{n_1 T}{n T_2} & \text{при } K_{\alpha i} = D_{\alpha 1 i} & (3.17) \\
N_{20} = -\frac{3}{2}\frac{n_3}{n}\frac{T}{T_2}, \quad N_{30} = \frac{3}{2}\frac{n_3}{n} & \text{при } K_{\alpha i} = D_{\alpha 3 i} &
\end{array}
$$

Во всех этих случаях остальные значения $N_{\alpha j} = 0$. Величины $a_{pq}^{\alpha\beta}$ определяются следующим образом:

$$
a_{pq}^{\alpha\alpha} = \int f_\alpha^0 f^0 S_{3/2}{}^{(p)}(u_\alpha{}^2)\, u_{\alpha i}\, [S_{3/2}{}^{(q)}(u_\alpha{}^2)\, u_{\alpha i} + S_{3/2}{}^{(q)}(u^2)\, u_i - S_{3/2}{}^{(q)}(u_\alpha{}'^2)\, u_{\alpha i}{}' -
$$

$$
- S_{3/2}{}^{(q)}(u'^2)\, u_i{}']\, g_{\alpha\alpha} b\, db\, d\varepsilon\, dc_i\, dc_{\alpha i} +
$$

$$
+ \sum_{\beta \neq \alpha} \int S_{3/2}^{(p)}(u_\alpha{}^2)\, u_{\alpha i}\, [f_\alpha^0 f_\beta^0 S_{3/2}{}^{(q)}(u_\alpha{}^2)\, u_{\alpha i} - f_\alpha^{0\prime} f_\beta^{0\prime} S_{3/2}{}^{(q)}(u_\alpha{}'^2)\, u_{\alpha i}{}']\, g_{\alpha\beta} b\, db\, d\varepsilon\, dc_{\beta i}\, dc_{\alpha i}
$$

$$
(\alpha, \beta = 1, 2, 3) \tag{3.18}
$$

$$
a_{pq}^{\alpha\beta} = \int S_{3/2}^{(p)}(u_\alpha{}^2)\, u_{\alpha i}\, [f_\alpha^0 f_\beta^0 S_{3/2}^{(q)}(u_\beta{}^2)\, u_{\beta i} - f_\alpha^{0\prime} f_\beta^{0\prime} S_{3/2}{}^{(q)}(u_\beta{}'^2)\, u_{\beta i}{}']\, g_{\alpha\beta} b\, db\, d\varepsilon\, dc_{\beta i}\, dc_\alpha{}^i
$$

$$
(\alpha_1, \beta = 1,2,3;\ \alpha \neq \beta)
$$

Три первых уравнения системы (3.16) будут линейно зависимыми. Это есть математическое следствие того же факта, из которого получено условие (3.15). Исключив из системы (3.16) с левыми частями (3.17) переменную γ_{30} при помощи (3.15) и отбросив третье из уравнений (3.16), получим систему, которую можно решить по правилу Краммера. Найдя ζ_α, решение для K_α^3 можно сразу выписать из следующих соображений: без магнитного поля свойства переноса определяются только величиной K_α^1, в которой положено $B = 0$. Вдоль магнитного поля свойства переноса не меняются, поэтому при B_i, параллельном какому-либо из векторов $\partial T_\alpha / \partial x_i$, $d_{\alpha i}$, свойства переноса, связанные с этим вектором, будут такими же, как и при $B = 0$. Поэтому

$$
K_\alpha^1 + B^2 K_\alpha^3 = (K_\alpha^1)_{B=0} \tag{3.19}
$$

Это соотношение определяет K_α^3. Если $\gamma_{\alpha r} = x_{\alpha r} + iBy_{\alpha r}$, а K_α^3 разложить в ряд по полиномам Сонина с коэффициентами $z_{\alpha r}$, то

$$
x_{\alpha r} + B^2 z_{\alpha r} = (x_{\alpha r})_{B=0} \tag{3.20}
$$

4. Коэффициенты разложения K_α^3 по полиномам Сонина для различных $K_{\alpha i}$ из (3.7) будем обозначать следующим образом

$$
\begin{array}{cccc}
 & K_\alpha^1 & K_\alpha^2 & K_\alpha^3 \\
A_{\alpha 1 i} & a_r{}^{\alpha 1} & b_r{}^{\alpha 1} & c_r{}^{\alpha 1} \\
A_{\alpha 2 i} & a_r{}^{\alpha 2} & b_r{}^{\alpha 2} & c_r{}^{\alpha 2} \\
D_{\alpha 1 i} & x_r{}^{\alpha 1} & y_r{}^{\alpha 1} & z_r{}^{\alpha 1} \\
D_{\alpha 3 i} & x_r{}^{\alpha 3} & y_r{}^{\alpha 3} & z_r{}^{\alpha 3}
\end{array}
\quad
\begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, 3 \\ r \geqslant 0 \end{pmatrix}
\tag{4.1}
$$

Тогда, используя определение (1.9) для $q_{\alpha i}$, $\langle v_{\alpha i} \rangle$, j_i, получим, учи- $f_\alpha = f_\alpha^0 (1 + \Phi_\alpha)$ и равенства (3.6), (3.8), (3.14), (4.1), а также ортогональность полиномов Сонина (3.13)

$$q_{\alpha i} = -\lambda_{ik}^{\alpha 1} \frac{\partial T}{\partial x_k} - \lambda_{ik}^{\alpha 2} \frac{\partial T_2}{\partial x_k} - \nu_{ik}^{\alpha 1} d_{1i} - \nu_{ik}^{\alpha 3} d_{3i} \tag{4.2}$$

$$\langle v_{\alpha i} \rangle = -\eta_{ik}^{\alpha 1} d_{1k} - \eta_{ik}^{\alpha 3} d_{3k} - \mu_{ik}^{\alpha 1} \frac{\partial T}{\partial x_k} - \mu_{ik}^{\alpha 2} \frac{\partial T_2}{\partial x_k} \tag{4.3}$$

где

$$\lambda_{ik}^{\alpha\beta} = \frac{5}{2} \frac{k^2 T_\alpha^{\ 2}}{m_\alpha T_\beta} n_\alpha \left[(a_0^{\ \alpha\beta} - a_1^{\ \alpha\beta})\, \delta_{ik} - \varepsilon_{ikn} B_n (b_0^{\ \alpha\beta} - b_1^{\ \alpha\beta}) + B_i B_k (c_0^{\ \alpha\beta} - c_1^{\ \alpha\beta}) \right]$$

$$(\alpha = 1, 2, 3; \quad \beta = 1, 2) \tag{4.4}$$

$$\nu_{ik}^{\alpha\beta} = \frac{5}{2} \frac{k^2 T_\alpha^{\ 2}}{m_\alpha} n n_\alpha \left[(x_0^{\ \alpha\beta} - x_1^{\ \alpha\beta})\, \delta_{ik} - \varepsilon_{ikn} B_n (y_0^{\ \alpha\beta} - y_1^{\ \alpha\beta}) + B_i B_k (z_0^{\ \alpha\beta} - z_1^{\ \alpha\beta}) \right]$$

$$(\alpha = 1, 2, 3; \quad \beta = 1, 3) \tag{4.5}$$

$$\eta_{ik}^{\alpha\beta} = \frac{k T_\alpha n}{m_\alpha} \left[x_0^{\ \alpha\beta} \delta_{ik} - \varepsilon_{ikn} B_n y_0^{\ \alpha\beta} + B_i B_k z_0^{\ \alpha\beta} \right] \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, 3 \\ \beta = 1, 3 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

$$\mu_{ik}^{\alpha\beta} = \frac{k T_\alpha}{m_\alpha T_\beta} \left[a_0^{\ \alpha\beta} \delta_{ik} - \varepsilon_{ikn} B_n b_0^{\ \alpha\beta} + B_i B_k c_0^{\ \alpha\beta} \right] \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, 3 \\ \beta = 1, 2 \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

$$j_i = e (n_1 \langle v_{1i} \rangle - n_2 \langle v_{2i} \rangle) \tag{4.8}$$

Таким образом, для нахождения тепловых потоков и диффузионных скоростей достаточно знать два первых коэффициента разложения.

5. Оставим в разложении (3.14) два первых члена. Входящие в уравнения первого приближения по полиномам Сонина элементы $a_{ik}^{\alpha\beta}$ $(i, k = 0, 1)$, определенные в (3.18), будут иметь вид

$$a_{00}^{11} = \frac{x_1}{\tau_{13}} n\alpha (1 - \alpha) + \frac{3}{2} \frac{n\alpha}{\tau_2} \frac{m_2}{m}, \qquad a_{01}^{11} = 0, \qquad a_{10}^{11} = \frac{15}{2} \frac{m_2}{m} \frac{T_2 - T}{T} \frac{n\alpha}{\tau_2}$$

$$a_{11}^{11} = \frac{3n\alpha}{\tau_1} + \frac{x_4}{\tau_{13}} n\alpha (1 - \alpha), \qquad a_{00}^{12} = -\frac{3}{2} \left(\frac{m_2 T_2}{mT} \right)^{1/2} \frac{n\alpha}{\tau_2}$$

$$a_{01}^{12} = -\frac{9}{4} \left(\frac{m_2 T_2}{mT} \right)^{1/2} \frac{n\alpha}{\tau_2}, \qquad a_{10}^{12} = a_{11}^{12} = 0, \qquad a_{00}^{13} = -\frac{x_1}{\tau_{13}} n\alpha (1 - \alpha)$$

$$a_{10}^{13} = a_{01}^{13} = 0, \qquad a_{11}^{13} = -\frac{x_5}{\tau_{13}} n\alpha (1 - \alpha), \qquad a_{00}^{21} = -\frac{3}{2} \left(\frac{m_2 T}{m T_2} \right)^{1/2} \frac{n\alpha}{\tau_2}$$

$$a_{01}^{21} = a_{11}^{21} = 0, \qquad a_{10}^{21} = -\frac{9}{4} \left(\frac{m_2 T}{m T_2} \right)^{1/2} \frac{n\alpha}{\tau_2} \tag{5.1}$$

$$a_{00}^{22} = \frac{3}{2} \frac{n\alpha}{\tau_2} + \frac{x_2}{\tau_{23}} n\alpha (1 - \alpha), \qquad a_{10}^{22} = a_{01}^{22} = \frac{9}{4} \frac{n\alpha}{\tau_2}$$

$$a_{11}^{22} = \left(\frac{13}{4} + \sqrt{2} \right) \frac{3}{2} \frac{n\alpha}{\tau_2} + \frac{x_3}{\tau_{23}} n\alpha (1 - \alpha), \qquad a_{00}^{23} = -\frac{x_2}{\tau_{23}} n\alpha (1 - \alpha) \left(\frac{m_2 T}{m T_2} \right)^{1/2}$$

$$a_{10}^{23} = a_{01}^{23} = a_{11}^{23} = 0, \qquad a_{00}^{31} = -\frac{x_1}{\tau_{13}} n\alpha (1 - \alpha), \qquad a_{10}^{31} = a_{01}^{31} = 0$$

$$a_{11}^{31} = -\frac{x_5}{\tau_{13}} n\alpha (1 - \alpha), \qquad a_{00}^{32} = -\frac{x_2}{\tau_{23}} n\alpha (1 - \alpha) \left(\frac{m_2 T_2}{mT} \right)^{1/2}, \quad a_{10}^{32} = a_{01}^{32} = a_{11}^{32} = 0$$

$$a_{00}^{33} = \frac{x_1}{\tau_{13}} n\alpha (1 - \alpha), \quad a_{01}^{33} = 0, \quad a_{10}^{33} = \frac{x_6}{\tau_{23}} n\alpha (1 - \alpha) \frac{m_2}{m} \frac{T_2 - T}{T}$$

$$a_{11}^{33} = \frac{n (1 - \alpha)}{\tau_{33}} + \frac{x_4}{\tau_{13}} n\alpha (1 - \alpha)$$

где

$$\tau_1 = \frac{3\sqrt{m}\,(kT)^{3/2}}{4\sqrt{\pi}\,\lambda_1 e^4 n\alpha}, \qquad \tau_3 = \frac{1}{8\sqrt{\pi}\,\Omega^{(2,2)*}\sigma^2}\left(\frac{m}{kT}\right)^{1/2}\frac{1}{n(1-\alpha)}$$

$$\tau_2 = \frac{3\sqrt{m_2}\,(kT_2)^{3/2}}{4\sqrt{2\pi}\,\lambda_2 e^4 n\alpha}, \qquad \tau_{13} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\varphi_1}\,n}, \qquad \tau_{23} = \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{\varphi_2}\,n} \tag{5.2}$$

Здесь λ_α — кулоновский логарифм [3] для ионов и электронов

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{2}\ln\frac{k^3 T_\alpha^{\,2} T T_2}{\pi n\alpha e^6 (T + T_2)} \qquad (\alpha = 1, 2) \tag{5.3}$$

Взаимодействие нейтралов между собой рассчитывалось по потенциалу Ленарда — Джонса. Значения σ и $\Omega^{(2,2)*}$ для этого потенциала даны в [4]. Для взаимодействия нейтралов с заряженными частицами принималось максвелловское взаимодействие

$$F_{3\alpha} = \frac{\varphi_\alpha}{x^5} \qquad (\alpha = 1, 2) \tag{5.4}$$

Константу взаимодействия φ_2 для электронов можно оценить по величине поляризуемости молекулы [5], которую можно выразить через диэлектрическую постоянную газа [6]. Рассматривая картину взаимодействия по классической механике, получим

$$\varphi_2 = \frac{3}{2\pi}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\frac{e^2}{N} = 4.12\cdot 10^{-39}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\left[\frac{см^6 г}{сек^2}\right] \tag{5.5}$$

Здесь ε — диэлектрическая постоянная газа, N — число частиц в *см*^{3} при нормальных условиях. Значение φ_1 больше φ_2 примерно на порядок из-за большого сечения перезарядки.

Для максвелловского взаимодействия недиагональные элементы $a_{ik}^{3\alpha}$ и $a_{ik}^{\alpha 3}$ $(i \neq k)$ обращаются в нуль. Для реальных взаимодействий нейтралов с ионами и электронами эти элементы гораздо меньше диагональных, в первом приближении ими можно пренебречь. Для максвелловского взаимодействия

$$x_1 = 2.81, \quad x_2 = 3.98, \quad x_3 = 9.95, \quad x_4 = 10.7, \quad x_5 = 3.4, \quad x_6 = 19.9 \tag{5.6}$$

При вычислении (5.1) пренебрегалось величинами $\sim (m_2 T_2 / mT)^{1/2}$ по сравнению с единицей и полагалось

$$m_1 = m_3 = m; \qquad n_1 = n_2 = n\alpha, \qquad \alpha = n_1 / (n_1 + n_3) \tag{5.7}$$

Интегралы столкновений (5.1) нейтралов с ионами и электронами для реальных взаимодействий нужно рассчитывать по формулам [1], которые в принятом приближении имеют вид

$$\frac{x_1}{n\tau_{13}} = 4\Omega_{13}^{(1)}(1), \qquad \frac{x_2}{n\tau_{23}} = 8\Omega_{23}^{(1)}(1), \qquad \frac{x_6}{n\tau_{23}} = 40\Omega_{23}^{(1)}(1)$$

$$\frac{x_3}{n\tau_{23}} = 8\left[\frac{25}{4}\Omega_{23}^{(1)}(1) - 5\Omega_{23}^{(1)}(2) + \Omega_{23}^{(1)}(3)\right]$$

$$\frac{x_4}{n\tau_{13}} = 4\left[\frac{55}{16}\Omega_{13}^{(1)}(1) - \frac{5}{4}\Omega_{13}^{(1)}(2) + \frac{1}{4}\Omega_{13}^{(1)}(3) + \frac{1}{2}\Omega_{13}^{(2)}(2)\right]$$

$$\frac{x_5}{n\tau_{13}} = \frac{55}{4}\Omega_{13}^{(1)}(1) - 5\Omega_{13}^{(1)}(2) + \Omega_{13}^{(1)}(3) - 2\Omega_{13}^{(2)}(2) \tag{5.8}$$

$$\Omega_{\beta 3}^{(l)}(r) = \sqrt{\pi}\int_0^\infty e^{-z^2} z^{2r+2}\int_0^\infty (1 - \cos^l \chi_{3\beta})\, g_{3\beta} b\, db\, dz$$

В формулах (5.8) приняты обозначения

$$z = \left[\frac{mm_\beta}{2k\,(mT_\beta + m_\beta T)}\right]^{1/2} g_{3\beta} \qquad (\beta = 1, 2) \tag{5.9}$$

Здесь $\chi_{3\beta}$ — угол рассеяния. Используя (3.16), (5.1), пренебрегая величинами $\sim (m_2T_2\,/\,mT)^{1/2}$ по сравнению с единицей и учитывая $\alpha\tau_2 \ll \tau_{23}$ для коэффициентов в (4.4) — (4.7), получим

$$a_0^{\beta 1} = b_0^{\beta 1} = c_0^{\beta 1} = a_1^{21} = b_1^{21} = c_1^{21} = 0 \qquad (\beta = 1, 2, 3) \tag{5.10}$$

Для $\gamma_1^{\mu} = a_1^{\mu 1} + iBb_1^{\mu 1}$ ($\mu = 1, 3$) получим систему

$$-\frac{15}{4}n\alpha = \left[\frac{3n\alpha}{\tau_1} + \frac{x_4 n\alpha\,(1-\alpha)}{\tau_{13}} + i\frac{15}{4}\omega_1 n\alpha\right]\gamma_1^1 - \frac{x_5}{\tau_{13}} n\alpha\,(1-\alpha)\,\gamma_1^3$$

$$-\frac{15}{4}n\,(1-\alpha) = -\frac{x_5}{\tau_{13}} n\alpha\,(1-\alpha)\,\gamma_1^1 + \left[\frac{n\,(1-\alpha)}{\tau_3} + \frac{x_4}{\tau_{13}} n\alpha\,(1-\alpha)\right]\gamma_1^3$$

$$\left(\omega_1 = \frac{eB}{mc}\right) \tag{5.11}$$

Из (5.11) (5.2) и (4.4) при $\alpha = 0$ получаем формулу первого приближения для коэффициента теплопроводности простого газа [1]

$$\lambda = \frac{75}{64}\frac{1}{\sigma^2\Omega^{(2,2)*}}\left(\frac{k^3T}{\pi m}\right)^{1/2} \tag{5.12}$$

Для модели упругих шаров $\Omega^{(2,2)*} = 1$

$$a_1^{\beta 2} = b_1^{\beta 2} = c_1^{\beta 2} = x_1^{\beta\mu} = y_1^{\beta\mu} = z_1^{\beta\mu} = 0 \qquad (\beta = 1, 3;\ \mu = 1, 3) \tag{5.13}$$

Для коэффициентов

$$\begin{aligned}
&\rho_{11} = a_0^{12} + iBb_0^{12}, \quad &&\rho_{12} = a_0^{22} + iBb_0^{22}, \quad &&\rho_{13} = a_1^{22} + iBb_1^{22}\\
&\rho_{21} = x_0^{11} + iBy_0^{11}, \quad &&\rho_{22} = x_0^{21} + iBy_0^{21}, \quad &&\rho_{23} = x_1^{21} + iBy_1^{21}\\
&\rho_{31} = x_0^{13} + iBy_0^{13}, \quad &&\rho_{32} = x_0^{23} + iBy_0^{23}, \quad &&\rho_{33} = x_1^{23} + iBy_1^{23}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

получим систему (5.15)

$$P_{\beta 1} = n\alpha\left[i\frac{3}{2}\omega_1(1-\alpha) + \frac{x_1}{\tau_{13}} + \frac{3}{2\tau_2}\frac{m_2}{m}\right]\rho_{\beta 1} + \frac{T_2}{T}n\alpha\left[i\frac{3}{2}\omega_2\alpha - \frac{3}{2\tau_2}\right]\rho_{\beta 2} - \frac{T_2}{T}n\alpha\frac{9}{4\tau_2}\rho_{\beta 3}$$

$$P_{\beta 2} = -n\alpha\frac{3}{2\tau_2}\frac{m_2T}{mT_2}\rho_{\beta 1} + n\alpha\left[\frac{3}{2\tau_2} + \frac{x_2(1-\alpha)}{\tau_{23}} - i\frac{3}{2}\omega_2\right]\rho_{\beta 2} + \frac{9}{4\tau_2}n\alpha\rho_{\beta 3}$$

$$P_{\beta 3} = -\frac{9}{4\tau_2}n\alpha\frac{m_2}{m}\frac{T}{T_2}\rho_{\beta 1} + \frac{9}{4\tau_2}n\alpha\rho_{\beta 2} + n\alpha\left[\frac{7}{\tau_2} + \frac{x_3(1-\alpha)}{\tau_{23}} - i\frac{15}{4}\omega_2\right]\rho_{\beta 3}$$

$$\left(\omega_2 = \frac{eB}{m_2c},\ \beta = 1, 2, 3\right)$$

где (5.16)

$$P_{13} = -\frac{15}{4}n\alpha, \qquad P_{21} = \frac{3}{2}\alpha, \qquad P_{22} = -\frac{3}{2}\alpha\frac{T}{T_2}, \qquad P_{32} = -\frac{3}{2}(1-\alpha)\frac{T}{T_2}$$

Остальные $P_{\beta\mu} = 0$. Из системы (5.15) при $\alpha = 1$ получаются результаты первого приближения Ландсхоффа [7] для коэффициентов переноса вдоль и поперек магнитного поля и результаты работы [8]. В [7] исследована сходимость коэффициентов переноса для полностью ионизованной плазмы в случае $B = 0$ при разложении по полиномам Сонина. Для коэффициентов диффузии и диффузионного термоэффекта первое приближение дает ошибку $\sim 1{,}5\%$, для коэффициентов теплопроводности и термодиффузии ошибка $\sim 15\%$. При $B = 0$ и $T_2 = T$ из (5.15) получаются результаты первого приближения работы [9]. Остальные коэффициенты в (4.4) — (4.7) получаются из соотношений

$$B^2 c_k^{\alpha\mu} = (a_k^{\alpha\mu})_{B=0} - a_k^{\alpha\mu}, \qquad B^2 z_k^{\alpha\beta} = (x_k^{\alpha\beta})_{B=0} - x_k^{\alpha\beta} \tag{5.17}$$

$$(\alpha = 1, 2, 3; \quad \mu = 1{,}2; \quad \beta = 1, 3; \; k = 0, 1)$$

$$F_0^{3\beta} = -\frac{\alpha}{1-\alpha} F_0^{1\beta} \tag{5.18}$$

где

$$F = a, b, c \quad (\beta = 1, 2), \qquad F = x, y, z \quad (\beta = 1, 3)$$

Пределы применимости решения уравнения Больцмана методом Чепмена — Энскога для полностью ионизованной плазмы даны в [7,9]. Эти условия необходимы и для применимости данной работы. Кроме того, необходимо, чтобы плазма была «сильно ионизована» в смысле работы [2].

При корректуре автору стала известна только что появившаяся работа [11], в которой методом Чепмена — Энскога, аналогично С. И. Брагинскому [10] проводится расчет коэффициентов переноса для электронов и ионов в частично ионизованной двухтемпературной плазме. Распределение нейтралов принималось максвелловским.

Заметим, что аналогичный учет влияния нейтральных частиц на свойства переноса в частично ионизованной однотемпературной плазме сделан в работе [12].

Поступила 20 II 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Чепмен С. и Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. ИЛ, 1960.
2. Гинзбург В. Л. и Гуревич А. В. Нелинейные явления в плазме, находящейся в переменном электромагнитном поле. Успехи физ. наук, 1960, т. 70, вып. 2.
3. Ландау Л. Д. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия. Ж. эксперим. и теор. физ., 1937, т. 7, вып. 2.
4. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. ИЛ, 1961.
5. Байе, Делькруа, Денисс. Кинетическая теория однородной слабо ионизованной плазмы. Сб. пер. Пробл. совр. физ., ИЛ, 1957, № 5.
6. Тамм И. Е. Основы теории электричества. Гостехтеоретиздат, 1957.
7. Landshoff R. Transport phenomena in a completety ionized gas in presense of magnetic field. Phys. Rev., 1949, v. 76, p. 904; 1951, v. 82, p. 442. (Русск. пер. Пробл. совр. физ., ИЛ, 1956, № 2).
8. Marshall W. The kinetic theory of an ionized gas. p. III. At. Energy Res Estable 1960, N T/R, 2419.
9. Schirmer H., Friedrich I. Die electrische Leitfähigkeit eines Plasmas. Z. Physik, 1958, B. 151, H. 2, S. 174; 1958, B. 151, H 3, S. 375; Die Wärmesfähigkeit eines Plasmas. Z. Physik, 1959, B. 153, H. 5, S. 563. (Русск. пер. сб. Движущаяся плазма, ИЛ, 1961).
10. Брагинский С. И. Явления переноса в полностью ионизованной двухтемпературной плазме. Ж. эксперим. и теор. физ., 1957, т. 33, вып. 2(8).
11. Стаханов И. П. и Степанов А. С. Уравнения переноса для 3-компонентной плазмы в магнитном поле. Журн. техн. физ., 1964, т. 34, вып. 3.
12. Wright J. Effect of neutral particles on the transport properties of a plasma in a uniform magnetic field. Phys. of fluids, 1961, vd. 4, № 11, p. 1341.