

**ПЛОСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ В ХОРОШО
СМАЗАННОМ ДЛИННОМ КАНАЛЕ**

О. Д. Григорьев

(Новосибирск)

Рассматривается течение в сходящемся длинном идеально гладком канале. Построение профилей канала и определение параметров течения сведено к хорошо табулированному интегралу вероятности в комплексной плоскости [1, 2].

На выходе из канала как скорости, так и напряжения параллельны оси канала. Это позволяет здесь при узком выходном отверстии приближенно удовлетворять граничным условиям.

Уравнения плоского течения жестко-пластического тела в случае совпадения линий тока с траекториями большего главного напряжения имеют вид [3, 4]

$$\frac{\partial \sigma}{\partial q_1} + 2k \frac{\partial \ln H_2}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial q_2} - 2k \frac{\partial \ln H_1}{\partial q_2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_2} \ln \frac{H_1 H_2}{f(q_2)} = 0, \quad v = \frac{f(q_2)}{H_2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right) = 0 \quad (3)$$

Здесь q_1, q_2 — криволинейные ортогональные координаты в виде линий тока и ортогональных к ним траекторий; H_1, H_2 — коэффициенты Ламе; $\sigma = 1/2 (\sigma_1 + \sigma_2)$ — среднее нормальное напряжение; v — величина скорости; $f(q_2)$ — некоторая функция, совместная с написанными уравнениями, k — предел текучести.

Можно легко проверить, что системе (1)–(3) удовлетворяет следующая сетка координат [3]:

$$H_1 = H_2 = H = \exp \left(\frac{nq_2^2}{4} - \frac{nq_1^2}{4} \right) \quad (4)$$

При этом параметры течения согласно (1)–(2) определяются соотношениями

$$\sigma = \frac{kn}{2} (q_1^2 + q_2^2) + c_1 \quad (c_i = \text{const}) \quad (5)$$

$$f(q_2) = \exp \left(\frac{nq_2^2}{2} + c_2 \right), \quad v = \exp \left(\frac{nq_1^2}{4} + \frac{nq_2^2}{4} + c_2 \right) \quad (6)$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{matrix} \right\} = \frac{kn}{2} (q_1^2 + q_2^2) + c_1 \pm k \quad (7)$$

где σ_{11}, σ_{22} — компоненты тензора напряжения в рассматриваемой системе координат. Соотношения (5)–(7) будут иметь физический смысл лишь в том случае, если мощность рассеивания будет всюду положительна, т. е. при условии

$$\sigma_{11} \xi_{11} + \sigma_{22} \xi_{22} \geq 0 \quad (8)$$

Здесь ξ_{ii} — компоненты тензора скоростей деформации, равные

$$\xi_{11} = -\xi_{22} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial v}{\partial q_1} \quad (9)$$

Отсюда согласно (6), (4), (7), (8) получим

$$nq_1 \geq 0 \quad (10)$$

т. е. всюду в пластической области должны выполняться неравенства

$$n > 0, \quad q_1 \geq 0 \quad \text{или} \quad n < 0, \quad q_1 < 0 \quad (11)$$

В дальнейшем всюду будем предполагать, что $n < 0$. Покажем теперь, что поле линий тока (4) осесимметрично и найдем его отображение на плоскость xy . Для этого прежде всего найдем угол α между касательной к линии тока и некоторым фиксированным направлением. В силу известных соотношений

$$\frac{\partial \alpha}{\partial q_1} = \frac{\partial \ln H}{\partial q_2} = -\frac{nq_2}{2}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial q_2} = \frac{\partial \ln H}{\partial q_1} = -\frac{nq_1}{2} \quad (12)$$

получим

$$\alpha = -\frac{nq_1 q_2}{2} + c \quad (13)$$

Таким образом, сетка координат (4) содержит пару взаимно ортогональных прямых.

Примем линию тока $q_2 = 0$ за ось x и линию $q_1 = 0$ — за ось y , т. е. положим

$$\alpha = -\frac{nq_1q_2}{2} \tag{14}$$

Вдоль линий тока справедливы соотношения

$$dx = \cos \alpha ds_1, \quad dy = \sin \alpha ds_1, \quad ds_1 = H dq_1 \tag{15}$$

где ds_1 — элемент дуги. В силу четности и нечетности согласно (4) и (14) для функций (15) получим

Таблица

q_1	$n = -1$		$n = -4$	
	x	$\pm y$	x	$\pm y$
0.000	0.000	0.119	0.000	0.119
-0.120	0.120	0.120	0.119	0.121
-0.240	0.240	0.122	0.241	0.126
-0.360	0.363	0.124	0.370	0.135
-0.480	0.488	0.127	0.511	0.150
-0.600	0.616	0.131	0.668	0.171
-0.720	0.749	0.136	0.849	0.200
-0.840	0.888	0.143	1.061	0.241
-0.960	1.035	0.151	1.324	0.297

$$\begin{aligned} x(q_1, q_2) &= x(q_1, -q_2) \\ y(q_1, q_2) &= -y(q_1, -q_2) \end{aligned} \tag{16}$$

т. е. линии тока симметричны относительно оси x . Аналогично можно показать, что ортогональные к линиям тока траектории симметричны относительно оси y . Очевидно, любую симметричную пару линий тока можно принять за профиль хорошо смазанного канала. При этом если выходное отверстие канала ограничить осью y ($q_1 = 0$), то как скорости, так и напряжения на выходе из канала будут параллельны оси последнего.

Пусть вдоль линий тока выполняется соотношение $z = x + iy$, тогда согласно (4), (14), (15) будем иметь

$$dz = e^{i\alpha} ds_1 = \exp(Bq_1 + iBq_2)^2 dq_1 \quad (B = \sqrt{|n|}/2) \tag{17}$$

$$z = \int_0^{q_1} \exp(Bq_1 + iBq_2)^2 dq_1 + ic_2 + c_1 \tag{18}$$

При $q_1 = 0, x = 0, c_1 = 0$

$$y(q_1 = 0) = c_2 = \int_0^{q_2} H(q_1 = 0) dq_2 = \int_0^{q_2} \exp(iBq_2)^2 dq_2 \tag{19}$$

Отсюда

$$z = \int_0^{q_1} \exp(Bq_1 + iBq_2)^2 dq_1 + i \int_0^{q_2} \exp(iBq_2)^2 dq_2 \tag{20}$$

Интеграл (20) можно представить в виде

$$z = \int_{\xi_1=iq_2}^{\xi_2=q_1+iq_2} \exp(B\xi)^2 d\xi + \int_{\xi=0}^{\xi_1=iq_2} \exp(B\xi)^2 d\xi \tag{21}$$

или

$$z = \int_0^{\xi_2=q_1+iq_2} \exp(B\xi)^2 d\xi = \frac{1}{B} \int_0^{B(q_1+iq_2)} \exp(t^2) dt \tag{22}$$

Таким образом, определение параметров течения (в том числе и профилей канала) свелось к вычислению табулированного интеграла вероятности в комплексной области [1, 2].

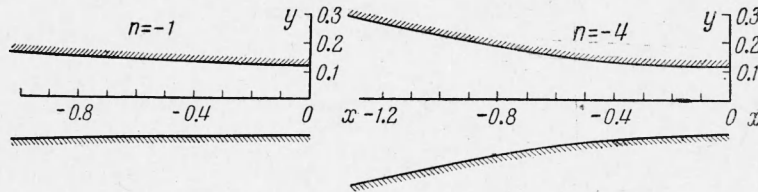
Равнодействующая сил выдавливания (волочения) вдоль любой ортогональной к линиям тока траектории ($q_1 = \text{const}$) согласно (7), (14) будет равна

$$p = \int_{-q_2}^{q_2} \sigma_{11} \cos \alpha H dq_2 = \int_{-q_2}^{q_2} \left[\frac{kn}{2} (q_1^2 + q_2^2) + c_1 + k \right] \cos\left(\frac{nq_1q_2}{2}\right) \exp\left(\frac{nq_2^2}{2} - \frac{nq_1^2}{2}\right) dq_2 \tag{23}$$

На фигуре показаны профили канала, построенные при помощи [1] для

$$n = -1, \quad n = -4, \quad q_2 = \pm 0.12, \quad -0.96 \leq q_1 \leq 0$$

Для этих данных приводится также таблица координат профилей, которая



позволяет посредством (6), (7) найти контактные напряжения и скорости.

Поступила 5 VI 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Фаддеева В. Н., Терентьев Н. М. Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. Гостехиздат, 1954.
2. Карпов К. А. Таблицы функций $w(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{x^2} dx$. Изд. АН СССР, 1958.
3. Григорьев О. Д. К теории плоской деформации жестко-пластического тела. ПММ, 1961, т. 24, вып. 5.
4. Григорьев О. Д. О некоторых классах плоского течения жестко-пластического тела. ПМТФ, 1961, № 6.

ПЛАСТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПРИ ФОРМОИЗМЕНЕНИИ ЛИСТА ПРИ ПОМОЩИ ВАЛКОВ

Б. А. Друянов

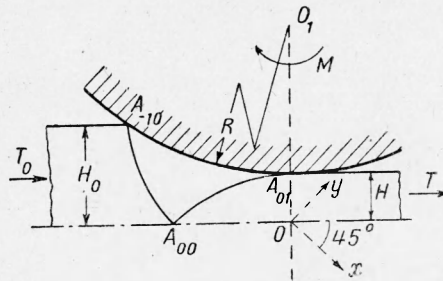
(Москва)

Процесс формоизменения листа при помощи шероховатых валков, частным случаем которого является прокатка, имеет определенное сходство с процессом сжатия листа шероховатыми плитами. Действительно, в обоих случаях касательные напряжения на линии контакта меняют знак, т. е. на линии контакта имеются зоны, где металл прилипает к инструменту и где скользит вдоль него. Однако если задача о сжатии листа неоднократно рассматривалась [1-3] и для нее в рамках теории плоского течения жестко идеально пластических тел построены решения, то для задачи о формоизменении листа при помощи валков такие решения отсутствуют. Это объясняется, конечно, кривизной контактной линии и невозможностью применения вследствие этого интегралов уравнений теории плоской деформации идеально пластических тел. Построение решений для задачи о формоизменении листа при помощи валков может быть выполнено применением метода решения статически неопределимых задач [4].

Для задачи о сжатии листа наиболее простое решение получается в случае, когда толщина листа равна ширине плит. В этом случае пластические области состоят из двух жестких треугольников. В следующем пункте аналогичное решение строится для рассматриваемой задачи.

1. Пусть лист из идеально пластического материала деформируется, проходя через шероховатые валки (фиг. 1). Примем, что силы трения на линии контакта $A_{-10} A_{01}$ могут достигать величины k — предела текучести материала листа на сдвиг. На участке линии контакта, где это имеет место, материал листа может скользить вдоль линии контакта. На участке, где силы трения меньше k , имеет место прилипание.

Пусть пластическая область (фиг. 1) состоит из криволинейного треугольника $A_{-10} A_{01} A_{00}$. Предположим, что на всей дуге $A_{-10} A_{01}$ имеется прилипание, т. е. задана скорость. Для определения скоростей в области $A_{-10} A_{01} A_{00}$ следует решить задачу Ко-



Фиг. 1