

конфигурация которых соответствует продольному и поперечному звуку в упругой среде. Таким образом, при частотах ниже определенной характеристической частоты ω_0 среда ведет себя как жидкость, а при более высоких частотах — как твердое тело.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kadic A., Edelen D. G. B. A gauge theory of dislocations and disclinations.— Berlin e. a.: Springer, 1983.— (Lect. notes in phys.; v. 174).
2. Kroner E. Gauge field theories of defects in solids.— Stuttgart: Max-Plank Inst., 1982.
3. Lagoudas D. C., Edelen D. G. B. Material and spatial gauge theories of solids.— I. Gauge constructs, geometry, and kinematics // Intern. J. Engng Sci.— 1989.— V. 27, N 4.
4. Edelen D. G. B. Material and spatial gauge theories of solids — II. Problems with given material dislocations densities // Intern. J. Engng Sci.— 1989.— V. 27, N 6.
5. Edelen D. G. B. Material and spatial gauge theories of solids — III. Dynamics of disclination free states // Ibid.
6. Kadic A., Edelen D. G. B. A Yang-Mills type minimal coupling theory for materials with spatial defects // Intern. J. Engng. Sci.— 1982.— V. 20, N 4.
7. Landau L. D., Lifshitz E. M. Course of theoretical physics. V. 1. Mechanics.— N. Y.: Pergamon Press, 1976; V. 5, pt 1. Statistical physics.— N. Y.: Pergamon Press, 1980.
8. Edelen D. G. B., Lagoudas D. C. Dispersion relations for linearized field equations of dislocation dynamics // Intern. J. Engng Sci.— 1988.— V. 26, N 8.
9. Гриняев Ю. В., Попов В. Л. Спектр возбуждений изотропной бездиссипативной упругопластической среды // Изв. вузов. Физика.— 1990.— № 6.

г. Томск

Поступила 29/VII 1991 г.,
в окончательном варианте —
7/VIII 1992 г.

УДК 539.3

В. В. Кузнецов, С. В. Левяков

НЕЛИНЕЙНЫЙ ИЗГИБ ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ, НАГРУЖЕННЫХ ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ

В работе выведены полные геометрически нелинейные соотношения задачи об изгибе тороидальной оболочки произвольного поперечного сечения. Найдено точное выражение для потенциала сил внутреннего давления, справедливое при любом искажении формы сечения. Рассмотрены алгоритм и численное решение задач о деформировании цилиндрических и тороидальных оболочек в области больших упругих перемещений. Полученные результаты сравниваются с известными аналитическими решениями и экспериментальными данными.

1. Введение. Начиная с [1, 2], задаче изгиба тонкостенных криволинейных труб были посвящены многочисленные исследования, большинство из которых проведено в рамках линейной теории оболочек. Случай совместного действия внутреннего давления и изгибающих моментов на трубу кругового поперечного сечения рассмотрен в [3, 4] с использованием вариационных принципов. В [5] применен иной подход, состоящий в решении дифференциальных уравнений изгиба тороидальной оболочки, предварительно нагруженной внутренним давлением. Установлено, что жесткостные свойства и напряжения в оболочке нелинейно зависят от давления. При этом изучались малые перемещения и задача ставилась как линейная относительно изгибающих моментов. В [6] рассматривались большие перемещения при чистом изгибе цилиндрических оболочек, получено значение предельного момента, при котором происходит потеря устойчивости оболочек, и впервые проведено исследование устойчивости оболочки при изгибе с учетом изменения ее формы в докрити-

© В. В. Кузнецов, С. В. Левяков, 1993

ческом состоянии. Работы [7—9] посвящены уточнению результатов [6] как путем удержания малых членов в исходных соотношениях, так и путем выбора различных аппроксимирующих функций. В [10] учтено влияние внутреннего давления при изгибе цилиндрических оболочек. В [11] обобщены предыдущие результаты и объединены две проблемы, рассматриваемые ранее отдельно: изгиб криволинейных труб в линейной постановке и деформирование цилиндрических труб при больших упругих перемещениях. Выведены и приближенно проинтегрированы нелинейные уравнения изгиба труб с малой начальной кривизной осевой линии. Задача изгиба криволинейных труб, нагруженных внутренним давлением, с учетом геометрической нелинейности решалась также в [12, 13].

Следует отметить, что упомянутые выше решения, особенно нелинейные, найдены на основе упрощенных деформационных соотношений с удержанием небольшого числа членов аппроксимирующих рядов. Поэтому представляет интерес получение более точных результатов, в частности, в закритической области.

Некоторые вопросы конечного изгиба криволинейных труб изучены с позиций нелинейной теории оболочек в [14].

2. Постановка задачи. Рассмотрим трубу как тонкостенную тороидальную оболочку. Пусть труба нагружена внутренним давлением и краевыми изгибающими моментами, действующими в плоскости ее кривизны. Считаем, что труба достаточно длинная, так что влиянием граничных условий на краях можно пренебречь.

Принимая гипотезу плоских сечений, запишем уравнение срединной поверхности оболочки до и после нагружения в векторном виде

$$(2.1) \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}, \mathbf{r} = \mathbf{e}_i x_i, \mathbf{R}^V = \mathbf{R}_{0I}^V + \mathbf{r}_s^V, \mathbf{r}^V = \mathbf{e}_i^V x_i^V \quad (i = 1, 2),$$

где \mathbf{R}_0 — радиус-вектор осевой линии оболочки; $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(t)$ — единичные орты, лежащие в плоскости поперечного сечения; $x_i = x_i(s)$ — декартовы координаты точек поперечного сечения; t, s — длины дуг осевой линии и контура поперечного сечения. Здесь и далее используется суммирование по повторяющимся индексам, индексом V отмечены величины, относящиеся к деформированному состоянию.

Задача нахождения деформированного состояния оболочки сводится к определению параметрического уравнения, описывающего форму сечения $x_i^V = x_i^V(s)$. Рассмотрим малые по сравнению с единицей деформации срединной поверхности оболочки. На перемещения и углы поворота ограничений накладывать не будем. Используя выражения (2.1) и гипотезы Кирхгофа — Лява $\varepsilon_s^z = \varepsilon_s + z\kappa_s, \varepsilon_t^z = \varepsilon_t + z\kappa_t$ (z — нормальная координата к поверхности оболочки), для деформаций и искривлений получим

$$\varepsilon_t = A_t^{-1}(\varepsilon + k^V x_1^V - kx_t), \kappa_t = A_t^{-1}(h^V \lambda_1^{nV} - k\lambda_1^n), \\ \varepsilon_s = (1/2)(x_i^V \cdot x_i^V - 1), \kappa_s = x_i^V \cdot \lambda_i^{nV} - x_i \lambda_i^n.$$

($A_t = 1 + kx_1$ — параметр Ламэ, ε, k — деформация и кривизна осевой линии, λ_i^n — направляющие косинусы нормали к поверхности оболочки, точкой обозначена производная по координате s).

Потенциальная энергия деформации Π тороидальной оболочки с единичной длиной осевой линии имеет вид

$$\Pi = (1/2) \oint (T_t \varepsilon_t + M_t \kappa_t + T_s \varepsilon_s + M_s \kappa_s) A_t ds,$$

где T_t, T_s и M_t, M_s — усилия и изгибающие моменты, связанные с деформациями и искривлениями срединной поверхности соотношениями упругости:

$$T_t = B(\varepsilon_t + \nu \varepsilon_s), \quad T_s = B(\varepsilon_s + \nu \varepsilon_t),$$

$$M_t = D(\kappa_t + \nu \kappa_s), \quad M_s = D(\kappa_s + \nu \kappa_t), \quad B = Eh/(1 - \nu^2), \quad D = Bh^2/12$$

(E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина оболочки).

Потенциал внешних сил, действующих на оболочку, запишем как

$$W = U - A, \quad A = M(k^V - k)$$

(U — потенциал сил внутреннего давления p , A — работа внешних изгибающих моментов M).

Потенциал сил внутреннего давления представляет собой взятую обратным знаком работу сил внутреннего давления на изменение объема, ограниченного оболочкой. Полное выражение для потенциала имеет вид

$$(2.2) \quad U = -(1/2)p \left((1 + \varepsilon) \oint (x_1^V x_2^V - x_1^V \cdot x_2^V) ds + k \oint x_2^V \cdot x_1^{V2} ds \right) + pV$$

(V_k — постоянная величина).

(V — объем в недеформированном состоянии).

3. Алгоритм решения задачи. Для определения деформированного состояния оболочки воспользуемся методом локальной аппроксимации деформационных соотношений для элемента контура [15]. Применяя разложение неизвестных функций в ряд Тейлора и пренебрегая для малого элемента длины l членами порядка $O(l^2)$, получим следующие аппроксимационные соотношения:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_i &= A_i^{-1}(\varepsilon + k^V x_1^V - kx_1), \quad \kappa_i = A_i^{-1}(k^V \lambda_1^{nV} - k\lambda_1^n), \\ \varepsilon_s &= (1/2)(b_i b_k x_{ji}^V x_{jk}^V - 1), \\ \kappa_s &= N_i \theta_i, \quad \theta_i = b_k (\lambda_{ji}^{nV} x_{jk}^V - \lambda_{ji}^n x_{jk}), \\ A_i &= 1 + kx_1, \quad x_1 = (1/2)(x_{11} + x_{12}), \quad \lambda_1^n = (1/2)(\lambda_{11}^n + \lambda_{12}^n), \\ b_1 &= -b_2 = -1/l, \quad N_1 = (6s - 4l)/l^2, \quad N_2 = (6s - 2l)/l^2. \end{aligned}$$

Здесь x_{ji} и λ_{ji}^n — узловые значения координат и направляющих косинусов орта нормали для конечного элемента.

Потенциал сил внутреннего давления дискретной системы (2.2) запишем в виде суммы вкладов каждого из элементов:

$$U = \sum_k U_k, \quad U_k = -p \left[(1 + \varepsilon) \omega + \frac{1}{6} k (2\omega (x_{11}^V + x_{12}^V) + x_{22}^V x_{12}^{V2} - x_{11}^{V2} x_{21}^V) \right] + pV_k, \quad \omega = \frac{1}{2} (x_{11}^V x_{22}^V - x_{12}^V x_{21}^V)$$

Основной задачей при использовании энергетического метода является вычисление первой и второй вариаций энергии, которые необходимы для формулировки условий равновесия и итерационного процесса решения. Для алгоритмизации вычислений введем два уровня дискретных параметров, представленных векторами обобщенных упругих перемещений \mathbf{u} и обобщенных координат \mathbf{q} элемента:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}^T &= |\varepsilon_s, \theta_1, \theta_2, \varepsilon_i, \kappa_i|, \\ \mathbf{q}^T &= |x_{11}^V, x_{21}^V, \varphi_1^V, x_{12}^V, x_{22}^V, \varphi_2^V, \varepsilon, k^V| \end{aligned}$$

(φ_i^V — угол поворота нормали в i -м узле).

Согласно (3.1), (3.2), потенциальную энергию элемента представим в виде

$$\Pi = (1/2) \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u},$$

где \mathbf{K} — симметричная матрица жесткости со следующими ненулевыми компонентами:

$$K_{11} = BA_i l, \quad K_{14} = \nu K_{11}, \quad K_{22} = D [4 + k(3x_{11} + x_{12})] / l,$$

$$K_{23} = 2DA_i / l, \quad K_{25} = -\nu D(1 + kx_{11}),$$

$$K_{33} = D [4 + k(x_{11} + 3x_{12})] / l, \quad K_{35} = \nu D(1 + kx_{12}), \quad K_{44} = K_{11}, \quad K_{55} = DA_i l.$$

Условие стационарности полной потенциальной энергии $\delta(\Pi + W) = 0$ приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений

$$(3.3) \quad \mathbf{H}\delta\mathbf{q} + \mathbf{g} = 0.$$

Здесь \mathbf{H} , \mathbf{g} — матрица Гесса и градиент, которые вычисляются по формулам

$$(3.4) \quad \mathbf{g} = \mathbf{u}'\mathbf{P} + \mathbf{g}^p, \quad \mathbf{P} = \mathbf{K}\mathbf{u},$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{u}'\mathbf{K}(\mathbf{u}')^T + P_i\mathbf{u}_i'' + \mathbf{H}^p \quad (i = 1, \dots, 5)$$

(\mathbf{u}' , \mathbf{u}_i'' — матрицы первых и вторых производных компонент вектора \mathbf{u} по компонентам вектора \mathbf{q}). Отличные от нуля компоненты матрицы \mathbf{u}' имеют вид

$$\begin{aligned} \partial\varepsilon_s/\partial x_{ij}^V &= b_j b_k x_{ik}^V, \quad \partial\theta_i/\partial x_{jk}^V = b_k \lambda_{ji}^{nV}, \\ \partial\theta_i/\partial\varphi_i^V &= b_k x_{jk}^V \lambda_{ji}^{nV}, \quad \partial\varepsilon_t/\partial x_{ij}^V = (1/2) k^V A_t^{-1}, \\ \partial\varepsilon_t/\partial\varepsilon &= A_t^{-1}, \quad \partial\varepsilon_t/\partial k^V = x_1^V A_t^{-1}, \\ \partial\kappa_t/\partial\varphi_i^V &= (1/2) k^V \lambda_{1i}^V A_t^{-1}, \quad \partial\kappa_t/\partial k^V = \lambda_{1i}^{nV} A_t^{-1} \end{aligned}$$

(λ_{ji}^V — направляющие косинусы единичного вектора, касательного к деформированному контуру поперечного сечения в i -м узле). Ненулевые компоненты матриц вторых производных определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \partial^2\varepsilon_s/\partial x_{ij}^V \partial x_{ik}^V &= b_j b_k, \quad \partial^2\theta_i/\partial x_{jk}^V \partial\varphi_i^V = b_k \lambda_{ji}^{nV}, \\ \partial^2\theta_i/\partial\varphi_i^V{}^2 &= -b_k x_{jk}^V \lambda_{ji}^{nV}, \quad \partial^2\varepsilon_t/\partial x_{ij}^V \partial k^V = (1/2) A_t^{-1}, \\ \partial^2\kappa_t/\partial\varphi_i^V \partial k^V &= (1/2) \lambda_{1i}^V A_t^{-1}, \quad \partial^2\kappa_t/\partial\varphi_i^V{}^2 = -(1/2) k^V \lambda_{1i}^{nV} A_t^{-1}. \end{aligned}$$

Входящие в выражение (3.4) вектор \mathbf{g}^p и матрица \mathbf{H}^p отражают влияние внутреннего давления и имеют следующие ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned} g_1^p &= -\frac{1}{2} p \left[(1 + \varepsilon) x_{22}^V + \frac{1}{3} k^V a_1 a_2 \right], \quad g_2^p = -\frac{1}{2} p \left[(1 + \varepsilon) x_{12}^V + \frac{1}{3} k^V a_2 \right], \\ g_4^p &= \frac{1}{2} p \left[(1 + \varepsilon) x_{21}^V - \frac{1}{3} k^V a_1 a_4 \right], \quad g_5^p = -\frac{1}{2} p \left[(1 + \varepsilon) x_{11}^V + \frac{1}{3} k^V \bar{a}_3 \right], \\ g_7^p &= -p\omega, \quad g_8^p = -\frac{1}{6} p a_1 a_3, \quad h_{11}^p = -\frac{1}{3} p k^V a_1, \\ h_{12}^p &= \frac{1}{6} p k^V a_2, \quad h_{14}^p = -\frac{1}{6} p k^V a_1, \quad h_{15}^p = -\frac{1}{2} p \left[1 + \varepsilon + \frac{1}{3} k^V a_2 \right], \\ h_{17}^p &= -\frac{1}{2} p x_{22}^V, \quad h_{18}^p = -\frac{1}{6} p a_1 a_2, \quad h_{24}^p = \frac{1}{2} p \left(1 + \varepsilon + \frac{1}{3} k^V a_1 \right), \\ h_{27}^p &= \frac{1}{2} p x_{12}^V, \quad h_{28}^p = \frac{1}{6} p a_3, \quad h_{44}^p = -\frac{1}{3} p k^V a_1, \quad h_{45}^p = -\frac{1}{6} p k^V a_4, \\ h_{47}^p &= \frac{1}{2} p x_{21}^V, \quad h_{48}^p = -\frac{1}{6} p a_1 a_2, \quad h_{57}^p = -\frac{1}{2} p x_{11}^V, \quad h_{58}^p = -\frac{1}{6} p a_3, \\ a_1 &= x_{22}^V - x_{21}^V, \quad a_2 = 2x_{11}^V - x_{12}^V, \quad a_3 = x_{11}^V + x_{11}^V x_{12}^V + x_{12}^V, \quad a_4 = x_{11}^V + 2x_{12}^V. \end{aligned}$$

Поскольку \mathbf{g} и \mathbf{H} зависят от \mathbf{q} , то процесс решения по схеме (3.3) является итерационным и проводится до выполнения условий равновесия с заданной степенью точности. В качестве начального приближения выбирается вектор \mathbf{q} , соответствующий недеформированному состоянию оболочки. Линейное решение задачи получается за одну итерацию.

Описанный алгоритм можно использовать для расчета цилиндрических и тороидальных оболочек с произвольным поперечным сечением. В качестве исходных данных требуется задание значений координат и направляющих косинусов нормалей в узлах контура поперечного сечения.

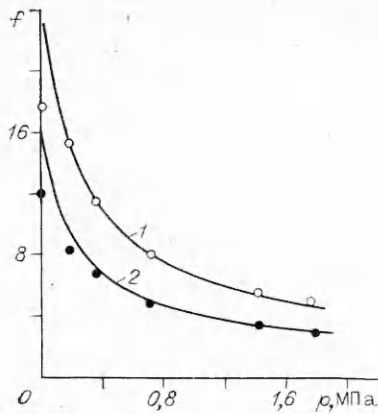


Рис. 1

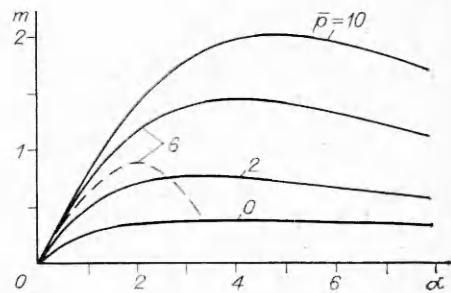


Рис. 2

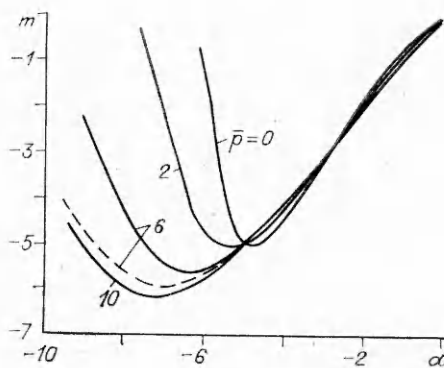


Рис. 3

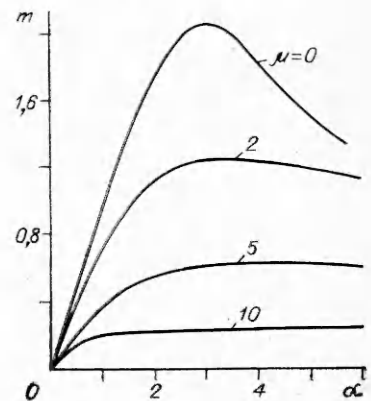


Рис. 4

4. Результаты расчетов. В качестве приложения разработанного алгоритма рассмотрим задачу изгиба криволинейных труб с радиусом поперечного сечения r , предварительно нагруженных внутренним давлением. На рис. 1 полученные численные результаты по определению коэффициента гибкости f сопоставляются с экспериментальными данными [3]. Кривая 1 отвечает трубе с параметрами $ak = 0,15$, $a/h = 93,84$, а 2 — $ak = 0,11$, $a/h = 93,84$. Видно, что результаты численного решения хорошо согласуются с экспериментальными.

На рис. 2, 3 представлены результаты по нелинейному деформированию и устойчивости тороидальных оболочек кругового поперечного сечения с параметром начальной кривизны $\mu = 5$, где $\mu = (12(1 - \nu^2))^{1/2} \times r^2 k/h$, $\nu = 0,3$. Сплошные линии — зависимости безразмерного момента $m = (12(1 - \nu^2))^{1/2} Mr^2/hEI$ от параметра искривления осевой линии $\alpha = (12(1 - \nu^2))^{1/2} r^2 (k^V - k)/h$ для различных уровней давления, характеризуемых величиной $\bar{p} = 4(1 - \nu^2) (r/h)^3 p/E$ ($I = \pi r^3 h$ — момент инерции поперечного сечения). Полученные результаты сравниваются с решением [11], которое показано штриховыми линиями. В области положительных значений параметра искривления формула из [11] дает заниженные значения критических параметров α_c и m_c , а в области отрицательных — завышенные значения α_c и m_c . При $\alpha > 0$ погрешность в определении критического момента достигает 38 %, а критического искривления — 50 %; при $\alpha < 0$ погрешности составляют соответственно 7 и 15 %.

Заметим, что в случае разгибания оболочки, когда отсутствует давление ($\bar{p} = 0$), потеря устойчивости происходит при $m_c = \alpha_c = -\mu$. Этот результат подтверждает выводы, сделанные в [13].

Из приведенного анализа следует, что полученные ранее [10—12] решения задачи о чистом изгибе труб удовлетворительно описывают деформирование лишь на начальном участке нагружения, где отклонение поперечного сечения от круговой формы невелико. В закритической области эти решения становятся неприемлемыми, что объясняется упрощенными соотношениями и ограниченным числом членов аппроксимирующих рядов.

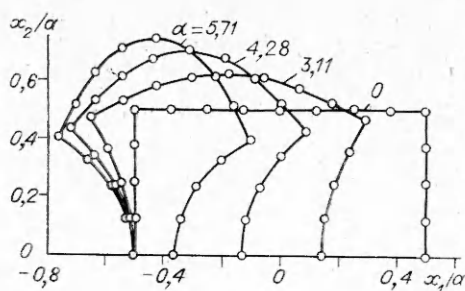


Рис. 5

Разработанный алгоритм применим также к изгибу оболочек, имеющих поперечные сечения с угловыми точками. Случай изгиба криволинейной трубы с прямоугольным поперечным сечением в линейной постановке описан в [16]. Нелинейная задача, по-видимому, ранее не рассматривалась.

На рис. 4 представлены нелинейные характеристики для квадратного поперечного сечения со стороной a . Параметры нагрузки, искривления и начальной кривизны осевой линии определяются формулами

$$m = (3(1 - \nu^2))^{1/2} Ma^2/hEI, \quad \alpha = (3(1 - \nu^2))^{1/2} (k^V - k) a^2/h,$$

$$\mu = (3(1 - \nu^2))^{1/4} (k/h)^{1/2} a$$

($I = (2/3)a^3h$ — момент инерции сечения). Характерно, что с увеличением начальной кривизны ($\mu \geq 10$) происходит вырождение предельной точки. На рис. 5 в реальном масштабе показаны формы деформированного поперечного сечения при различных значениях параметра искривления для $\mu = 0$.

В заключение приведем результаты по исследованию сходимости разработанного алгоритма. В таблице даны значения критических параметров m_c для тороидальных оболочек с круговым поперечным сечением в зависимости от числа элементов N , приходящихся на половину контура сечения.

μ	N				
	8	12	16	20	24
	m_c				
0	1,089	1,072	1,065	1,063	1,062
10	0,275	0,290	0,295	0,298	0,299
50	0,104	0,128	0,138	0,143	0,145

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубяга К. М. Изгиб тонкостенных кривых трубок // Изв. С.-Петербургского политехн. ин-та.— 1909.— Т. 11, № 2.
2. Karman Th. Die Formänderung dünnwandiger Rohre, insbesondere federnder Ausgleichrohre // VDI—Z.— 1911.— Bd 55, N 45.
3. Kafka P. G., Dunn M. B. Stiffness of curved circular tubes with internal pressure // Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech.— 1956.— V. 23, N 2.
4. Rodabaugh E. C., George H. H. Effect of internal pressure on flexibility and stress-intensification factors of curved pipe or welding elbows // Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech.— 1957.— V. 79, N 4.
5. Crandall S. H., Dahl N. C. The influence of pressure on bending of curved tubes // 9th Intern. Congr. Appl. Mech.: Proc.— Bruxelles, 1957.— V. 6.
6. Brazier L. G. On the flexure of thin cylindrical shells and other "thin" sections // Proc. Roy. Soc. London, Ser. A.— 1927.— V. 116, N 773.
7. Chwalla E. Reine Biegung schlanker, dünnwandiger Rohre mit gerader Asche // ZAMM.— 1933.— Bd 13, N 1.

8. Heck O. S. Über der Stabilität orthotroper elliptischer Zylinderschalen bei reiner Biegung // Luftfahrtforschung.— 1937.— Bd 14, N 3.
9. Коновалов Ю. В. Изгиб бесконечной цилиндрической оболочки // ПММ.— 1940.— Т. 4, № 5, 6.
10. Wood J. D. The flexure of uniformly pressurized, circular, cylindrical shell // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.— 1958.— V. 25, N 4.
11. Reissner E. On finite bending of pressurized tubes // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.— 1959.— V. 26, N 3.
12. Костовецкий Д. Л. Изгиб кривых тонкостенных труб в области больших упругих перемещений // Изв. АН СССР. ОН. Механика и машиностроение.— 1960.— № 3.
13. Аксельрад Э. Л. Изгиб тонкостенных стержней при больших упругих перемещениях // Изв. АН СССР. ОН. Механика и машиностроение.— 1964.— № 3.
14. Boyle J. T. The finite bending of curved pipes // Intern. J. Solids Struct.— 1981.— V. 17, N 5.
15. Кузнецов В. В., Соиников Ю. В. Анализ деформаций оболочек при произвольных перемещениях методом конечных элементов // Изв. АН СССР. МТТ.— 1987.— № 1.
16. Timoshenko S. Bending stresses in curved tubes of rectangular cross-section // Trans. ASME.— 1923.— V. 45, N 1893.

г. Новосибирск

Поступила 16/VI 1992 г.

УДК 539.3 : 541

А. О. Ватульян, А. В. Наседкин, А. С. Скалух

КОЛЕБАНИЯ КОНСОЛЬНОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ С ГОФРИРОВАННОЙ ПРОКЛАДКОЙ

Получены средние за период лагранжианы планарных и изгибных колебаний трехслойного консольного прямоугольного пьезорезонатора с гофрированной металлической прокладкой. Для вычисления собственных частот применен метод конечных элементов.

Существенное улучшение характеристик электромеханических преобразователей может быть достигнуто за счет использования элементов с различными свойствами. Так, можно попытаться повысить эффективность работающего на поперечном пьезоэффекте преобразователя, если включить в него пассивную в электрическом смысле гофрированную прокладку. Однако строгий теоретический расчет такого пьезорезонатора до настоящего времени не выполнен.

В данной работе предлагается приближенный метод определения собственных и вынужденных колебаний консольно закрепленного прямоугольного трехслойного пьезокерамического преобразователя с гофрированной металлической прокладкой.

Рассмотрим прямоугольный трехслойный пакет, два крайних слоя которого выполнены из поляризованной по толщине пьезокерамики с электродриванными лицевыми поверхностями. Примем, что в середине пакета находится тонкая гофрированная вдоль одной из сторон в форме синусоиды металлическая пластинка, жестко сцепленная с пьезокерамическими слоями. Весь пакет крепится консольно так, как показано на рисунке.

Отнесем пьезопреобразователь к декартовой системе координат $O\xi\eta\zeta$, выбрав ось $O\xi$ и $O\eta$ в серединной плоскости преобразователя, а ось $O\zeta$ — в направлении поляризации пьезокерамических пластинок (см. рисунок). Пусть преобразователь имеет размеры $a \times b \times h$, причем толщины пьезокерамических слоев одни и те же и равны $2h_1$, а полная высота гофрированной прокладки равна $2h_0$. Таким образом, $h = 2(h_0 + 2h_1)$.

Введем безразмерные координаты по формулам

$$\xi = ax, \quad \eta = ay, \quad \zeta = hz$$