

УДК 519.6

Использование кусочно-параболического метода на локальном шаблоне для конструирования схемы с малой диссипацией численного решения для моделирования течений релятивистской гидродинамики*

И.М. Куликов

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mail: kulikov@ssd.ssrn

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 13, 2020.

Куликов И.М. Использование кусочно-параболического метода на локальном шаблоне для конструирования схемы с малой диссипацией численного решения для моделирования течений релятивистской гидродинамики // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2020. — Т. 23, № 2. — С. 143–154.

В статье представлен новый численный метод с малой диссипацией решения, основанный на комбинации метода Годунова и кусочно-параболического метода на локальном шаблоне. Подробно описана конструкция численного метода, приведено тестирование метода на одномерной задаче о распаде разрыва. В работе приведены результаты численного моделирования столкновения двух релятивистских газовых сфер.

DOI: 10.15372/SJNM20200200203

Ключевые слова: математическое моделирование, кусочно-параболический метод на локальном шаблоне, релятивистская гидродинамика.

Kulikov I.M. The use of the piecewise parabolic method on a local stencil for constructing a low dissipation of a numerical solution scheme for mathematical modeling of special relativistic hydrodynamic flows // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2020. — Vol. 23, № 2. — P. 143–154.

In this paper a new numerical method with a low-dissipation of a numerical solution, based on a combination of the Godunov method with the Roe scheme, and a piecewise parabolic method on a local stencil is described. The construction of the numerical method is described in considerable detail, the method is validated on the one-dimensional Riemann problem. The results of the numerical simulation of the collision of two relativistic gas spheres are presented.

Keywords: numerical modeling, numerical methods of high accuracy order, special relativistic hydrodynamics.

1. Введение

Многие астрофизические явления связаны с движением газа на релятивистских скоростях. Источником таких течений являются активные галактические ядра, микроква-

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18-11-00044).

зары, пульсары, гамма-всплески, черные дыры, нейтронные звезды и гравитационные волны. Для изучения таких явлений необходимо моделирование в рамках специальной релятивистской гидродинамики (см. обзор [1]).

В настоящее время для решения уравнений релятивистской гидродинамики активно используются разрывный метод Галеркина [2] и ADER-WENO схема [3]. Одним из ограничений этих подходов является использование некомпактного шаблона вычислений, что затрудняет использование параллельных вычислений из-за большого числа слоев перекрытий подобластей при геометрической декомпозиции вычислений. Аналогичная проблема имеет место и в кусочно-параболическом методе (PPM) [4]. В связи с этим была разработана модификация метода PPM — кусочно-параболический метод на локальном шаблоне (PPML) для уравнений гидродинамики [5] и уравнений магнитной гидродинамики [6]. Метод был расширен на использование его в рамках метода разделения операторов [7]. В настоящей статье будет изложено расширение PPML метода на решение уравнений специальной релятивистской гидродинамики.

На основе разработанных численных методов был разработан ряд кодов для моделирования релятивистских астрофизических течений.

SAFE [8]. Код предназначен для решения задач релятивистской идеальной магнитной газовой динамики. В основе программного комплекса используется WENO схема пятого порядка точности с методом решения задачи Римана HLLC. Для обеспечения бездивергентности магнитного поля используется теорема Стокса аналогично подходу, реализованному в коде ATHENA [9].

RAM [10]. Код предназначен для решения задач специальной релятивистской гидродинамики. В основе кода используется схемы WENO и PPM на адаптивных сетках (AMR). В работе описано подробное тестирование кода и приведены уравнения специальной релятивистской гидродинамики в цилиндрических и сферических координатах.

PLUTO [11]. Код предназначен для всех астрофизических течений, в том числе и для релятивистских. Решатель основан на комбинации HLL и PPM методов. В статье также подробно описано тестирование кода.

Во втором пункте записаны уравнения специальной релятивистской гидродинамики в виде законов сохранения, а также подробно описана процедура восстановления примитивных переменных. Третий пункт посвящен описанию численного метода, основанного на комбинации метода Годунова и кусочно-параболического метода на локальном шаблоне. В четвертом пункте приведено тестирование метода на одномерной задаче о распаде разрыва, допускающей аналитическое решение. Пятый пункт посвящен задаче о столкновении двух релятивистских газовых сред. Эта задача является основой для дальнейшего моделирования задач столкновения нейтронных звезд, черных дыр или релятивистских заряженных пучков. В шестом пункте приведено заключение.

2. Уравнения релятивистской гидродинамики

Для описания динамики газа будем использовать физические (примитивные) переменные: ρ — плотность, \vec{v} — вектор скорости и p — давление. Введем понятие специальной энтальпии h , которая определяется по формуле

$$h = 1 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \quad (1)$$

где γ — показатель адиабаты. Скорость звука c_s определяется по формуле:

$$c_s^2 = \gamma \frac{p}{\rho h}. \quad (2)$$

В настоящей работе примем скорость света $c \equiv 1$. В этом случае фактор Лоренца Γ будем определять по формуле:

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (3)$$

Таким образом, модуль скорости ограничен единицей.

Введем понятия консервативных переменных: релятивистской плотности $D = \Gamma\rho$, релятивистского импульса $M_j = \Gamma^2\rho h v_j$, где v_j — компоненты вектора скорости \vec{v} при $j = 1, 2, 3$ и полной релятивистской энергии $E = \Gamma^2\rho h - p$. В этом случае уравнения релятивистской гидродинамики в форме законов сохранения записываются в виде [12]:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial (D v_k)}{\partial x_k} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial M_j}{\partial t} + \frac{\partial (M_j v_k + p \delta_{jk})}{\partial x_k} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (E + p) v_k}{\partial x_k} = 0, \quad (6)$$

или в компактной векторной форме в трехмерном пространстве

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial F_k}{\partial x_k} = 0, \quad (7)$$

где вектор консервативных переменных U и вектора потоков F_k задаются в виде:

$$U = \begin{pmatrix} D \\ M_j \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma\rho \\ \Gamma^2\rho h v_j \\ \Gamma^2\rho h - p \end{pmatrix}, \quad F_k = \begin{pmatrix} \rho\Gamma v_k \\ \rho h \Gamma^2 v_j v_k + p \delta_{jk} \\ \rho h \Gamma^2 v_k \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где δ_{jk} — символ Кронекера. Отметим, что в численном методе вычисления ведутся в консервативных переменных D, M_j, E , с учетом нелинейной зависимости между консервативными переменными и примитивными ρ, v, p требуется построение специальной процедуры их восстановления, что и будет описано в следующем подпункте.

2.1. Процедура восстановления примитивных переменных

Для восстановления примитивных переменных воспользуемся методом Ньютона для определения корня уравнения [13]

$$f(p) = \Gamma^2\rho h - p - E = 0 \quad (9)$$

по классической итерационной схеме

$$p_{m+1} = p_m - \frac{f(p_m)}{f'(p_m)}, \quad (10)$$

где

$$f'(p) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \Gamma^2 - \frac{M^2 \Gamma^3}{(E + p)^3} \left(D + 2 \frac{\gamma}{\gamma - 1} p \Gamma \right) - 1. \quad (11)$$

Процедура восстановления примитивных переменных записывается в следующем виде:

1. Полагаем $m = 0$.
2. В качестве начального значения давления p_m выбираем давление на предыдущем шаге.
3. Используем значение p_m для вычисления компонент скорости $v_k = M_k / (E + p_m)$.
4. Пересчитываем значение фактора Лоренца Γ и специальной энтальпии h .
5. Пересчитываем значения функции $f(p_m)$ и производной $f'(p_m)$ по уравнениям (9) и (11) соответственно.
6. По формуле (10) находим новое значение давления p_{m+1} .
7. Если $|p_m - p_{m+1}| < \varepsilon$, то полагаем давление $p = p_{m+1}$ и переходим на шаг 9.
8. Увеличиваем m на единицу и переходим на шаг 3.
9. Находим компоненты скорости $v_k = M_k / (E + p)$, фактора Лоренца Γ , специальную энтальпию h и плотность $\rho = D / \Gamma$.

Отметим, что процедура восстановления примитивных переменных сходится при условии отдаленности функции $f'(p)$ от нуля. Для этого приравняем к нулю правую часть уравнения (11). После достаточно простых выкладок получим квадратное уравнение относительно фактора Лоренца Γ :

$$\Gamma^2 \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} - v^2 \left(2 - \frac{1}{h} \right) \right] - 1 = 0, \quad (12)$$

где v^2 — квадрат скорости. В результате получим следующее условие сходимости итерационного процесса:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} < v^2 \left(2 - \frac{1}{h} \right). \quad (13)$$

В расчетах было использовано значение $\varepsilon = 10^{-10}$.

3. Описание численного метода

Будем рассматривать область, в которой введена равномерная сетка с шагами Δx . Шаг по времени τ выбирается из условия Куранта, исходя из скоростей распространения волн. Их аналитический вид приведен в подпункте 3.1. Для нумерации ячеек будет использоваться целочисленный индекс, для нумерации узлов — дробный индекс. Запишем одномерный аналог схемы Годунова для уравнений (7) для произвольной ячейки с номером i :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\tau} + \frac{F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0, \quad (14)$$

где $F_{i\pm 1/2}^{n+1/2}$ — решение линеаризованной задачи Римана для уравнений специальной релятивистской гидродинамики. Использование метода Годунова обеспечивает выполнение законов сохранения.

Рассмотрим подробно процедуру решения линеаризованной задачи Римана, записанной для примитивных переменных $w = (\rho, v_x, v_y, v_z, p)^\top$, на границе между двумя ячейками. Для простоты описания будем использовать понятия левой (Left) и правой (Right) ячеек. Также в каждой ячейке будем рассматривать кусочно-параболическое представление начальных данных. В таком представлении заложена основная идея кусочно-параболического метода на локальном шаблоне (PPML), который был разработан для уравнений гидродинамики [5] и магнитной гидродинамики [6]. В настоящей работе сделано расширение PPML метода на его использование для решения задач специальной релятивистской гидродинамики. Численный анализ исходной схемы приведен в работах [5–7], поэтому в настоящей статье мы опустим описание его подробностей и перейдем к конструкции метода для решения уравнений (7) с помощью схемы Годунова (14).

Линеаризованная одномерная задача Римана для уравнений (7) записывается в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ p \end{pmatrix} + A \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ p \end{pmatrix} = 0. \quad (15)$$

Матрица A может быть разложена в виде $A = R\Lambda L$, где R и L — матрица правых и левых собственных векторов, Λ — диагональная матрица собственных чисел. Уравнение (15) может быть записано в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} + R\Lambda L \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (16)$$

Домножим уравнения слева на матрицу L и, используя равенство $LR = I$ и сделав замену $q = Lw$, получим независимые уравнения переноса:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (17)$$

Решения последних уравнений зависят от знака собственного числа.

Для определенности будем конструировать кусочно-параболическую функцию произвольного параметра $q(x)$ на регулярной сетке с шагом Δx на интервале $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$. Приведем подробную процедуру построения параболы и параметров q_i^R , q_i^L , Δq_i , $q_i^{(6)}$, которая соответствует работе [4]. В общем виде парабола может быть записана как

$$q(x) = q_i^L + \xi \left(\Delta q_i + q_i^{(6)}(1 - \xi) \right),$$

где q_i — значение в центре ячейки, $\xi = (x - x_{i-1/2})\Delta x^{-1}$, $\Delta q_i = q_i^L - q_i^R$ и $q_i^{(6)} = 6(q_i - 1/2(q_i^L + q_i^R))$ при условии сохранения консервативности, т. е.

$$q_i = \Delta x^{-1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx.$$

Для конструирования значений $q_i^R = q_{i+1}^L = q_{i+1/2}$ будем использовать интерполяционную функцию четвертого порядка точности:

$$q_{i+1/2} = 1/2(q_i + q_{i+1}) - 1/6(\delta q_{i+1} - \delta q_i),$$

где $\delta q_i = 1/2(q_{i+1} - q_{i-1})$. Далее опишем алгоритм получения локальной параболы. На вход алгоритма подаются значения в ячейках q_i . На выходе алгоритма определяются все параметры кусочно-параболических функций на всех интервалах $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$.

Шаг 1. Конструируем значения $\delta q_i = 1/2(q_{i+1} - q_{i-1})$. Для этого нам необходимо знание только соседних ячеек q_{i+1}, q_{i-1} . Для избежания экстремумов функций используем модификацию последней формулы для δq_i в виде:

$$\delta_m q_i = \begin{cases} \min(|\delta q_i|, 2|q_{i+1} - q_i|, 2|q_i - q_{i-1}|) \operatorname{sign}(\delta q_i), & (q_{i+1} - q_i)(q_i - q_{i-1}) > 0, \\ 0, & (q_{i+1} - q_i)(q_i - q_{i-1}) \leq 0. \end{cases}$$

В случае параллельной реализации на архитектурах с распределенной памятью мы должны сделать обмены одного слоя перекрытия расчетной области средствами MPI [7]. После чего пересчитываем значения на границе с помощью интерполянта

$$q_i^R = q_{i+1}^L = q_{i+1/2} = 1/2(q_i + q_{i+1}) - 1/6(\delta_m q_{i+1} - \delta_m q_i).$$

Шаг 2. Начинаем конструировать саму локальную параболу с помощью формул:

$$\begin{aligned} \Delta q_i &= q_i^L - q_i^R, \\ q_i^{(6)} &= 6(q_i - 1/2(q_i^L + q_i^R)). \end{aligned}$$

В случае немонотонности локальной параболы (такое имеет место на разрывах) мы перестраиваем значения на границах q_i^L, q_i^R по формулам:

$$\begin{aligned} q_i^L &= q_i, & q_i^R &= q_i, & (q_i^L - q_i)(q_i - q_i^R) &\leq 0, \\ q_i^L &= 3q_i - 2q_i^R, & \Delta q_i q_i^{(6)} &> (\Delta q_i)^2, \\ q_i^R &= 3q_i - 2q_i^L, & \Delta q_i q_i^{(6)} &< -(\Delta q_i)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, граничные значения удовлетворяют условиям монотонности.

Шаг 3. Перестроим параметры параболы с учетом новых значений на границах ячеек:

$$\begin{aligned} \Delta q_i &= q_i^L - q_i^R, \\ q_i^{(6)} &= 6(q_i - 1/2(q_i^L + q_i^R)). \end{aligned}$$

В результате локальная парабола в каждой ячейке $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ получена.

После построения локальных парабол мы можем разрешить уравнения переноса (17) с учетом кусочно-параболического представления решения. В случае $\lambda > 0$

$$q_{\text{Left}}(-\lambda\tau) = q_i^R - \frac{\lambda\tau}{2h} \left(\Delta q_i - q_i^{(6)} \left(1 - \frac{2\lambda\tau}{3h} \right) \right),$$

в противном случае

$$q_{\text{Right}}(\lambda\tau) = q_i^L + \frac{\lambda\tau}{2h} \left(\Delta q_i + q_i^{(6)} \left(1 - \frac{2\lambda\tau}{3h} \right) \right).$$

Затем решение задачи Римана восстанавливается по формуле $w = Rq$. Далее из компонент вектора w конструируется решение линейризованной задачи Римана для уравнений специальной релятивистской гидродинамики. Отметим, что в численной схеме существенно используется метод расщепления по направлениям. Это реализовано в виде решений задач Римана по каждому направлению независимо. Использование метода расщепления по направлениям позволяет нам сформулировать численный метод в многомерном случае. Далее опишем решение спектральной задачи.

3.1. Решение спектральной задачи

Для нахождения полного спектрального разложения будем использовать подход, частично изложенный в работах [14, 15]. Далее приведем решение спектральной задачи для матрицы A в уравнении (15).

Матрица A имеет вид [15]:

$$A = \begin{pmatrix} v_x & a_{1,2} & 0 & 0 & a_{1,5} \\ 0 & a_{2,2} & 0 & 0 & a_{2,5} \\ 0 & a_{3,2} & v_x & 0 & a_{3,5} \\ 0 & a_{4,2} & 0 & v_x & a_{4,5} \\ 0 & a_{5,2} & 0 & 0 & a_{5,5} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \frac{\rho h \Gamma^2 (\rho \kappa - 1)}{N}, & a_{1,5} &= \frac{v_x (1 - \rho \kappa)}{N}, & a_{2,2} &= \frac{v_x \Gamma^2 (\rho h \kappa - h + \rho \xi)}{N}, \\ a_{2,5} &= \frac{\rho h \Gamma^2 \kappa (1 - v_x^2) - h - h \Gamma^2 (v_y^2 + v_z^2) + \rho \kappa \Gamma^2 (v_y^2 + v_z^2)}{\rho h \Gamma^2 N}, \\ a_{3,2} &= \frac{v_y \rho \xi}{N}, & a_{3,5} &= -\frac{v_x v_y (\rho \xi - h + \rho h \kappa)}{\rho h N}, & a_{4,2} &= \frac{v_z \rho \xi}{N}, \\ a_{4,5} &= -\frac{v_x v_z (\rho \xi - h + \rho h \kappa)}{\rho h N}, & a_{5,2} &= -\frac{\rho^2 h \Gamma^2 \xi}{N}, & a_{5,5} &= \frac{v_x \Gamma^2 (\rho \xi - h + \rho h \kappa)}{N}, \end{aligned}$$

где в свою очередь

$$\kappa = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{1}{\rho}, \quad \xi = -\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho^2}, \quad N = \Gamma^2 (h \rho \kappa - h + \rho \xi v^2).$$

Собственные числа матрицы A записываются в виде [14]:

$$\lambda_1 = v_x \frac{(1 - c_s^2) - c_s \Gamma^{-1} \omega}{1 - c_s^2 v^2}, \quad \lambda_{2,3,4} = v_x, \quad \lambda_5 = v_x \frac{(1 - c_s^2) + c_s \Gamma^{-1} \omega}{1 - c_s^2 v^2}. \quad (19)$$

Матрица левых собственных векторов L записывается в виде:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\rho\Gamma}{2c_s\omega} & 0 & 0 & \frac{1}{2c_s^2h} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{c_s^2h} \\ 0 & -\frac{v_x v_y}{1-v_x^2} & 1 & 0 & \frac{v_y}{\Gamma^2 \rho h (1-v_x^2)} \\ 0 & -\frac{v_x v_z}{1-v_x^2} & 0 & 1 & \frac{v_z}{\Gamma^2 \rho h (1-v_x^2)} \\ 0 & \frac{\rho\Gamma}{2c_s\omega} & 0 & 0 & \frac{1}{2c_s^2h} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Матрица правых собственных векторов R имеет вид:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{c_s\omega}{\rho\Gamma} & 0 & 0 & 0 & \frac{c_s\omega}{\rho\Gamma} \\ -\frac{v_y c_s (\Gamma\omega v_x + c_s)}{\rho\Gamma^2 (1-v_x^2)} & 0 & 1 & 0 & \frac{v_y c_s (\Gamma\omega v_x + c_s)}{\rho\Gamma^2 (1-v_x^2)} \\ -\frac{v_z c_s (\Gamma\omega v_x + c_s)}{\rho\Gamma^2 (1-v_x^2)} & 0 & 0 & 1 & \frac{v_z c_s (\Gamma\omega v_x + c_s)}{\rho\Gamma^2 (1-v_x^2)} \\ c_s^2 h & 0 & 0 & 0 & c_s^2 h \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где

$$\omega = \sqrt{1 - v_x^2 - c_s (v_y^2 + v_z^2)}.$$

Для определения шага по времени τ в каждой расчетной ячейке (i, k, l) определяется максимальное по модулю собственное значение (19):

$$\lambda_{(i,k,l)} = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|, |\lambda_4|, |\lambda_5|).$$

Затем шаг по времени вычисляется из условия Куранта:

$$\tau \frac{\max \lambda_{(i,k,l)}}{h} = \text{CFL} < 1,$$

где CFL — число Куранта.

Экспериментальные исследования метода PPML для решения задач гидродинамики показали, что схема имеет второй порядок точности на гладких решениях [7] и удовлетворяет TVD свойству [5]. Далее опишем верификацию численного метода.

4. Задача о распаде разрыва в релятивистской гидродинамике

Для верификации численного метода решения уравнений специальной релятивистской гидродинамики (7) используем задачу о распаде разрыва, имеющую точное решение. Рассмотрим интервал $[0; 1]$ до момента времени $t = 0.4$. В качестве начальных данных рассмотрим нулевой вектор скорости. Пространственный интервал разделим пополам и зададим значения плотности слева $\rho_L = 10$ и справа $\rho_R = 1$, давления слева

$p_L = 40/3$ и справа $p_R = 10^{-6}$. Граничные условия на левой и правой границах интервала соответствуют начальным данным. Как видно из рисунка 1, численное решение достаточно хорошо воспроизводит аналитическое решение [16]. Ударная волна размывается на две ячейки, что соответствует качеству РРМЛ методов и его модификациям [7].

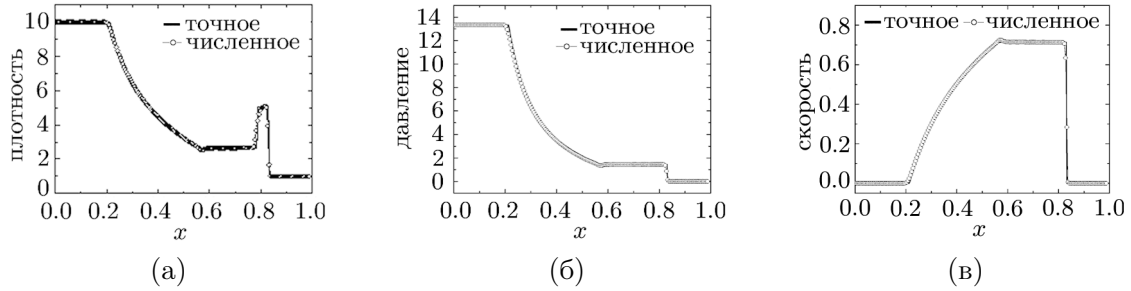


Рис. 1. Точное (сплошная линия) и численное (линиями точками) решения задачи о распаде разрыва в модели специальной релятивистской гидродинамики

5. Модельная задача о столкновении релятивистских газовых сфер

Рассмотрим модельную задачу центрального столкновения газовых сфер в модели специальной релятивистской гидродинамики (7). В качестве начальных данных выберем профили плотности и скорости $\rho(r) \sim p(r) \sim r^{-2}$, где r — расстояние от центра газовой сферы. Скорость столкновения каждой сферы соответствует фактору Лоренца $\Gamma = 10^4$. Задача рассматривается в области $[-3; 3] \times [-1.5; 1.5] \times [-1.5; 1.5]$. В области введена равномерная сетка $600 \times 300 \times 300$. Результаты моделирования показаны на рис. 2.

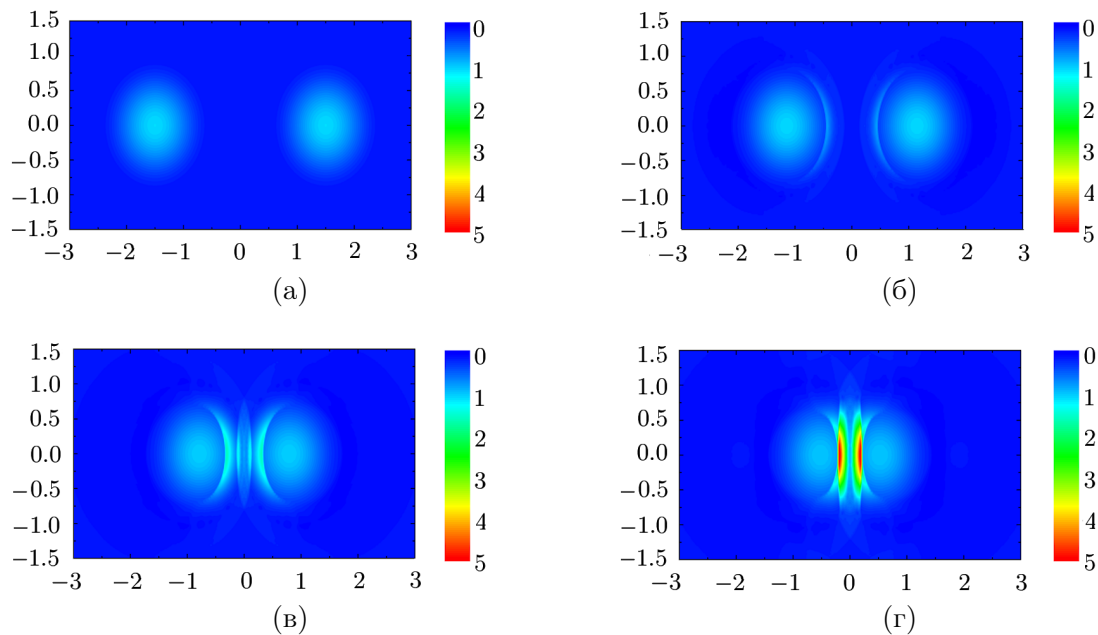


Рис. 2. Приведена плотность газа в экваториальной плоскости на начальный момент времени (а), моменты времени: $t = 0.4$ (б), $t = 0.8$ (в), $t = 1.1$ (г)

Из рис. 2 видно, что с начала столкновения образуются ударные волны, идущие перед сферами, а затем взаимодействующие друг с другом с единичной скоростью, что соответствует скорости света. Данное обстоятельство, по всей видимости, позволяет говорить о возможности воспроизведения в рамках разработанной в данной статье вычислительной модели специальной релятивистской гидродинамики решений, подобных “гравитационным волнам”, исходящих от столкновения черных дыр. Однако стоит отметить, что задача этого пункта приведена в качестве модельной и не претендует на воспроизведение физики астрофизических объектов. Описание применений разработанной вычислительной модели к задачам астрофизики планируются в дальнейших публикациях.

6. Заключение

В статье представлен новый численный метод с малой диссипацией решения, основанный на комбинации метода Годунова и кусочно-параболического метода на локальном шаблоне. Подробно описана конструкция численного метода, приведено тестирование метода на одномерной задаче о распаде разрыва. В работе приведены результаты численного моделирования столкновения двух релятивистских газовых сфер.

Настоящая статья посвящена памяти Сергея Дмитриевича Устюгова — автора кусочно-параболического метода на локальном шаблоне для уравнений идеальной магнитной и газовой динамики.

Литература

1. **Marti J.M., Muller E.** Numerical hydrodynamics in special relativity // *Living Reviews Relativity*. — 2003. — Vol. 6. — Article Number 7.
2. **Wu K., Tang H.** Physical-constraints-preserving central discontinuous Galerkin methods for special relativistic hydrodynamics with a general equation of state // *The Astrophysical J. Supplement Series*. — 2016. — Vol. 228, iss. 1. — Article Number 3.
3. **Zanotti O., Dumbser M.** A high order special relativistic hydrodynamic and magnetohydrodynamic code with space-time adaptive mesh refinement // *Computer Physics Communications*. — 2015. — Vol. 188. — P. 110–127.
4. **Collela P., Woodward P.R.** The piecewise parabolic method (PPM) Gas-Dynamical simulations // *J. of Computational Physics*. — 1984. — Vol. 54. — P. 174–201.
5. **Popov M., Ustyugov S.** Piecewise parabolic method on local stencil for gasdynamic simulations // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2007. — Vol. 47, iss. 12. — P. 1970–1989.
6. **Popov M., Ustyugov S.** Piecewise parabolic method on a local stencil for ideal magnetohydrodynamics // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2008. — Vol. 48, iss. 3. — P. 477–499.
7. **Kulikov I., Vorobyov E.** Using the PPML approach for constructing a low-dissipation, operator-splitting scheme for numerical simulations of hydrodynamic flows // *J. of Computational Physics*. — 2016. — Vol. 317, iss. C. — P. 318–346.
8. **Lora-Clavijo F., Cruz-Osorio A., Guzman F.** CAFE: a new relativistic MHD code // *The Astrophysical J. Supplement Series*. — 2015. — Vol. 218, iss. 2. — Article Number 24.
9. **Stone J., Gardiner T.A., Teuben P., et al.** Athena: a new Code for astrophysical MHD // *The Astrophysical J. Supplement Series*. — 2008. — Vol. 178. — P. 137–177.
10. **Zhang W., MacFadyen A.** RAM: a relativistic adaptive mesh refinement hydrodynamics code // *The Astrophysical J. Supplement Series*. — 2006. — Vol. 164, iss. 1. — P. 255–279.

11. **Mignone A., Bodo G., Massaglia S., et al.** PLUTO: a numerical code for computational astrophysics // The Astrophysical J. Supplement Series. — 2007. — Vol. 170. — P. 228–242.
12. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теория поля. Изд. 8-е, стер. — М.: Физматлит, 2001.
13. **Nunez-de la Rosa J., Munz C.-D.** XTROEM-FV: a new code for computational astrophysics based on very high order finite-volume methods – II. Relativistic hydro- and magnetohydrodynamics // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2016. — Vol. 460, iss. 1. — P. 535–559.
14. **Lamberts A., Fromang S., Dubus G., Teyssier R.** Simulating gamma-ray binaries with a relativistic extension of RAMSES // Astronomy & Astrophysics. — 2013. — Vol. 560. — Article Number A79.
15. **Falle S.A.E.G., Komissarov S.S.** An upwind numerical scheme for relativistic hydrodynamics with a general equation of state // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1996. — Vol. 278, iss. 2. — P. 586–602.
16. **Lora-Clavijo F.D., Cruz-Perez J.P., Siddhartha Guzman F., Gonzalez J.A.** Exact solution of the 1D riemann problem in Newtonian and relativistic hydrodynamics // Revista Mexicana de Fisica E. — 2013. — Vol. 59. — P. 28–50.

*Поступила в редакцию 2 мая 2018 г.
После исправления 28 марта 2019 г.
Принята к печати 19 декабря 2019 г.*

Литература в транслитерации

1. **Marti J.M., Muller E.** Numerical hydrodynamics in special relativity // Living Reviews Relativity. — 2003. — Vol. 6. — Article Number 7.
2. **Wu K., Tang H.** Physical-constraints-preserving central discontinuous Galerkin methods for special relativistic hydrodynamics with a general equation of state // The Astrophysical J. Supplement Series. — 2016. — Vol. 228, iss. 1. — Article Number 3.
3. **Zanotti O., Dumbser M.** A high order special relativistic hydrodynamic and magnetohydrodynamic code with space-time adaptive mesh refinement // Computer Physics Communications. — 2015. — Vol. 188. — P. 110–127.
4. **Collela P., Woodward P.R.** The piecewise parabolic method (PPM) Gas-Dynamical simulations // J. of Computational Physics. — 1984. — Vol. 54. — P. 174–201.
5. **Popov M., Ustyugov S.** Piecewise parabolic method on local stencil for gasdynamic simulations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2007. — Vol. 47, iss. 12. — P. 1970–1989.
6. **Popov M., Ustyugov S.** Piecewise parabolic method on a local stencil for ideal magnetohydrodynamics // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2008. — Vol. 48, iss. 3. — P. 477–499.
7. **Kulikov I., Vorobyov E.** Using the PPML approach for constructing a low-dissipation, operator-splitting scheme for numerical simulations of hydrodynamic flows // J. of Computational Physics. — 2016. — Vol. 317, iss. C. — P. 318–346.
8. **Lora-Clavijo F., Cruz-Osorio A., Guzman F.** CAFE: a new relativistic MHD code // The Astrophysical J. Supplement Series. — 2015. — Vol. 218, iss. 2. — Article Number 24.
9. **Stone J., Gardiner T.A., Teuben P., et al.** Athena: a new Code for astrophysical MHD // The Astrophysical J. Supplement Series. — 2008. — Vol. 178. — P. 137–177.
10. **Zhang W., MacFadyen A.** RAM: a relativistic adaptive mesh refinement hydrodynamics code // The Astrophysical J. Supplement Series. — 2006. — Vol. 164, iss. 1. — P. 255–279.

11. **Mignone A., Bodo G., Massaglia S., et al.** PLUTO: a numerical code for computational astrophysics // *The Astrophysical J. Supplement Series*. — 2007. — Vol. 170. — P. 228–242.
12. **Landau L.D., Lifshits E.M.** *Teoriya polya*. Izd. 8-e, ster. — M.: Fizmatlit, 2001.
13. **Nunez-de la Rosa J., Munz C.-D.** XTROEM-FV: a new code for computational astrophysics based on very high order finite-volume methods – II. Relativistic hydro- and magnetohydrodynamics // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2016. — Vol. 460, iss. 1. — P. 535–559.
14. **Lamberts A., Fromang S., Dubus G., Teyssier R.** Simulating gamma-ray binaries with a relativistic extension of RAMSES // *Astronomy & Astrophysics*. — 2013. — Vol. 560. — Article Number A79.
15. **Falle S.A.E.G., Komissarov S.S.** An upwind numerical scheme for relativistic hydrodynamics with a general equation of state // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1996. — Vol. 278, iss. 2. — P. 586–602.
16. **Lora-Clavijo F.D., Cruz-Perez J.P., Siddhartha Guzman F., Gonzalez J.A.** Exact solution of the 1D riemann problem in Newtonian and relativistic hydrodynamics // *Revista Mexicana de Fisica E*. — 2013. — Vol. 59. — P. 28–50.