ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА И ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА, 1995, т. 36, № 2

УДК 532.5

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПЛОСКОГО СЛОЯ НЕОДНОРОДНОЙ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ*

В. Е. Захватаев

Вычислительный центр СО РАН,
660036 Красноярск

1. Введение лагранжевых координат. Задачу о движении неоднородной идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей сформулируем следующим образом. В начальный момент времени заданы объем жидкости $\Omega(0)$, ограниченный границей $\Gamma(0)$, плотность и поле скоростей:

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0, \quad \rho|_{t=0} = \rho_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega(0). \tag{1.1}$$

Обозначим объем, который жидкость в процессе движения занимает в момент t, через $\Omega(t)$, а его границу — через $\Gamma(t)$.

Надо определить область $\Omega(t)$, вектор скорости $\mathbf{u}$, давление p, плотность ρ, которые удовлетворяют следующим условиям: внутри области $\Omega(t)$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}; \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0; \tag{1.3}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0; \tag{1.4}$$

на свободной границе $\Gamma(t)$

$$p = p_0 - \sigma\Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\Big); \tag{1.5}$$

$$\frac{df}{dt}\Big|_{f=0} = 0. \tag{1.6}$$

Здесь $\mathbf{g}$ — вектор внешних массовых сил; p_0 — заданное внешнее давление; R_1, R_2 — главные радиусы кривизн нормальных сечений поверхности $\Gamma(t)$ (считается, что $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, если соответствующее сечение выпукло внутрь области $\Omega(t)$); $\sigma \geq 0$ — коэффициент поверхностного натяжения; $f(\mathbf{x}, t) = 0$ — уравнение свободной границы $\Gamma(t)$.

Существенная трудность изучения нестационарных решений задач со свободными границами состоит в необходимости нахождения неизвестных величин (скорости, плотности, давления) в неизвестной заранее области $\Omega(t)$, которая сама является искомой. Переход к лагранжевым координатам позволяет рассматривать задачу в некоторой фиксированной и известной области, хотя уравнения, описывающие движение, при этом усложня-

* Работа выполнена при финансовой поддержке Красноярского научного фонда (код проекта 2F0059).

ются. Вводим их как координаты частиц жидкости в начальный момент времени:

$$\mathbf{x}|_{t=0} = \boldsymbol{\xi}. \tag{1.7}$$

Тогда закон движения будет определяться решением уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$$

с начальным условием (1.7) и найдется в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), \quad \boldsymbol{\xi} \in \Omega(0).$$

Учитывая, что в силу (1.3) $\rho(x(\boldsymbol{\xi}, t), t) = \rho_0(\boldsymbol{\xi})$, после некоторых преобразований [1] получим задачу на неизвестные $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$, $p(\boldsymbol{\xi}, t) = p(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t)$:

$$\mathrm{div}_\xi (M^{-1}\mathbf{x}_t) = 0, \qquad M^*(\mathbf{x}_{tt} - \mathbf{g}) + (1/\rho_0)\nabla_\xi p = 0,$$

где M — матрица Якоби отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$: $M = \partial(\mathbf{x})/\partial(\boldsymbol{\xi})$; M^*, M^{-1} — транспонированная и обратная к M матрицы; div_ξ, ∇_ξ означают операторы дивергенции и градиента по переменным $\boldsymbol{\xi}$. Далее индекс ξ опускаем.

Добавляя граничное условие (1.5), записанное в лагранжевых координатах, и начальное условие (1.1), получим постановку исходной задачи в лагранжевых переменных.

2. Уравнения эволюции малых возмущений в лагранжевых координатах. Пусть теперь известно некоторое решение вышеуказанной задачи, сформулированной в лагранжевых координатах, с начальными условиями (1.1), которое назовем *основным.*

Рассмотрим другое решение (назовем его *возмущенным*) с той же начальной областью $\Omega(0)$ и с начальными данными

$$\tilde{\rho}_0(\boldsymbol{\xi}) = \rho_0(\boldsymbol{\xi}) + Q_0(\boldsymbol{\xi}), \quad \tilde{\mathbf{x}}_t(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u}_0(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{U}_0(\boldsymbol{\xi}), \quad \mathrm{div}\,\mathbf{U}_0 = 0. \tag{2.1}$$

Положим для возмущенного движения

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}, t), \quad \tilde{p} = p + {M^*}^{-1}\nabla p \cdot \mathbf{X} + P(\boldsymbol{\xi}, t).$$

Предполагая начальные возмущения малыми, можно надеяться, что возмущения будут невелики хотя бы на ограниченном интервале времени, и рассматривать задачу о поведении малых возмущений в линейном приближении.

Предполагаем малость возмущений и их производных. Тогда, следуя [1], после некоторых преобразований задачу, записанную в лагранжевых координатах, в линейном приближении приведем к виду

$$M^*\mathbf{X}_{tt} - M^*_{tt}\mathbf{X} + \nabla P/\rho_0 - Q_0\nabla p/\rho_0^2 +$$

$$+({M^*}^{-1}\nabla p \cdot \mathbf{X})\nabla\rho_0/\rho_0^2 - A\mathbf{X} = 0, \quad A = \nabla(\mathbf{g}) - (\nabla(\mathbf{g}))^*; \tag{2.2}$$

$$\mathrm{div}\,(M^{-1}\mathbf{X}) = 0; \tag{2.3}$$

$$P - aR + \sigma\Delta_\Gamma(t)R = 0; \tag{2.4}$$

$$R = b\int_0^t \mathbf{n} \cdot M^{-1}\mathbf{U}\,dt, \quad \boldsymbol{\xi} \in \Gamma(0), \quad t \geq 0. \tag{2.5}$$

Здесь $\Delta_{\Gamma}(t)$ — результат преобразования к лагранжевым координатам оператора Лапласа — Бельтрами [1];

$$h(\xi,t) = \frac{|\nabla f_0|}{|M^{*-1}\nabla f_0|}; \quad a = -\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}_{\Gamma(t)}} - \sigma\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right);$$

$\mathbf{n} = \mathbf{n}(\xi)$ — вектор внешней нормали к $\Gamma(0)$.

Для ясности отметим, что в эйлеровых координатах $R(\mathbf{x},t) = \mathbf{n}_{\Gamma(t)}\cdot\mathbf{X}$, $\mathbf{x} \in \Gamma(t)$. Тем самым функция R является мерой отклонения возмущенной свободной границы от ее невозмущенного положения.

К (2.2)–(2.5) следует добавить начальные условия

$$\mathbf{X}|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{X}_t|_{t=0} = \mathbf{U}_0, \quad \operatorname{div}\mathbf{U}_0 = 0. \tag{2.6}$$

Таким образом, задача (2.2)–(2.6) описывает эволюцию малых возмущений неоднородной идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей в линейном приближении.

3. Исследование устойчивости движения плоского слоя. Рассмотрим основное двумерное течение, задаваемое уравнениями

$$x = \xi, \quad y = \eta - s(t), \quad s(0) = 0, \quad p(\eta,t) = (s'' - g)\int\limits_0^{\eta}\rho_0(z)\,dz + p_0(t),$$

$$\xi \in (-\infty,+\infty), \quad \eta \in [0,\eta_0], \quad g = (0,-g).$$

Это решение соответствует движению бесконечного плоского слоя, ограниченного горизонтальными свободными границами. На верхней границе задано давление $p_1(t)$, а на нижней $p_0(t)$. Функция $s(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$s'' - g = \frac{p_1(t) - p_0(t)}{\int\limits_0^{\eta_0}\rho_0\,dz}.$$

Таким образом, слой движется за счет перепада давлений сверху и снизу, а также под действием силы тяжести. А окончательная формула для $p(\eta,t)$ в слое со свободными границами имеет вид

$$p(\eta,t) = \frac{(p_1(t) - p_0(t))\int\limits_0^{\eta}\rho_0\,dz}{\int\limits_0^{\eta_0}\rho_0\,dz + p_0(t)}.$$

Для исследования устойчивости воспользуемся уравнениями (2.2)–(2.6). Обезразмерим переменные, выбирая в качестве масштабных множителей для пространственных переменных, времени, скорости, плотности, давления соответственно η_0, $\sqrt{\eta_0/g}$, $\sqrt{g\eta_0}$, $\rho_0(\eta_0)$, $g\eta_0\rho_0(\eta_0)$.

Пусть $\Psi(\xi,\eta,t)$ — достаточно гладкая функция такая, что $\Psi_\xi = -Y$, $\Psi_\eta = X$. Тогда получаем следующую задачу:

$$\Psi_{\xi\xi tt} + \Psi_{nntt} + \rho_{0\eta}\frac{\Psi_{ntt}}{\rho_0} + Q_{0\xi}\frac{a}{\rho_0} + \rho_{0\eta}a\frac{\Psi_{\xi\xi}}{\rho_0} = 0, \quad 0 < \eta < 1,$$

$$\rho_0(\Psi_{\eta tt} + a\Psi_{\xi\xi}) = -\mathrm{Bo}\Psi_{\xi\xi\xi\xi}, \quad \eta = 1,$$

$$\rho_0(\Psi_{\eta tt} + a\Psi_{\xi\xi}) = \mathrm{Bo}\Psi_{\xi\xi\xi\xi}, \quad \eta = 0,$$

$$\Psi|_{t=0} = 0, \quad \Psi_t|_{t=0} = \Psi_0(\xi, \eta)$$

($\Psi_0(\xi,\eta)$ — заданная функция, $\mathrm{Bo} = \sigma/(g\eta_0^2\rho_0(\eta_0))$ — число Бонда, $a = s'' - g$). Если $g = 0$, то уравнения остаются прежними, только $a = s''/g_0$, где g_0 — характерное ускорение. Коэффициент a выражается в конечном итоге через обезразмеренные величины в виде

$$a = \frac{p_1(t) - p_0(t)}{\int_0^1 \rho_0\, dz}.$$

Предположим, что плотность частичек жидкости в начальный момент не возмущается, слой движется равноускоренно и что стратификация жидкости экспоненциальная, т. е. $Q_0 = 0$, $a = \mathrm{const}$, $\rho_{0\eta}/\rho_0 = r = \mathrm{const}$.

Заметим, что знак коэффициента a характеризует разность давлений на верхней и нижней границах, а знак коэффициента r показывает направление градиента плотности.

Решение нашей задачи ищем в виде ряда

$$\sum_{n,k} \Psi_{nk}(\xi, \eta, t) = \sum_{n,k} \Phi_{nk}(\eta) \exp\left(i(n\xi + \alpha_{nk}t)\right).$$

Характеристические показатели неустойчивости (комплексные величины) α_{nk} определяем из соответствующей спектральной задачи. Если мнимая часть хотя бы одного из α_{nk} отрицательна, то в решении присутствует экспоненциально растущая мода, и это является признаком неустойчивости. Далее обозначаем $\alpha = \alpha_{nk}$, опуская индексы.

Запишем спектральную задачу

$$\begin{aligned} &\alpha^2\Phi_{\eta\eta} + r\alpha^2\Phi_\eta + (arn^2 - n^2\alpha^2)\Phi = 0, && 0 < \eta < 1, \\ &\alpha^2\Phi_\eta = n^4\mathrm{Bo}\,\Phi - n^2 a\Phi, && \eta = 1, \\ &\alpha^2\Phi_\eta = -n^4\mathrm{Bo}\,\Phi \exp(r) - n^2 a\Phi, && \eta = 0. \end{aligned}$$

Пусть $a = 0$. Подставляя решение первого уравнения этой задачи в граничные условия, получаем алгебраическую систему на C_1, C_2:

$$C_1(\alpha^2\gamma_1 + n^4\mathrm{Bo}\exp(r)) + C_2(\alpha^2\gamma_2 + n^4\mathrm{Bo}\exp(r)) = 0,$$

$$C_1(\alpha^2\gamma_1 - n^4\mathrm{Bo})\exp(\gamma_1) + C_2(\alpha^2\gamma_2 - n^4\mathrm{Bo})\exp(\gamma_2) = 0.$$

Приравнивая определитель получившейся системы нулю, имеем на α уравнение $A\alpha^4 + B\alpha^2 + C = 0$, где, как показывают вычисления, $A < 0$, $B > 0$, $C < 0$. Используя теорему Виетта, находим, что все корни α действительные. Поэтому при $a = 0$ движение нейтрально-устойчиво, когда слой падает только под действием силы тяжести ($s'' = g$).

Пусть теперь $a \neq 0$. Произведя замену $\Phi = y\exp(-r\eta/2)$, получаем следующую задачу:

$$y'' + Iy = 0, \qquad 0 < \eta < 1; \tag{3.1}$$

$$y' + I_1 y = 0, \qquad \eta = 1; \tag{3.2}$$

$$y' + I_2 y = 0, \qquad \eta = 0, \tag{3.3}$$

$$I = -r^2/4 + ar(n/\alpha)^2 - n^2, \quad I_1 = -r/2 + (n/\alpha)^2 a - n^4\mathrm{Bo}/\alpha^2,$$

$$I_2 = -r/2 + (n/\alpha)^2 a + n^4\mathrm{Bo}\exp(r)/\alpha^2.$$

Пусть $I = 0$, т. е. $\alpha^2 = n^2ar/(r^2/4 + n^2)$. Тогда общий вид решения уравнения (3.1) $y = C_1\eta + C_2$. Подстановка в граничные условия дает систему на C_1, C_2, которая имеет нетривиальные решения, если $I_1 - I_2 - I_1I_2 = 0$. Подставляя вместо I_1, I_2 конкретные выражения, получаем биквадратное уравнение на α. Требование того, что корни этого уравнения должны удовлетворять условию $\alpha_{1,2}^2 = n^2ar/(r^2/4 + n^2)$, является ограничением на параметры задачи.

Пусть $I \neq 0$. Подставляя тогда общее решение уравнения (3.1) в граничные условия, имеем уравнение для определения α:

$$(I + I_1I_2)\sin\sqrt{I} = \sqrt{I}(I_1 - I_2)\cos\sqrt{I}. \tag{3.4}$$

Если не учитывать силы поверхностного натяжения (Bo = 0), то найдем

$$\alpha = \sqrt{|an|}\exp(i\pi m/2), \qquad m = 0, 1, 2, 3; \tag{3.5}$$

$$\alpha = \pm n\sqrt{ar/(r^2/4 + n^2 + (\pi k)^2)}, \quad \text{если} \quad ar > 0; \tag{3.6}$$

$$\alpha = \pm in\sqrt{|ar|/(r^2/4 + n^2 + (\pi k)^2)}, \quad \text{если} \quad ar < 0, \tag{3.7}$$

$$k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Анализ показывает, что первая группа значений α (3.5) не пересекается со второй (3.6), (3.7). При любом соотношении параметров движение неустойчиво за счет первой группы.

Этот вывод можно сравнить с результатами работы [2], где рассматривалась задача об устойчивости движения плоского слоя однородной жидкости. Хотя возмущения были выбраны другими, пользуясь линейностью этих задач, их можно сравнить.

Когда Bo = 0, первая группа α соответствует тем значениям, которые получены в [2] для однородной жидкости. Эти α отражают рост поверхностных волн, которые не связаны с неоднородностью жидкости и обусловлены наличием межфазных границ. Стратификация привела к появлению еще одной совокупности — счетной серии значений α, которая выражает скорость нарастания так называемых внутренних волн. Название оправдано двояко. В этом случае не только внутренние факторы системы принимают участие в рождении волновых движений, но и сами волны возмущают только внутреннюю область слоя, не затрагивая его границ, и, следовательно, и внешнюю среду.

В [2] показано также, что при наличии капиллярных сил поверхностное натяжение стабилизирует неустойчивость мод с достаточно малой длиной волны. Однако в нашем случае из уравнения (3.4) при $n \to \infty$ получаем

$$\alpha \approx \pm\sqrt{ar}, \quad ar > 0, \qquad \alpha \approx \pm i\sqrt{|ar|}, \quad ar < 0.$$

В таком первом приближении поверхностное натяжение не стабилизирует достаточно коротковолновые внутренние волны.

Если мы поставим твердые стенки как на нижней, так и на верхней границах, то получим на α уравнение $\sin\sqrt{I} = 0$.

Значения α определяются формулами (3.6), (3.7), в которых коэффициент a выражается как $a = s''/g - 1$. В этом случае, следовательно, движение нейтрально-устойчиво при $ar > 0$ и неустойчиво при $ar < 0$. Поскольку поверхностные волны подавляются в данном случае твердыми стенками, сейчас яснее видно, что серии (3.6), (3.7) соответствуют внутренним волнам. Они, по-видимому, в данном приближении не связаны с поверхностными, так как отсутствие поверхностных волн не изменило формулы (3.6), (3.7), а отсутствие внутренних в подобной задаче для однородной жидкости [2] не поменяло характера формул, отвечающих в [2] (3.5). Заметим, что внутренние волны не возмущают свободные границы в рамках линейной теории.

Сравним полученные результаты с выводами работ, в которых исследовалась устойчивость покоя неоднородного слоя. В [3] изучается устойчивость тонкого слоя жидкости, находящегося между двумя полубесконечными средами с постоянной плотностью. Длина волны возмущений предполагается большой по сравнению с толщиной слоя. При этих условиях было найдено, что если направление ускорения внешних массовых сил противоположно градиенту плотности, то существует счетное бесконечное число мод — внутренних волн для каждого волнового числа. При этом формулы для α соответствуют полученным в нашем случае с заменой g на a.

Это соответствие и анализ физических причин неустойчивости наводят на мысль, что, по-видимому, характеристические показатели неустойчивости внутренних волн зависят от граничных условий только через распределение давления в основном невозмущенном движении. При одинаковом распределении давления слой может граничить и с газом (основной пример данной работы), и с твердыми стенками, и с жидкостями [3] (по крайней мере, в приближении тонкого слоя), и результат будет одинаков. С этой точки зрения линейные внутренние волны похожи на режимы в нелинейных системах своей некоторой автономностью от характера внешних воздействий.

В [4, 5] для решения проблемы неустойчивости двухслойной или непрерывно стратифицированной жидкости применялся подход, основанный на аналогии с теорией устойчивости гамильтоновских конечномерных систем. Пусть Φ — потенциал внешнего поля массовых сил, основное состояние — гидростатическое равновесие в некоторой области с фиксированной границей, ρ_0 — равновесная функция плотности. Ограничивая класс допускаемых движений условием $Q_0(\xi) = 0$ и еще некоторым требованием (обобщенной трактовкой потенциальности движения), можно показать, что если всюду в области, заполняемой жидкостью, $d\Phi(\rho_0)/d\rho_0 < 0$, то равновесие устойчиво в среднеквадратическом. Если повсюду $d\Phi(\rho_0)/d\rho_0 > 0$, то основное состояние неустойчиво. Это соответствует результатам [3] и настоящей работы.

Подобная задача о возникновении внутренних волн в находящемся в покое бесконечном плоском канале, ограниченном твердыми стенками, была рассмотрена в [6]. Стратификация жидкости экспоненциальная, и $r < 0$, начальные данные финитны, введены некоторые дополнительные условия. В нашем случае это отвечает нейтральной устойчивости ($a = -1$, $ar > 0$). Интересно отметить, что решение при $t \to +\infty$ стабилизируется к стационарному плоскопараллельному течению, если в начальный момент времени ускорения частиц жидкости отличны от нуля. По-видимому, аналогичный эффект возникнет и в случае движущегося слоя с твердыми стенками.

Подведем некоторые итоги. Можно сказать, что внутренние волны не нарастают экспоненциально, если «в более плотном давление больше». Это соответствует классическому результату Д. Тейлора о неустойчивости поверхности раздела между жидкостями разной плотности [7]: межфазная граница неустойчива, когда ускорение легкой жидкости направлено в более тяжелую (сила тяжести заменяется ускоренно движущейся системой координат), и устойчива, если имеет место обратное.

Автор выражает благодарность В. К. Андрееву за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Андреев В. К.** Устойчивость неустановившихся движений жидкости со свободной границей. Новосибирск: Наука, 1992.
2. **Кузнецов В. М., Шер Е. Н.** Об устойчивости течения идеальной несжимаемой жидкости в полосе и кольце // ПМТФ. 1964. № 2. С. 66–73.
3. **Hunt J. N.** Taylor instability in a thin fluid layer // Appl. Sci. Res. 1961. V. 10. P. 45–58.
4. **Владимиров В. А.** О неустойчивости равновесия неоднородной жидкости в случаях, когда потенциальная энергия не является минимальной // ПММ. 1988. Т. 52, вып. 3. С. 415–422.
5. **Белов С. Я., Владимиров В. А.** Пример обращения теоремы Лагранжа в гидродинамике двухслойной жидкости // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1988. Вып. 84. С. 21–27.
6. **Габов С. А., Свешников А. Г.** Линейные задачи нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.
7. **Биркгоф Г.** Неустойчивость Гельмгольца и Тейлора. Гидродинамическая неустойчивость. М.: Мир, 1964. С. 68–94.

Поступила в редакцию 17/V 1993 г.,
в окончательном варианте — 6/V 1994 г.