ЛИТЕРАТУРА

1. *Авдонин Н. А.* О некоторых формулах для расчета температурного поля пласта при тепловой инжекции.— «Изв. высш. учеб. заведений. Нефть и газ», 1964, № 3.
2. *Любимова Е. А.* Лабораторные и полевые исследования теплофизических свойств горных пород.— Тезисы докл. на 2-м совещ. по геотермическим исслед. в СССР. М., «Недра», 1964.
3. *Рубинштейн Л. И.* Температурное поле нефтяного пласта. М., «Недра», 1972.
4. *Аббасов М. Т., Аббасов А. А.* О распределении температуры в нефтяном пласте при тепловой инжекции.— В кн.: Термические методы увеличения нефтеотдачи и геотермологии нефтяных месторождений. М., ВНИИОЭНГ, 1967.
5. *Тепловые методы* разработки нефтяных месторождений и обработки призабойных зон пласта. М., ВНИИОЭНГ, 1971.
6. *Рождественский В. А.* Неизотермическое течение жидкости в кусочно-однородном пласте.— «Изв. высш. учеб. заведений. Нефть и газ», 1972, № 3.

УДК 539.8

РАЗВИТИЕ ТРЕЩИНЫ В ГОРНОМ МАССИВЕ ПРИ НАГНЕТАНИИ В НЕЕ ЖИДКОСТИ

Ю. А. Песляк

(*Москва*)

В горном деле имеется ряд процессов, при которых в существующие или образованные трещины нагнетается жидкость под давлением, превышающим горное. К ним относятся гидравлический разрыв нефтяного пласта, гидрорасчленение угольного пласта, вытеснение нефти при повышенных давлениях нагнетания [1, 2]. Развитие вертикальной и горизонтальной трещин при нагнетании нефильтрующейся жидкости исследовано в [3, 4]. В этих работах реальное распределение давления жидкости в трещине заменено статически эквивалентным равномерным давлением, действующим на части поверхности трещины.

Предлагается постановка этих задач, позволяющая достаточно эффективное их решение и не содержащая допущение о равномерном распределении давления. Для вертикальной симметричной трещины получена система уравнений, определяющая задачу Коши относительно объема трещины. Условие квазистатического равновесия трещины и решение задачи значительно упрощаются в системе подвижных эллиптических координат, связанных с трещиной. Аналогичный подход применен для исследования развития круговой горизонтальной трещины.

1. Рассмотрим вертикальную трещину, симметрично расположенную относительно скважины.

Поскольку скорость распространения трещины мала по сравнению со скоростью звука, можно пренебречь динамическими эффектами и рассматривать развитие трещины как квазистатический процесс. Кроме того, можно считать, что деформация массива описывается линейной теорией упругости, а течение жидкости в трещине ламинарно.

Проекция трещины на горизонтальную плоскость xy в каждый момент времени t представляется разрезом вдоль оси x от $-l(t)$ до $l(t)$. Напряженное состояние бесконечного горного массива с трещиной в условиях плоской деформации определяется с помощью метода, изложенного в [5]. Учитывая симметрию задачи, находим условие ограниченности напряжений в концах трещины

$$(1.1)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}\sqrt{\frac{l-x}{l+x}}\,p(x,t)\,dx - q_\infty l = 0,$$

где $p(x,t)$ — давление жидкости в трещине; $q_\infty = -\sigma_x(\infty) = -\sigma_y(\infty)$ — боковое давление в ненарушенном горном массиве.

Для нормальной компоненты перемещения точек контура трещины имеем

$$(1.2)\qquad v_y^+(x,t) = -v_y^-(x,t) = \frac{4(1-\nu^2)}{E}\left[-q_\infty\sqrt{l^2-x^2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} p(\xi,t)\ln\left|\frac{\sqrt{(l^2-x^2)(l^2-\xi^2)}+l^2-x\xi}{x-\xi}\right| d\xi\right],$$

где E и ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона пород.

Условие неразрывности потока несжимаемой жидкости в трещине представляется в виде

$$\frac{dq}{\partial x} - Q\delta(x) = 0,$$

где $q(x,t)$ — объемный расход жидкости через сечение трещины; $Q(t)$ — расход жидкости, закачиваемой в трещину; $\delta(x)$ — дельта-функция.

Интегрируя последнее уравнение и учитывая симметрию задачи, получаем

$$q(x) + \frac{Q}{2}[1 - 2\cdot 1(x)] = 0,$$

где $1(x)$ — единичная функция Хевисайда ($1(x)=0$ при $x<0$ и $1(x)=1$ при $x \geqslant 0$).

При плоском ламинарном движении жидкости имеем

$$q = -h\frac{2d^3}{3\eta}\frac{\partial p}{\partial x},$$

где $2d = v_y^+ - v_y^- = 2v_y^+$ — раскрытие трещины; h — толщина пласта; η — вязкость жидкости.

В концах развивающейся трещины $x = \pm l$, где $d \to 0$, а градиент давления $\frac{\partial p}{\partial x} \to \pm\infty$, расход имеет конечное значение $q(\pm l) = \pm Q/2$.

Из двух последних соотношений получаем условие неразрывности потока в виде

$$(1.3)\qquad h\frac{2v^{+3}}{3\eta}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{Q}{2}[1 - 2\cdot 1(x)] = 0.$$

Из условия сохранения массы жидкости имеем

$$(1.4)\qquad 2h\int_{-l}^{l} v_y^+(x,t)\,dx - \Omega = 0,$$

где объем трещины

(1.5) $$\Omega=\Omega_0+\int\limits_0^t Q dt.$$

При заданном расходе закачиваемой жидкости $Q(t)$ интегро-дифференциальные уравнения (1.1) — (1.4) составляют систему уравнений относительно неизвестных функций $l(t)$, $v_y^{\pm}(x, t)$ и $p(x, t)$. При этом задаются также начальная длина и объем трещины $l(0)=l_0$ и $\Omega(0)=\Omega_0$.

Если расход жидкости неизвестен, а задано давление на забое скважины p_c, то к полученным уравнениям добавляется

(1.6) $$p(0,t)=p_c(t).$$

В этом случае система уравнений (1.1) — (1.6) определяет задачу Коши относительно объема трещины Ω с начальным условием

(1.7) $$\Omega(0)=\Omega_0.$$

В указанной постановке задачи трещина при $t=0$ имеет отличную от нуля длину. Начальное раскрытие трещины и распределение давления жидкости определяется уравнениями (1.1) — (1.4).

Введем подвижные эллиптические координаты ρ, ϑ, связанные с трещиной

$$x=\frac{l}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\cos\vartheta;\quad y=\frac{l}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)\sin\vartheta.$$

На контуре трещины $\rho=1$, а значения $2n\pi\leqslant\vartheta\leqslant(2n+1)\pi$ соответствуют $y=+0$ и $(2n+1)\pi\leqslant\vartheta\leqslant2(n+1)\pi-y=-0$, $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

Обозначая $p(\vartheta, t)=p[l(t)\cos\vartheta, t]$ и $v(\vartheta, t)=v_y^{\pm}[l(t)\cos(\vartheta,t)]$, представим полученные выше соотношения в виде

(1.1a) $$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} p(\vartheta, t)\,d\vartheta-q_\infty=0;$$

(1.2a) $$v(\vartheta, t)=-2l(t)\left[q_\infty\sin\vartheta+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{tg}\frac{\vartheta-\varphi}{2}\,d\varphi\times\right.$$
$$\left.\times\int\limits_0^{\varphi}p(\eta, t)\sin\eta\,d\eta\right];$$

(1.3a) $$\frac{2v^3(\vartheta, t)}{3l(t)\sin\vartheta}\frac{\partial p}{\partial\vartheta}-\frac{Q}{2h}r(2\vartheta)=0;$$

(1.4a) $$l(t)\int\limits_0^{2\pi}v(\vartheta, t)\sin\vartheta\,d\vartheta-\frac{\Omega}{h}=0;$$

(1.6a) $$p\left(\frac{\pi}{2}, t\right)=p_c(t),$$

где $r(\vartheta)=\operatorname{sign}(\sin\vartheta)$—функция Радемахера и, кроме того, введены единицы измерения длины l_0; напряжения $\frac{E}{1-\nu^2}$; времени $\eta\frac{1-\nu^2}{E}$, а для безразмерных величин сохранены обозначения соответствующих размерных.

Представляя давление жидкости в виде

$$p(\vartheta, t)=p_0(t)+\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty} p_n(t)\cos n\vartheta, \tag{1.8}$$

находим из (1.1а) — (1.4а), (1.6а)

$$p_0(t)=q_\infty; \tag{1.1в}$$

$$v(\vartheta, t)=l(t)\sum_{n=2}^{\infty} p_n(t)\left(\frac{\sin(n+1)\vartheta}{n+1}-\frac{\sin(n-1)\vartheta}{n-1}\right); \tag{1.2в}$$

$$\frac{4l^2(t)}{\sin\vartheta}\sum_{n=2}^{\infty} np_n\sin n\vartheta\left[\sum_{n=2}^{\infty} p_n\left(\frac{\sin(n+1)\vartheta}{n+1}-\frac{\sin(n-1)\vartheta}{n-1}\right)\right]^3+ \tag{1.3в}$$

$$+\frac{Q}{h}\,r(2\vartheta)=0,$$

$$\left(r(\vartheta)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\sin n\vartheta}{n}\right);$$

$$\pi l^2 p_2(t)+\frac{\Omega}{h}=0; \tag{1.4в}$$

$$q_\infty+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{\frac{n}{2}}p_n(t)=p_c(t). \tag{1.6в}$$

Умножая (1.3в) на $\sin n\vartheta$, интегрируя от 0 до 2π и полагая затем $n=2$, 4, 6, ..., можно получить бесконечную систему алгебраических уравнений четвертого порядка относительно коэффициентов $p_n(t)$. При заданном расходе жидкости полученные уравнения совместно с (1.4в) составляют полную систему уравнений для всех $p_n(t)$ и $l(t)$. Если задано давление нагнетания, то используется также (1.6в) и начальное условие (1.7).

Ограничимся одним слагаемым в сумме (1.8). Тогда из (1.6в) имеем $\Delta p_c(t)=p_c-q_\infty=-p_2(t)$. Из (1.3в), (1.4в) получаем

$$\frac{7}{27}\pi l^2\Delta p_c^4-\frac{Q}{h}=0; \tag{1.9}$$

$$\pi l^2\Delta p_c-\frac{\Omega}{h}=0. \tag{1.10}$$

При $t=0$ из (1.10) имеем

$$\Omega_0=\pi h\Delta p_c(0). \tag{1.11}$$

При заданном давлении из (1.9) —(1.11) находим

$$\Omega=\pi h\Delta p_c(0)\exp\frac{7}{27}\int_0^t\Delta p_c^3(t)\,dt$$

и остальные параметры процесса.

В частности, при постоянном забойном давлении имеем

$$Q = \frac{7}{27}\pi h \Delta p_c^4 \exp \frac{7}{27}\Delta p_c^3 t; \quad \Omega = \pi h \Delta p_c \exp \frac{7}{27}\Delta p_c^3 t;$$

$$l = \exp \frac{7}{54}\Delta p_c^3 t; \quad 2d_c = \frac{8}{3}\Delta p_c \exp \frac{7}{54}\Delta p_c^3 t,$$

где $2d_c$ — раскрытые трещины на забое скважины.

Все параметры увеличиваются со временем по экспоненте, показатель которой пропорционален кубу давления на забое и обратно пропорционален вязкости жидкости и квадрату модуля упругости пород.

Можно показать, что учет следующих слагаемых в сумме (1.8) приводит только к некоторому изменению числового множителя при показателе экспоненты.

При заданном расходе из (1.9), (1.10) находим

$$\Delta p_c(t) = \left(\frac{27}{7}\frac{Q}{\Omega}\right)^{\frac{1}{3}}; \quad l(t) = \left(\frac{7}{27\pi^3}\frac{\Omega^4}{Qh^3}\right)^{\frac{1}{6}},$$

где Ω определяется (1.5).

Учитывая (1.11), имеем

$$\Delta p_c(0) = \left[\frac{27}{7\pi h}Q(0)\right]^{\frac{1}{4}}.$$

При постоянном расходе для развитой трещины, когда $\Omega \gg \Omega_0$ и, следовательно, $\Omega = Qt$, получаем

$$\Delta p_c = \left(\frac{27}{7}\right)^{1/3} t^{-1/3}; \quad l = \left(\frac{7}{27\pi^3}\right)^{1/6}\left(\frac{Q}{h}\right)^{1/2} t^{2/3};$$

$$2d_c = \frac{8}{3}\left(\frac{27}{7\pi}\right)^{1/6}\left(\frac{Q}{h}\right)^{1/2} t^{1/3}.$$

При постоянном расходе давление на забое не зависит от величины расхода и уменьшается со временем по закону $t^{-1/3}$ [3]. Размеры трещины неограниченно возрастают. С увеличением модуля упругости пород и уменьшением вязкости жидкости длина трещины при прочих равных условиях увеличивается в степени 1/6. Раскрытие трещины уменьшается в такой же степени.

2. Деформация бесконечной упругой среды с плоской круговой трещиной в случае осесимметричной деформации исследовалась в [6,7]. Условие конечности напряжений, указанное в [7], представляется в виде

$$\int_0^1 \frac{p(R\rho, t)\,\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} - q_{z\infty} = 0, \quad \left(\rho = \frac{r}{R}\right), \tag{2.1}$$

где $p(r, t)$ — давление в трещине на расстоянии r от ее центра; $q_{z\infty} = -\sigma_z(\infty)$ — вертикальное давление в ненарушенном горном массиве; $R(t)$ — радиус трещины.

Для нормального перемещения берегов трещины имеем

$$v_z^+(\rho, t) = -v_z^-(\rho, t) = \frac{4(1-\nu^2)R(t)}{\pi E}\left[-q_{z\infty}\sqrt{1-\rho^2} + \int_\rho^1 \frac{\mu d\mu}{\sqrt{\mu^2-\rho^2}}\int_0^1 \frac{p(R\mu\xi, t)\,\xi d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right]. \tag{2.2}$$

Аналогично случаю вертикальной трещины получаем следующие соотношения:

$$\frac{2v_z^{+3}}{3\eta}\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{Q}{2\pi r}=0; \tag{2.3}$$

$$4\pi R^2\int_0^1 v_z^+\rho d\rho-\Omega=0; \tag{2.4}$$

$$p(0,\ t)=p_c(t). \tag{2.5}$$

При $t=0$ имеем $R(0)=R_0$ и

$$\Omega(0)=\Omega_0.$$

Введем подвижные эллиптические координаты s, μ, связанные с цилиндрическими r, z соотношениями $r=R\sqrt{1+s^2}\sqrt{1-\mu^2}$; $z=Rs\mu$. На поверхности трещины $s=0$, $r=R\sqrt{1-\mu^2}$ и значения $0\leqslant\mu\leqslant1$ соответствуют $z=+0$, а $-1\leqslant\mu\leqslant0$ — $z=-0$.

Учитывая обозначения $p(\mu,t)=p\,[R(t)\sqrt{1-\mu^2},t]$ и

$$v(\mu,t)=v_z^{\pm}\left[R(t)\sqrt{1-\mu^2},\ t\right],$$

системы(2.1) — (2.5) представляются в виде

$$-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}p(\mu,t)\,d\mu-q_{z\infty}=0; \tag{2.1а}$$

$$v(\mu,t)=\frac{4}{\pi}R(t)\left[-q_{z\infty}\mu+\int_0^{\mu}\frac{\eta d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{\mu^2-\eta^2}}\times\right.$$
$$\left.\times\int_{\eta}^{1}\frac{p(\xi,t)\,\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}}\right]; \tag{2.2а}$$

$$\frac{4\pi v^3}{3}\frac{1-\mu^2}{\mu}\frac{\partial p}{\partial\mu}-Q\,\mathrm{sign}\,\mu=0; \tag{2.3а}$$

$$2\pi R^2(t)\int_{-1}^{1}v(\mu,t)\,\mu d\mu-\Omega=0; \tag{2.4а}$$

$$p(1,\ t)=p_c(t), \tag{2.5а}$$

где, как и в случае вертикальной трещины, использованы безразмерные величины. Единицей длины вместо l_0 принято R_0.

Давление жидкости представим в виде

$$p(\mu,t)=p_c(t)+\sum_{n=2,4,\ldots}^{\infty}p_n(t)P_n(\mu), \tag{2.6}$$

где $P_n(\mu)$ — полиномы Лежандра.

Из (2.1а) находим

$$p_c(t)=q_{z\infty}. \tag{2.1в}$$

В сумме (2.6) ограничимся одним слагаемым. Тогда, учитывая (2.1в), (2.5а), имеем $\Delta p_c(t)=p_c(t) - q_{z\infty}=p_2(t)$ и из (2.2а) — (2.4а) получаем

$$v(\mu, t) = \frac{8}{3\pi} R(t)\,\Delta p_c(t)\,\mu^3; \tag{2.2в}$$

$$\frac{2^{11}}{3^3\pi^3} R^3 \Delta p_c^4 (1-\mu^2)\,\mu^9 - Q\,\mathrm{sign}\,\mu = 0, \tag{2.3в}$$

$$\left(\mathrm{sign}\,\mu = \frac{3}{2} P_1(\mu) - \frac{7}{8} P_3(\mu) + \ldots\right);$$

$$\beta R^3 \Delta p_c - \Omega = 0, \quad \left(\beta = \frac{2^5}{3\cdot 5} \approx 2{,}13\right). \tag{2.4в}$$

Умножая (2.3в) на $P_1(\mu)=\mu$ и интегрируя от — 1 до +1, находим

$$\alpha R^3 \Delta p_c^4 - Q = 0, \quad \left(\alpha = \frac{2^{13}}{9\cdot 11\cdot 13\pi^3} \approx 0{,}208\right). \tag{2.7}$$

При постоянном забойном давлении из (2.4в), (2.7) находим

$$Q = \alpha \Delta p_c^4 \exp \frac{\alpha}{\beta} \Delta p_c^3 t; \quad \Omega = \beta \Delta p_c \exp \frac{\alpha}{\beta} \Delta p_c^3 t;$$

$$R = \exp \frac{\alpha}{3\beta} \Delta p_c^3 t; \quad 2d_c = \frac{16}{3\pi} \Delta p_c \exp \frac{\alpha}{3\beta} \Delta p_c^3 t.$$

Развитие горизонтальной круговой трещины имеет такой же характер, как развитие вертикальной трещины.

При постоянном расходе для развитой трещины имеем

$$\Delta p_c = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/3} t^{-1/3}; \quad R = \left(\frac{\alpha}{\beta^4}\right)^{1/9} Q^{1/3} t^{4/9};$$

$$2d_c = \frac{16}{3\pi} (\alpha^2\beta)^{-1/9} Q^{1/3} t^{1/9}.$$

Аналогично случаю вертикальной трещины давление на забое не зависит от расхода и уменьшается со временем по закону $t^{-1/3}$. Радиус трещины с увеличением модуля упругости пород и уменьшением вязкости жидкости увеличивается в степени 1/9. Раскрытие трещины уменьшается в степени 2/9.

3. Оценим характерные параметры процесса развития трещин при $E=10^5$ кгс/см^2, $\nu=0{,}2$ и $\eta=1$ сП. Положим, что вначале развитие трещины происходит при постоянном давлении $\Delta p_c=10$ кгс/см^2 до некоторого момента времени t_1, когда достигается максимальная производительность насоса 6 м^3/мин. Затем в течение 5 мин в трещину закачивается 30 м^3 жидкости при постоянном расходе $Q=6$м^3/мин.

В случае вертикальной трещины примем $h=10$ м, $l_0=10$ см. Тогда находим $t_1=3{,}1$ с, а к моменту окончания процесса получим $l=297$ м, $2d_c=0{,}86$ см, $\Delta p_c=1{,}12$ кгс/см^2.

Для горизонтальной трещины при $R_0=10$ см находим $t_1=15{,}3$ с и к окончанию процесса закачки $R=101$ м, $2d_c=0{,}251$ см, $\Delta p_c=1{,}56$ кгс/см^2.

Поступила 7 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Howard G. C., Fast C. R.* Hydraulic fracturing. N. Y.— Dallas, AIME, 1970, p. 210.
2. *Губанов Б. Ф., Желтов Ю. П., Шовкринский Г. Ю.* Физические основы интенсификации разработки нефтяных месторождений и увеличения их нефтеотдачи при повышенных давлениях нагнетания. Ежегодник ВНИИ. М. «Недра», 1971, с. 236—245.
3. *Христианович С. А., Желтов Ю. П.* Образование вертикальных трещин при помощи очень вязкой жидкости. М., Изд-во АН СССР, 1955, с. 33.
4. *Желтов Ю. В., Желтов Ю. П.* О распространении горизонтальной трещины в горной породе под воздействием нефильтрующейся жидкости в случае постоянного горного давления.— «Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение», 1959, № 5, с. 166—169.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966, с. 707.
6. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. М., ИЛ, 1955.
7. *Баренблатт Г. И.* О некоторых задачах теории упругости, возникающих при исследовании механизма гидравлического разрыва нефтеносного пласта. — ПММ, 1956, т. 20, № 4, с. 475—486.

УДК 532.5:532.135

КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛООБМЕН ПРИ СТРУКТУРНОМ ТЕЧЕНИИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ, РЕОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОТОРОЙ ЗАВИСЯТ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

В. Е. Первушин

(*Москва*)

Исследуется теплообмен в вязкопластичной жидкости, движущейся в круглой трубе, с учетом зависимости пластичной вязкости и предельного напряжения сдвига от температуры. Система уравнений движения, энергии и неразрывности, преобразованная в предположении, что числа Pe, Pr $\gg 1$, решается на ЭЦВМ методом конечных разностей с использованием итераций. Подробно анализируются результаты численных решений для экспоненциального вида зависимостей реологических характеристик от температуры. Сопоставление численных решений с известными теоретическими решениями в частных случаях, а также с экспериментальными данными свидетельствует об их высокой точности.

Известны многочисленные теоретические решения задачи о конвективном теплопереносе в ньютоновских и неньютоновских жидкостях, выполненные в предположении постоянства свойств жидкости [1-7].

В последнее время все большее внимание привлекает вопрос об учете влияния на течение и теплоотдачу температурной зависимости реологических характеристик жидкости. Этот вопрос исследован на примере ньютоновской [2,8] и неньютоновской жидкостей со степенным реологическим уравнением [9-11]. В недавно опубликованных работах [12,13] рассмотрена задача о конвективном теплообмене в жидкости, подчиняющейся реологическому уравнению Бакли — Гершеля. В [12] предполагается, что предельное напряжение сдвига постоянно, а консистенция зависит от температуры по гиперболическому закону, радиальный конвективный теплоперенос пренебрежимо мал. Работа [13] свободна