

ние вещества при этом приближается к состоянию упругого сжатия. Кривая $p(\rho/\rho_0)$ имеет выпуклость к оси ρ/ρ_0 (фиг. 2) в соответствии с характером размытия профиля в этом диапазоне ее интенсивностей.

В настоящее время еще нет надежного описания поведения пористого вещества при его динамическом сжатии до плотности, меньшей плотности монокристалла. Поэтому результаты динамических измерений сравнивались с данными по статической деформации образцов. Наблюдается сильное различие динамической и статической кривых сжатия в области напряжений, где вещество сохраняет пористость. Схлопывание пор вещества при этих процессах происходит соответственно при 9 и 3 кбар. Рассчитанная общепринятыми методами кривая ударного сжатия по статической кривой практически совпадает с последней. Вещество при этом не нагревается. Поэтому рассчитанные высокие температуры по измеренной динамической кривой (табл.), видимо, связаны с разогревом за счет трения при раздавливании зерен вещества и их пластического течения в поры. В этом случае также можно ожидать влияния времени нагружения на процесс деформации образцов, что, видимо, и влияет на различие между $P(\rho/\rho_0)$ кривыми при динамическом нагружении короткими и длинными волнами и кривой статической деформации.

Авторы благодарят А. А. Игнатова за помощь в работе, Л. Д. Лившица за данные статических экспериментов, Г. П. Демидюка за предоставленную возможность работы на ультразвуковой установке.

Поступила 15 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Белинский И. В., Христофоров Б. Д. Вязкость NaCl при ударном сжатии. ПМТФ, 1968, № 1.
2. Белинский И. В., Христофоров Б. Д. О затухании в алюминии плоских ударных волн, вызванных ударом. ПМТФ, 1967, № 3.
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
4. Алдер Б. Физические эксперименты с сильными ударными волнами. В кн.: «Твердые тела под высоким давлением», М., «Мир», 1966.
5. Альтшулер Л. В., Кулешова Л. В., Павловский М. Н. Динамическая сжимаемость, уравнение состояния и электропроводность хлористого натрия при высоких давлениях. ЖЭТФ, 1960, т. 39, вып. 1 (7).
6. Физическая акустика. М., «Мир», 1968.
7. Bridgman P. W. The compression of 46 substances to 50000 kg/cm². Proc. Amer. Acad. Arts. Sci., 1940, vol. 74, No. 3.
8. Thouvenin I. Effect of a Shock Wave on a Porous Solid. Proc. 4-th. Sympos. (Internat.) Detonat. White Oak. Md., 1965, Washington, 1967, pp. 258—265.
9. Баум Ф. А., Станюкович К. П., Шехтер Б. И. Физика взрыва. М., Физматгиз, 1959.

ОБ ИНФИЛЬТРАЦИИ НА ПОЛОСЕ ПРИ НАКЛОННОМ ВОДОУПОРЕ

И. И. Кулабухова

(Ташкент)

Изучается влияние инфильтрации, действующей на полосу, на уровень грунтовых вод при принятых схемах неограниченного и полуограниченного одномерного потока, когда грунт однородный и водоупор имеет малый уклон.

В однородном грунте с малым уклоном водоупора i рассматривается неограниченный равномерный поток с нормальной глубиной h_0 , на который с некоторого момента времени $t = 0$ накладывается инфильтрация интенсивности ε_0 , действующая на полосу, перпендикулярной направлению потока. Ставится задача об определении величины подпора грунтовых вод, вызванного этой инфильтрацией. Предполагая одномерность потока, можно написать уравнение Буссинеска относительно напора H [1].

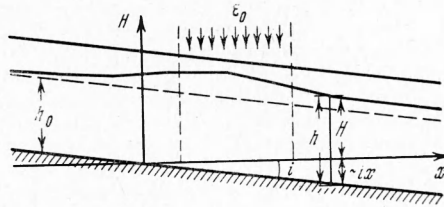
$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left[(H + ix) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\varepsilon(x)}{\mu} \quad (1)$$

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_0 = \text{const} \quad (x_1 \leq x \leq x_2)$$

$$\varepsilon(x) = 0 \quad (x < x_1, x > x_2)$$

Здесь k — коэффициент фильтрации, μ — свободная пористость, x — горизонтальная координата.

Впервые одномерная безнапорная фильтрация при наклонном водоупоре изучалась П. Я. Полубариновой — Кочиной [1]. В отличие от рассмотренных в [1] задач в данной работе учитывается инфильтрация на полосе и несколько иначе проводится линеаризация уравнения (1).



Связь между напором и глубиной потока h выражается так:

$$h = H + ix$$

Переход в уравнении (1) от H к h и последующая линеаризация его приводят к уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{kh'}{\mu} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \frac{ik}{\mu} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\varepsilon(x)}{\mu}$$

(h' — осредненная глубина потока)
которое в результате преобразования

$$\tau = \frac{kh'}{\mu} t, \quad 2\alpha = \frac{i}{h'}, \quad w = \frac{\varepsilon(x)}{kh'}, \quad w_0 = \frac{\varepsilon_0}{kh'} \quad (2)$$

$$u(x, \tau) = [h(x, \tau) - h_0] \exp(-\alpha x + \alpha^2 \tau)$$

принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + w \exp(-\alpha x + \alpha^2 \tau) \quad (3)$$

Найдем решение уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $u(x, 0) = 0$. Вид этого решения в квадратурах, как известно [2], следующий:

$$u(x, \tau) = \int_0^\tau \int_{x_1}^{x_2} \frac{w_0 \exp(-\alpha \xi + \alpha^2 \tau_1)}{2 \sqrt{\pi(\tau - \tau_1)}} \exp \frac{-(\xi - x)^2}{4(\tau - \tau_1)} d\xi d\tau_1$$

или, что то же самое

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \frac{w_0}{2 \sqrt{\pi}} \exp(-\alpha x + \alpha^2 \tau) \int_0^\tau \frac{d\tau_1}{\sqrt{\tau - \tau_1}} \int_{x_1}^{x_2} \exp \frac{-[\xi - x + 2\alpha(\tau - \tau_1)]^2}{4(\tau - \tau_1)} d\xi = \\ &= \frac{w_0}{2} \exp(-\alpha x + \alpha^2 \tau) \int_0^\tau \left[\operatorname{erf} \frac{x_2 - x + 2\alpha(\tau - \tau_1)}{2 \sqrt{\tau - \tau_1}} - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{erf} \frac{x_1 - x + 2\alpha(\tau - \tau_1)}{2 \sqrt{\tau - \tau_1}} \right] d\tau_1 \quad (4) \end{aligned}$$

Результат [вычисления] интеграла

$$I = \int_0^\tau \operatorname{erf} \frac{x_i - x + 2\alpha(\tau - \tau_1)}{2 \sqrt{\tau - \tau_1}} d\tau_1$$

запишем следующим образом:

при $x_i - x > 0$

$$I = I_{1,i} = \tau - u_i \operatorname{erfc} p_i - a \exp(-v_i) \operatorname{erfc} p_i^* + b \exp(-p_i^2)$$

при $x_i - x < 0$

$$I = I_{2,i} = -\tau + u_i \operatorname{erfc}(-p_i) + a \exp(-v_i) \operatorname{erfc}(-p_i^*) + b \exp(-p_i^2) \quad (5)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$u_i = \frac{h'}{i^2} \left[\frac{ki^2 t}{\mu} - h' + i(x_i - x) \right]$$

$$p_i = \frac{1}{K \sqrt{t}} \left(x_i - x + \frac{ikt}{\mu} \right), \quad p_i^* = \frac{1}{K \sqrt{t}} \left(x_i - x - \frac{ikt}{\mu} \right)$$

$$a = \left(\frac{h'}{i} \right)^2, \quad v_i = \frac{i(x_i - x)}{h'}, \quad b = \frac{Kh' \sqrt{t}}{i \sqrt{\pi}}$$

$$K = 2 \left(\frac{kh'}{\mu} \right)^{1/2}$$

Теперь, имея в виду (2), (4) и (5), определяем подпор $\Delta h = h - h_0$ на различных участках изменения x

$$\begin{aligned} x \leq x_1, \quad \Delta h &= 1/2 w_0 (I_{1,2} - I_{1,1}) \\ x_1 \leq x \leq x_2, \quad \Delta h &= 1/2 w_0 (I_{1,2} - I_{2,1}) \\ x > x_2, \quad \Delta h &= 1/2 w_0 (I_{2,2} - I_{2,1}) \end{aligned} \quad (6)$$

Устремив t к ∞ , замечаем, что кривая депрессии стремится к некоторому предельному положению всюду, кроме области, бесконечно удаленной вниз по потоку ($x \rightarrow \infty$), где продолжается неустановившийся процесс.

Уравнения (6) при $t \rightarrow \infty$ принимают вид

$$\begin{aligned} x \leq x_1, \quad \Delta h &= \frac{\varepsilon_0 h'}{ki^2} \left[\exp \frac{-i(x_1 - x)}{h'} - \exp \frac{-i(x_2 - x)}{h'} \right] \\ x_1 \leq x \leq x_2, \quad \Delta h &= \frac{\varepsilon_0 h'}{ki^2} \left[1 - \exp \frac{-i(x_2 - x)}{h'} + \frac{i}{h'} (x - x_1) \right] \\ x \geq x_2, \quad \Delta h &= \frac{\varepsilon_0}{2ki} (x_2 - x_1) \operatorname{erfc} \frac{x - 2\alpha\tau}{2 \sqrt{\tau}} \end{aligned} \quad (7)$$

Если в (7) $x \ll 2\alpha\tau$, то

$$\operatorname{erfc} \frac{x - 2\alpha\tau}{2 \sqrt{\tau}} \approx 2, \quad \Delta h = \frac{\varepsilon_0}{ki} (x_2 - x_1)$$

Расход при этих значениях x равен

$$[Q = -k \frac{\partial H}{\partial x} h = kih_0 + \varepsilon_0 (x_2 - x_1)]$$

По сравнению с первоначальным расходом он изменился на величину суммарной инфильтрации $\varepsilon_0(x_2 - x_1)$.

Введем новую переменную

$$\xi = \frac{x - 2\alpha\tau}{2 \sqrt{\tau}}$$

Тогда равенство (7) примет вид

$$\Delta h = \frac{\varepsilon_0 (x_2 - x_1)}{2ki} \operatorname{erfc} \xi$$

причем ξ может принимать любые значения. Полагая $\xi = c$, получаем систему

$$\frac{x - 2\alpha\tau}{2 \sqrt{\tau}} = C$$

которая представляет собой движущиеся вдоль оси x сечения, несущие на себе постоянные значения глубины потока. С геометрической стороны это — семейство кривых в плоскости (x, τ) обладающих тем свойством, что вдоль каждой из них сохраняется постоянное значение функции $h(x, \tau)$. Нетрудно определить скорость перемещения указанных сечений

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{ik}{\mu} + c \left(\frac{kh'}{\mu t} \right)^{1/2} \approx \frac{ik}{\mu}$$

Перейдем к рассмотрению подпора в полуограниченном пласте, возникающего под влиянием инфильтрации на полосу.

Постановка задачи отличается от только что рассмотренной тем, то решение уравнения (1) должно удовлетворять не только начальному, но и граничному условию, которое выбираем следующим: $h(0, t) = h_0$.

При переходе же к функции $u(x, \tau)$ имеем уравнение (3), которое можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \delta(x, \tau)$$

и два условия

$$u(x, 0) = 0 \quad (8)$$

$$u(0, \tau) = 0 \quad (9)$$

Область определения $u(x, \tau)$ продолжим и на другую полуось x , причем считаем, что и на ней выполняется условие (8). На этой дополнительной области определения $\delta(x, \tau)$ подбираем таким образом, чтобы удовлетворялось условие (9). Это будет достигнуто, если положить

$$\delta(x, \tau) = \begin{cases} w_0 \exp(-\alpha x + \alpha^2 \tau), & x_1 \leq x \leq x_2 \\ -w_0 \exp(\alpha x + \alpha^2 \tau), & -x_2 \leq x \leq -x_1 \\ 0, & x \in [x_1, x_2], \\ & x \in [-x_2, -x_1] \end{cases}$$

Таким образом, задача исследования картины фильтрации в полуограниченном пласте приведена к изучению течения в неограниченном пласте, причем в рассматриваемой области эти течения совпадают.

В интегральной форме решение задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \int_0^\tau \left[\int_{x_1}^{x_2} \frac{w_0 \exp(-\alpha \xi + \alpha^2 \tau_1)}{2 \sqrt{\pi(\tau - \tau_1)}} \exp \frac{-(\xi - x)^2}{4(\tau - \tau_1)} d\xi - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-x_2}^{-x_1} \frac{w_0 \exp(\alpha \xi + \alpha^2 \tau_1)}{2 \sqrt{\pi(\tau - \tau_1)}} \exp \frac{-(\xi - x)^2}{4(\tau - \tau_1)} d\xi \right] d\tau_1 = \\ &= \frac{1}{2} w_0 e^{\alpha^2 \tau} \left\{ e^{-\alpha x} \int_0^\tau \left[\operatorname{erf} \frac{x_2 - x + 2\alpha(\tau - \tau_1)}{2 \sqrt{\tau - \tau_1}} - \operatorname{erf} \frac{x_1 - x + 2\alpha(\tau - \tau_1)}{2 \sqrt{\tau - \tau_1}} \right] d\tau_1 + \right. \\ &\quad \left. + e^{\alpha x} \int_0^\tau \left[\operatorname{erf} \frac{-x_2 - x - 2\alpha(\tau - \tau_1)}{2 \sqrt{\tau - \tau_1}} - \operatorname{erf} \frac{-x_1 - x - 2\alpha(\tau - \tau_1)}{2 \sqrt{\tau - \tau_1}} \right] d\tau_1 \right\} \end{aligned}$$

В результате вычисления интеграла

$$J = \int_0^\tau \operatorname{erf} \frac{x_i - x - 2\alpha(\tau - \tau_1)}{2 \sqrt{\tau - \tau_1}} d\tau_1$$

получим

при $x_i - x \geq 0$

$$J = J_{1,i} = \tau - u_i^* \operatorname{erfc} p_{1,i}^* - a \exp v_i \operatorname{erfc} p_i - b \exp(-p_i^{*2})$$

при $x_i - x \leq 0$

$$J = J_{2,i} = -\tau + u_i^* \operatorname{erfc}(-p_{1,i}^*) + a \exp v_i \operatorname{erfc}(-p_i) - b \exp(-p_i^{*2})$$

Здесь

$$u_i^* = \frac{h'}{i^2} \left[\frac{ki^2 t}{\mu} - h' - i(\tau_i - x) \right]$$

Выпишем уравнения подпора. Могут представиться два случая: а) поток ограничен сверху ($0 \leq x \leq \infty$), б) поток ограничен снизу ($-\infty < x \leq 0$)

а) $x_1, x_2 > 0, x_3 = -x_1 < 0, x_4 = -x_2 < 0$

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq x_1, \quad \Delta h &= \frac{1}{2} w_0 [I_{1,2} - I_{1,1} + \exp(2\alpha x) (J_{2,4} - J_{2,3})] \\ x_1 \leq x \leq x_2, \quad \Delta h &= \frac{1}{2} w_0 [I_{1,2} - I_{2,1} + \exp(2\alpha x) (J_{2,4} - J_{2,3})] \\ x \geq x_2, \quad \Delta h &= \frac{1}{2} w_0 [I_{2,2} - I_{2,1} + \exp(2\alpha x) (J_{2,4} - J_{2,3})] \end{aligned} \quad (10)$$

При $t \rightarrow \infty$ уравнения (10) переписываются следующим образом: $0 \leq x \leq x_1$

$$\begin{aligned} \Delta h &= \frac{\varepsilon_0 h'}{k i^2} \left(\exp \frac{i x}{h'} - 1 \right) \left(\exp \frac{-i x_1}{h'} - \exp \frac{-i x_2}{h'} \right) \\ &\quad x_1 \leq x \leq x_2 \\ \Delta h &= \frac{\varepsilon_0 h'}{k i^2} \left[1 - \exp \frac{-i(x_2 - x)}{h'} + \frac{i(x - x_1)}{h'} + \exp \frac{-i x_2}{h'} - \exp \frac{-i x_1}{h'} \right] \\ &\quad x \geq x_2 \\ \Delta h &= \frac{\varepsilon_0}{2 k i} (x_2 - x_1) \operatorname{erfc} \frac{x - 2\alpha x}{2 \sqrt{\tau}} + \frac{\varepsilon_0 h'}{k i^2} \left(\exp \frac{-i x_2}{h'} - \exp \frac{-i x_1}{h'} \right) \end{aligned}$$

б) $x_1, x_2 < 0, x_3 = -x_1 > 0, x_4 = -x_2 > 0$

$$\begin{aligned} -\infty < x \leq x_1, \quad \Delta h &= \frac{1}{2} w_0 [I_{1,2} - I_{1,1} + \exp(2\alpha x) (J_{1,4} - J_{1,3})] \\ x_1 \leq x \leq x_2, \quad \Delta h &= \frac{1}{2} w_0 [I_{1,2} - I_{2,1} + \exp(2\alpha x) (J_{1,4} - J_{1,3})] \\ x_2 \leq x \leq 0, \quad \Delta h &= \frac{w_0}{2} [I_{2,2} - I_{2,1} + \exp(2\alpha x) (J_{1,4} - J_{1,3})] \end{aligned}$$

При $t \rightarrow \infty$ получим выражения для предельного значения подпора

$$\begin{aligned} -\infty < x \leq x_1 \\ \Delta h &= \frac{\varepsilon_0 h'}{k i^2} \exp \frac{i x}{h'} \left[\exp \frac{-i x_1}{h'} - \exp \frac{-i x_2}{h'} - \frac{i(x_2 - x_1)}{h'} \right] \\ &\quad x_1 \leq x \leq x_2 \\ \Delta h &= \frac{\varepsilon_0 h'}{k i^2} \left[1 - \exp \frac{-i(x_2 - x)}{h'} - \frac{i(x_1 - x)}{h'} \right] - \frac{\varepsilon_0 (x_2 - x_1)}{k i} \exp \frac{i x}{h'} \\ &\quad x_2 \leq x \leq 0 \\ \Delta h &= \frac{\varepsilon_0 h'}{k i} (x_2 - x_1) \left(1 - \exp \frac{i x}{h'} \right) \end{aligned}$$

Линейность исходного уравнения позволяет при помощи полученных решений определить подпор при задании инфильтрации на полосе как кусочно-постоянной функции времени, а также учесть влияние инфильтрации на поток нескольких инфильтрационных полос.

Поступила 5 IX 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова - Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехтеоретиздат, 1952.
2. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М., Физматгиз, 1962.