Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 6

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛООБМЕНА ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ЗАТУПЛЕННОГО ПО СФЕРЕ КОНУСА МЕТОДАМИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

УДК 536.24.01

В. И. Зинченко, А. Я. Кузин

Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики, 634050 Томск

Решение задач тепловой защиты летательных аппаратов (ЛА) связано с нахождением температуры и плотности теплового потока на нагреваемой поверхности. Распространенным способом их определения является решение так называемых сопряженных задач механики реагирующих сред [1, 2], позволяющее учесть процессы тепломассопереноса в газовой и твердой фазах и их взаимное влияние друг на друга. Корректное математическое моделирование сопряженных задач требует, как правило, использования сложных математических моделей с большим набором параметров. Часто информация о ряде параметров моделей отсутствует либо известна неточно, а численная реализация моделей связана с большими затратами времени на ЭВМ. Другим способом изучения характеристик теплового воздействия на ЛА являются методы решения обратных задач теплопроводности (ОЗТ) [3–8], позволяющие на основе дополнительной экспериментальной информации о температуре в некоторой внутренней точке, на линии или в области тела не учитывать процессы тепломассопереноса в газовой фазе. Это экономит время счета, повышает достоверность результатов, а в некоторых случаях уточняет математическую модель тепломассопереноса в газовой фазе. Однако вследствие некорректности ОЗТ их решение затруднено и требует разработки специальных регуляризирующих алгоритмов.

Наиболее полно анализ методов решения ОЗТ с точки зрения их практического использования дан в [9], где подчеркивается универсальность и перспективность метода итерационной регуляризации, основанного на градиентных алгоритмах. В [10] на основе метода итерационной регуляризации представлен алгоритм решения трехмерной граничной обратной задачи для многослойного полого сферического сегмента. Большими возможностями обладают регуляризованные численные методы (особенно применительно к решению нелинейных многомерных обратных задач, базирующихся на сложных математических моделях). Так, в [11] приведено регуляризованное численное решение нелинейной двумерной ОЗТ для тела прямоугольного сечения.

Методы решения ОЗТ — эффективный инструмент исследования тепловых режимов на поверхности обтекаемого ЛА, когда единственной доступной экспериментальной информацией является температура в отдельных точках внутри тела или на части его поверхности. Эти методы — основа математического обеспечения датчиков нестационарных тепловых потоков. Для получения пространственно-временной картины плотности теплового потока, как правило, решают серию одномерных ОЗТ либо используют требуемое количество одномерных датчиков тепловых потоков по обводу тела. В том случае, когда существенным является перетекание тепла по обводу тела (сильно меняющаяся внешняя тепловая нагрузка по обводу, малый радиус кривизны обтекаемого тела, высокотеплопроводный материал и т. п.), подобный подход может привести к большим ошибкам в определении плотности теплового потока; их можно избежать или уменьшить, применяя методы решения двумерных ОЗТ.

В данной работе с использованием методов решения прямых и обратных задач теплопроводности определяются тепловые нагрузки при сверхзвуковом обтекании затупленного по сфере конуса и исследуется влияние перетекания тепла для материалов с различной температуропроводностью на точность нахождения температуры и плотности теплового потока на поверхности. Показано, что для высокотеплопроводных материалов неучет двумерности процессов переноса тепла в теле приводит к большим ошибкам в определении указанных характеристик. Дается анализ влияния погрешности в исходной температуре на решение двумерной ОЗТ.

1. Физическая и математическая постановка прямой и обратной задач. Рассматривается осесимметричное обтекание сверхзвуковым потоком газа затупленного по сфере полого конуса с толщиной оболочки L. Процесс теплопереноса в теле описывается в естественной системе координат уравнениями теплопроводности для сферической части

$$R_N^2\rho c\,\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{H_1 r}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{r}{H_1}\lambda\frac{\partial T}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\bar n}\left(rH_1\lambda\frac{\partial T}{\partial\bar n}\right)\right],\quad 0\leqslant\xi\leqslant\xi_1;\tag{1.1}$$

конической

$$R_N^2\rho c\,\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(r\lambda\frac{\partial T}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\bar n}\left(r\lambda\frac{\partial T}{\partial\bar n}\right)\right],\quad \xi_1<\xi\leqslant\xi_l\tag{1.2}$$

с начальным и граничными условиями

$$t=0:\qquad T=T_{\text{н}}(\xi,\bar n);\tag{1.3}$$

$$n=0:\qquad \frac{\alpha}{c_p}(H_r-h_w)\Big|_{\bar n=-0}-\varepsilon\sigma T_w^4\Big|_{\bar n=-0}=-\frac{\lambda}{R_N}\,\frac{\partial T}{\partial\bar n}\Big|_{\bar n=+0};\tag{1.4}$$

$$\bar n=\frac{L}{R_N}:\qquad \frac{\partial T}{\partial\bar n}=0;\tag{1.5}$$

$$\xi=0:\qquad \frac{\partial T}{\partial\xi}=0;\tag{1.6}$$

$$\xi=\xi_1:\qquad \frac{\lambda}{H_1}\,\frac{\partial T}{\partial\xi}\Big|_{\xi=\xi_1-0}=\lambda\frac{\partial T}{\partial\xi}\Big|_{\xi=\xi_1+0};\tag{1.7}$$

$$\xi=\xi_l:\qquad \frac{\partial T}{\partial\xi}=0.\tag{1.8}$$

Здесь и ниже T — температура; $\bar n=n/R_N$, $\xi=s/R_N$ — поперечная и продольная пространственные координаты; t — время; $r=r_w/R_N-n\cos(\pi/2-\xi)$, $H_1=1-\bar n$ — коэффициенты Ламэ; R_N — радиус затупления сферической части; $\xi_1=\pi/2-\beta$; β — угол конусности; $r_w/R_N=\sin\xi$ для сферической части; $r_w/R_N=\sin\xi_1+(\xi-\xi_1)\sin\beta$ для конической части; ρ — плотность; c_p — коэффициент удельной теплоемкости газа; c — коэффициент теплоемкости твердого тела; λ — коэффициент теплопроводности; α — коэффициент теплоотдачи; H_r — энтальпия восстановления; h_w — энтальпия газа на стенке; ε — коэффициент черноты; σ — постоянная Стефана — Больцмана; $q_w=(\alpha/c_p)(H_r-h_w)$, $Q_w=q_w-\varepsilon\sigma T_w^4$ — конвективный и суммарный тепловые потоки из газовой фазы.

Рассматривается смешанный режим течения в пограничном слое: ламинарный на сферической части в окрестности точки торможения, турбулентный на периферийной части сферического затупления и на конусе.

Величина H_r при ламинарном режиме течения определяется по формуле

$$H_r=H_{e0}[(P_e/P_{e0})^{(\gamma-1)/\gamma}+\mathrm{Pr}^{1/2}(U_e/v_m)^2]\tag{1.9}$$

$$(H_{e0}=h_\infty[1+((\gamma-1)/2)\mathrm{M}_\infty^2],\quad U_e/v_m=[1-(P_e/P_{e0})^{(\gamma-1)/\gamma}]^{1/2},\quad v_m=\sqrt{2H_{e0}}),$$

а при турбулентном режиме течения

$$H_r = H_{e0}[(P_e/P_{e0})^{(\gamma-1)/\gamma} + \mathrm{Pr}^{1/3}(U_e/v_m)^2]. \tag{1.10}$$

Коэффициенты теплоотдачи находятся с использованием данных [12]. На сферической части для ламинарного режима течения

$$\begin{gathered}(\alpha/c_p)(\xi) = (0{,}55 + 0{,}45\cos 2\xi)(\alpha/c_p)(0),\\ (\alpha/c_p)(0) \approx 1{,}05U_\infty^{1{,}08}(\rho_\infty/R_N)^{1/2} \qquad (U_\infty,\ \text{км/с};\ \rho_\infty,\ \text{кг}\cdot\text{с}^2/\text{м}^4;\ R_N,\ \text{м}),\end{gathered} \tag{1.11}$$

для турбулентного

$$\begin{gathered}(\alpha/c_p)(\xi) = (3{,}75\sin\xi - 3{,}5\sin^2\xi)(\alpha/c_p)(\xi_*),\\ (\alpha/c_p)(\xi_*) \approx 16{,}4U_\infty^{1{,}25}\rho_\infty^{0{,}8}/[R_N^{0{,}2}(1 + h_w/H_{e0})^{2/3}].\end{gathered} \tag{1.12}$$

На конической части для турбулентного режима течения

$$\begin{gathered}(\alpha/c_p)(\xi) = \{2{,}2(P_e/P_{e0})(U_e/v_m)/[k^{0{,}4}(r_w/R_N)^{0{,}2}]\}(\alpha/c_p)(\xi_*),\\ k = (\gamma - 1 + 2/\mathrm{M}_\infty^2)/(\gamma+1).\end{gathered} \tag{1.13}$$

Зависимость $P_e/P_{e0}(\xi)$ для сферы рассчитывается по формуле [13]

$$P_e/P_{e0}(\xi) = 1 - 1{,}17\sin^2\xi + 0{,}225\sin^6\xi, \tag{1.14}$$

а для конуса в виде таблицы берется из [14]. Для воздуха энтальпия $h_w = 965{,}5\,T_w + 0{,}0735T_w^2$. Здесь и ниже U_e — скорость; P — давление; γ — показатель адиабаты; M — число Маха; Pr — число Прандтля; индексы н и к — начальное и конечное состояние; w — поверхность $\bar n = 0$; e, $e0$ — условия на внешней границе пограничного слоя и в точке торможения соответственно; ∞ — условия в набегающем потоке.

Прямая задача теплопроводности (ПЗТ) заключается в отыскании функции $T(\xi,\bar n,t)$, удовлетворяющей уравнениям (1.1), (1.2) в открытой области $D = \{(\xi,\bar n,t)\colon 0<\xi<\xi_l,\ 0<\bar n<L/R_N,\ 0<t\leqslant t_\text{к}\}$, начальному и граничным условиям (1.3)–(1.8) с соотношениями (1.9)–(1.14) и непрерывной вместе со своими производными $\partial T(\xi,\bar n,t)/\partial\xi$, $\partial T(\xi,\bar n,t)/\partial\bar n$ в замкнутой области $\bar D$.

В случае, когда тепловой поток из газовой фазы неизвестен и требуется определить поле температуры $T(\xi,\bar n,t)$ в области $\bar D$, плотность суммарного $Q_w(\xi,t)$ и конвективного $q_w(\xi,t)$ тепловых потоков на поверхности $\bar n = 0$ по известной температуре на линии $\bar n = L/R_N$

$$T(\xi, L/R_N, t) = T_\Gamma(\xi,t), \tag{1.15}$$

имеем двумерную граничную обратную задачу теплопроводности.

2. Алгоритм решения прямой и обратной задач. Представим уравнения теплопроводности (1.1), (1.2) в общем виде

$$F_3(T(\xi,\bar n,t),\xi,\bar n)\,\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\bar n}\left[F_1(T(\xi,\bar n,t),\xi,\bar n)\,\frac{\partial T}{\partial\bar n}\right] + \frac{\partial}{\partial\xi}\left[F_2(T(\xi,\bar n,t),\xi,\bar n)\,\frac{\partial T}{\partial\xi}\right],$$

где F_i определяются из приведенной постановки задачи.

Для решения двумерной ПЗТ используется метод расщепления [15]. Одномерные уравнения теплопроводности, получаемые в результате расщепления на каждом временном полушаге, решаются итерационно-интерполяционным методом (ИИМ) [16] с итерациями по коэффициентам. На первом полушаге расчет производится в направлении $\bar n$, на втором — в направлении ξ. На стыке сфера — конус при расчете температуры в направлении ξ используется особое разностное уравнение, получаемое на основе ИИМ [17].

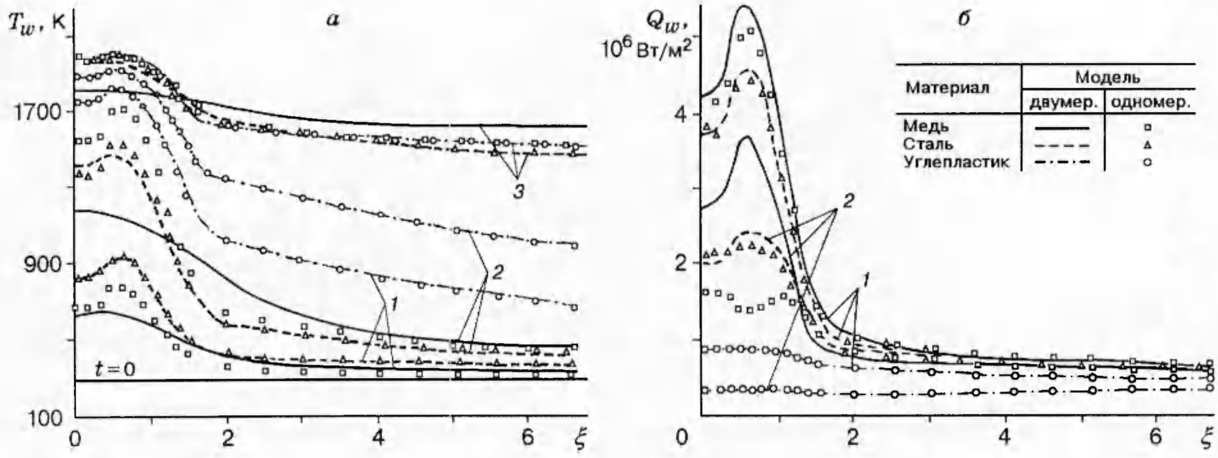

Рис. 1

В основу решения двумерной ОЗТ положен алгоритм из [11]. В отличие от [11] шаг по ξ в общем случае берется переменным, а в регуляризирующий функционал А. Н. Тихонова дополнительно входит слагаемое $\alpha(k_3\|\partial T/\partial\xi\|^2 + k_4\|\partial^2 T/\partial\xi^2\|^2)$, обеспечивающее регуляризацию решения по переменной ξ. Здесь $\|\cdot\|$ — норма в пространстве функций, интегрируемых с квадратом $L_2[0, t_к]$; α — параметр регуляризации; $k_3 > 0$, $k_4 > 0$ — неотрицательные числа. При неизвестной погрешности входной температуры $T_г(\xi, t)$ выбор оптимального приближения осуществляется по принципу квазиоптимального параметра, при известной — по принципу невязки.

3. Результаты численных расчетов. Проведено численное исследование влияния перетекания тепла по обводу затупленного по сфере конуса на точность восстановления температуры и плотности теплового потока на нагреваемой поверхности $\bar{n} = 0$ методами решения прямых и обратных задач теплопроводности. Для этого с использованием вышеизложенных алгоритмов были составлены программы расчета ПЗТ и ОЗТ на языке ФОРТРАН для IBM PC AT-386. Рассматривались материалы с большим диапазоном изменения теплофизических характеристик (ТФХ) λ, ρ, c: высокотеплопроводный (медь, $\lambda = 386$ Вт/(м·К), $\rho = 8950$ кг/м^3, $c = 376$ Дж/(кг·К)), низкотеплопроводный (углепластик, $\lambda = 0{,}75$ Вт/(м·К), $\rho = 1350$ кг/м^3, $c = 1062$ Дж/(кг·К)), материал с промежуточными значениями ТФХ (сталь, $\lambda = 20$ Вт/(м·К), $\rho = 7800$ кг/м^3, $c = 600$ Дж/(кг·К)). При проведении численных расчетов использовались следующие параметры: $R_N = 0{,}0185$ м, $L = 0{,}005$ м, $\beta = 5°$, $\xi_l = 6{,}59$, $M_\infty = 6, U_\infty = 2078$ м/с, $\rho_\infty = 0{,}02$ кг·с^2/м^4, $\gamma = 1{,}4$, $\Pr = 0{,}72$, $\varepsilon = 0{,}7$, $H_{e0} = 2{,}46 \cdot 10^6$ м^2/с^2, $T_н = 300$ К.

На рис. 1, 2 представлены результаты решения ПЗТ. На рис. 1, *а* и *б* показано распределение температуры T_w и плотности теплового потока Q_w по обводу тела в моменты времени $t = 1$ и 5 с (линии *1* и *2*), $t = t_{ст}$ (линии *3*) ($t_{ст}$ — время выхода на стационарный режим) для меди, стали и углепластика, полученное в рамках двумерной (линии) и одномерной (значки) математических моделей. Как следует из рис. 1, использование теплопроводного материала приводит к снижению температуры поверхности в несколько сотен градусов для начального периода времени. При выходе на стационарный режим снижение максимальной температуры поверхности на сферической части для меди достигает около 200 К, причем распределение температуры поверхности по обводу $T_w(\xi)$ носит монотонный характер в различные моменты времени, и наблюдается выполаживание кривых при $t \to \infty$ (сплошная кривая *3*). Этот процесс связан с перетеканием тепла на коническую часть тела и с последующим переизлучением его с поверхности.

Для стали и углепластика качественное распределение $T_w(\xi)$ совпадает с поведением

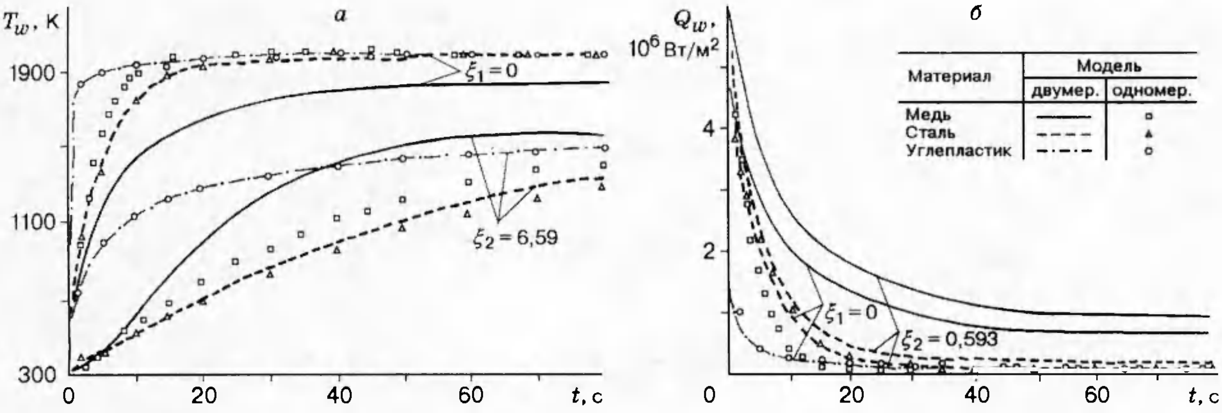

Рис. 2

плотности конвективного теплового потока по обводу тела $q_w(\xi)$. Как и следовало ожидать, учет двумерности несуществен для углепластика, слабо проявляется для стали и важен для меди, причем в последнем случае наблюдается количественное и качественное различие результатов, связанное с использованием одномерной и двумерной постановки задач. Так, для меди при $t = 5$ с максимальное различие температур, рассчитанных по одномерной и двумерной моделям, ~ 550 К (относительная расчетная погрешность $\varepsilon_{\text{р}} \sim 50\,\%$), а различие плотности тепловых потоков $\sim 2{,}2 \cdot 10^6$ Вт/м^2 ($\varepsilon_{\text{р}} \sim 60\,\%$). Отметим, что для одномерной постановки задачи при используемых граничных условиях для стационарного режима решение не зависит от коэффициента теплопроводности материала и совпадает со значением радиационной температуры поверхности, отыскиваемой из условия $q_w = \varepsilon\sigma T_w^4$.

На рис. 2,*а* и *б* показана зависимость температуры T_w и плотности теплового потока Q_w от времени t (обозначения совпадают с рис. 1). Здесь *а* соответствует $T_w(\xi_i, t)$ для точек поверхности $n = 0$ с координатами $\xi_1 = 0$ и $\xi_2 = 6{,}59$, *б* — $Q_w(\xi_i, t)$ с $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0{,}593$.

Результаты решения одномерных ОЗТ на рис. 2,*б* даны для $\xi = 0$. С ростом времени вследствие прогрева материалов температура на поверхности увеличивается и выходит на асимптоту, а плотность теплового потока уменьшается. В одинаковые моменты времени наибольшая температура и наименьшая плотность теплового потока при $\xi = 0$ наблюдаются у самого низкотеплопроводного из рассматриваемых материалов — углепластика. Для него характерен и наиболее быстрый выход температуры на асимптоту. Неучет перетекания тепла по обводу для меди приводит к более быстрому росту и выходу на асимптоту температуры T_w в лобовой критической точке и замедлению роста температуры на периферии ($\xi = \xi_l$). Для стали и особенно для углепластика влияние двумерности несущественно. Температура T_w при $\xi = 0$ для меди, определенная с учетом и без учета перетекания тепла по обводу тела, при $t = 10$ с может отличаться более чем на 400 К, а плотность теплового потока Q_w — в несколько раз.

Таким образом, анализ рис. 1, 2 показывает, что при решении ПЗТ необходимо учитывать двумерность процессов теплопереноса в образцах, выполненных из высокотеплопроводных материалов, и для них следует ожидать значительного влияния перетекания тепла при восстановлении плотности тепловых потоков и температур поверхности методами решения обратных задач. В связи с этим в дальнейшем в качестве объекта исследования будет выступать образец из меди.

На рис. 3–6 представлены результаты решения ОЗТ. В качестве исходной «экспериментальной» информации для решения как одномерной, так и двумерной ОЗТ использовалась температура на тыльной поверхности оболочки $T_{\text{г}}(\xi, t)$, полученная из решения

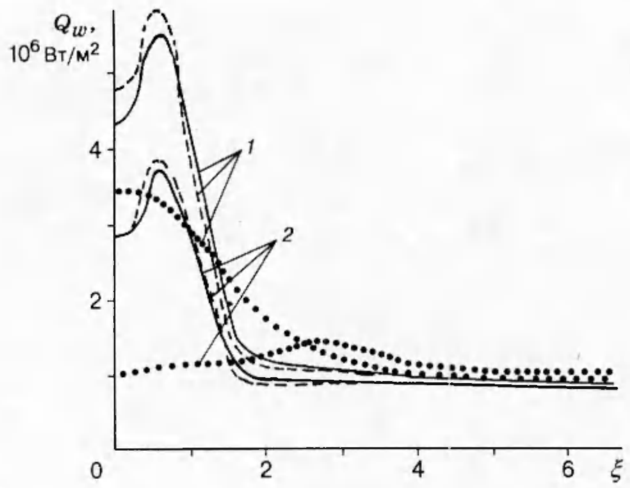

Рис. 3

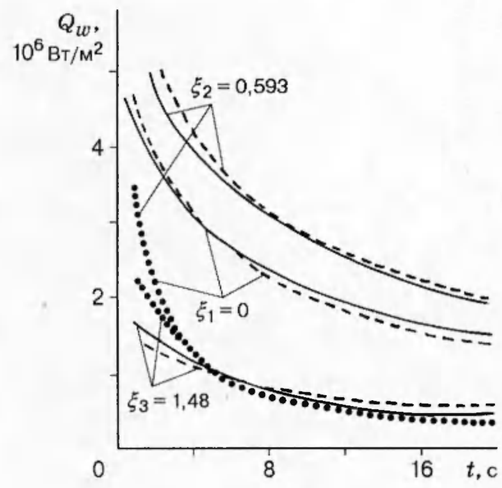

Рис. 4

двумерной ПЗТ (1.1)–(1.8) с соотношениями (1.9)–(1.14). Зависимости $T_w(\xi, t)$, $Q_w(\xi, t)$, полученные из решения этой ПЗТ, в дальнейшем будут считаться точным решением ОЗТ.

На рис. 3 показано распределение плотности теплового потока по обводу тела для моментов времени $t = 1$ и 5 с (кривые *1* и *2*). Здесь и на рис. 4 сплошные кривые — точное решение двумерной ОЗТ, штриховые — численное решение двумерной ОЗТ, пунктирные — решение серии одномерных ОЗТ по обводу тела. При проведении численных расчетов число узлов разностной сетки по переменным ξ, n, t бралось равным 11; 11; 100 соответственно. Из рис. 3 видно, что численное решение двумерной ОЗТ является устойчивым и хорошо согласуется с точным решением. В то же время значение Q_w, полученное из решения серии одномерных ОЗТ, может отличаться от точного более чем в 1,5 раза. Изменяется даже качественное поведение $Q_w(\xi)$ на сфере (становится монотонным).

На рис. 4 представлены зависимости $Q_w(\xi_i, t)$ для точек нагреваемой поверхности с координатами $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0{,}593$, $\xi_3 = 1{,}48$. Видно, что зависимости $Q_w(\xi_i, t)$, найденные из решения двумерной ОЗТ, хорошо согласуются с точными зависимостями, а полученные из решения одномерных ОЗТ могут отличаться от точных в несколько раз.

Из рис. 3, 4 следует, что, во-первых, используемый алгоритм решения двумерной ОЗТ позволяет достаточно точно восстанавливать $Q_w(\xi, t)$, во-вторых, применение одномерных ОЗТ при $\xi \leqslant 4$ приводит к большим ошибкам в определении $Q_w(\xi, t)$, поэтому необходимо применять двумерные ОЗТ. В то же время для периферийных участков конической поверхности ($\xi > 4$) решение одномерной ОЗТ дает приемлемую точность, что вытекает из слабого изменения плотности теплового потока по обводу тела в этой области. Такой результат следовало ожидать, исходя из данных решения прямой задачи, представленных на рис. 1,*б*.

На рис. 5, 6 показано влияние ошибок в исходной температуре на решение двумерной ОЗТ. На рис. 6 кривые *1* и *2* отвечают $t_1 = 2$ с и $t_2 = 8$ с. На температуру $T_г(\xi, t)$ накладывались возмущения, распределенные по времени по равномерному закону с максимальным отклонением 3 % от текущего значения температуры. Сплошные кривые — точное решение ОЗТ, пунктирные — численное решение ОЗТ ($\alpha = 0$) без сглаживания исходной температуры, штриховые — численное отражение ОЗТ ($\alpha = 0$) с предварительным сглаживанием исходной температуры по методу регуляризации А. Н. Тихонова с выбором параметра регуляризации по принципу невязки [18]. Видно, что зависимость $Q_w(t)$, найденная из решения ОЗТ без сглаживания, носит ярко выраженный неустойчивый характер

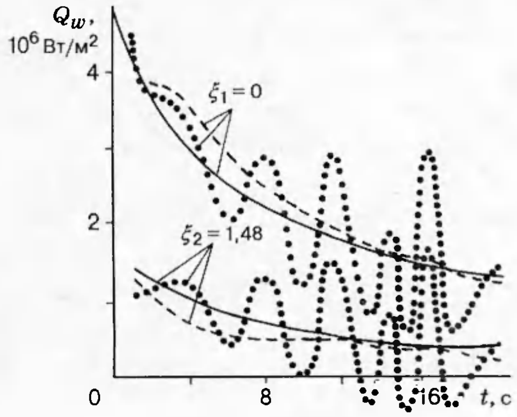

Рис. 5

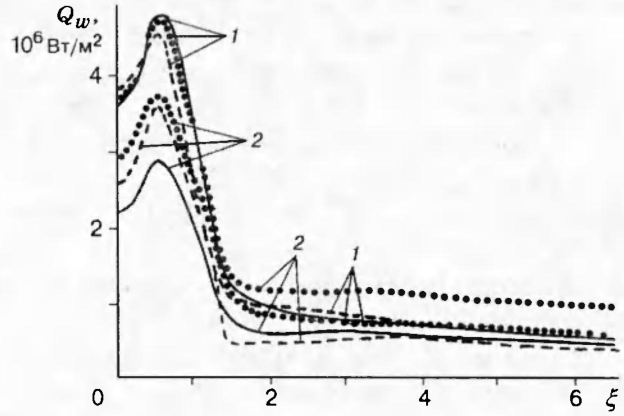

Рис. 6

и может даже принимать отрицательные значения. Решение ОЗТ, полученное с использованием предварительного сглаживания исходной температуры, является устойчивым и удовлетворительно согласуется с точным решением.

Таким образом, с применением решения прямых задач показана перспективность использования высокотеплопроводных материалов с целью снижения максимальных температур поверхности, реализованы методы решения обратных задач по восстановлению плотности тепловых потоков к обтекаемому телу и проанализировано влияние перетекания тепла вдоль продольной координаты на искомую величину $Q_w(\xi, t)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-01-17286).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гришин А. М., Фомин В. М.** Сопряженные и нестационарные задачи механики реагирующих сред. Новосибирск: Наука, 1984.
2. **Зинченко В. И.** Математическое моделирование сопряженных задач тепломассообмена. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1985.
3. **Алифанов О. М.** Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов (введение в теорию обратных задач). М.: Машиностроение, 1979.
4. **Алифанов О. М.** Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988.
5. **Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.** Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.
6. **Темкин А. Г.** Обратные методы теплопроводности. М.: Энергия, 1973.
7. **Коздоба Л. А., Круковский П. Г.** Методы решения обратных задач теплопереноса. Киев: Наук. думка, 1982.
8. **Гришин А. М., Кузин А. Я., Миков В. Л. и др.** Решение некоторых обратных задач механики реагирующих сред. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987.
9. **Алифанов О. М** О методах решения некорректных обратных задач // Инж.-физ. журн. 1983. Т. 45, № 5. С. 742–752.
10. **Алифанов О. М., Ненарокомов А. В.** Трехмерная обратная задача теплопроводности в экстремальной постановке // Докл. РАН. 1992. Т. 325, № 5. С. 950–954.
11. **Кузин А. Я.** Регуляризованное численное решение нелинейной двумерной обратной задачи теплопроводности // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 1. С. 106–112.

12. **Землянский Б. А., Степанов Г. Н.** О расчете теплообмена при пространственном обтекании тонких затупленных конусов гиперзвуковым потоком воздуха // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1981. № 5. С. 173–177.
13. **Лунев В. В., Павлов В. Г., Синченко С. П.** Гиперзвуковое обтекание сферы равновесно диссоциирующим воздухом // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1966. Т. 6, № 1. С. 121–129.
14. **Любимов А. Н., Русанов В. В.** Течения газа около тупых тел. Ч. 2. М.: Наука, 1970.
15. **Яненко Н. Н.** Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.
16. **Гришин А. М., Берцун В. Н., Зинченко В. И.** Итерационно-интерполяционный метод и его приложения. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1981.
17. **Кузин А. Я., Ярославцев Н. А.** Применение регуляризирующих алгоритмов для решения нелинейной граничной обратной задачи теплопроводности. Томск, 1987. Деп. в ВИНИТИ 22.07.87, № 5280-В 87.
18. **Алифанов О. М., Занцев В. К., Панкратов Б. М. и др.** Алгоритмы диагностики тепловых нагрузок летательных аппаратов / Под ред. В. П. Мишина. М.: Машиностроение, 1983.

Поступила в редакцию 10/X 1995 г.,
в окончательном варианте — 5/II 1996 г.