реального взрыва вычесть время остывания в ПД, то получим не столь большую разницу в t_{ign} для реального взрыва и воспламенения в динамических условиях с $\mathrm{Nu} = 20$.

Сравним времена задержки воспламенения при различных видах симметрии ($\nu = 3$ и 2) для $r = 5$ мкм и $r_p(t_0) = 0{,}06$, 0,07, 0,08 м. Оказалось, что в сферическом течении $t_{ign} = 36$, 40, 46, а в цилиндрическом — 35, 36, 37 мкс, т. е. сферическое расширение, характеризуемое более резким спадом параметров во фронте УВ, приводит к тому, что t_{ign} увеличивается сильнее при удалении частицы от центра взрыва. Для цилиндрического течения расположение частицы на данных расстояниях от волны влияет на t_{ign} весьма слабо. Кроме того, время воспламенения при сферическом взрыве меньше, чем при цилиндрическом.

Интересно проследить в цилиндрическом течении за влиянием местоположения частицы на t_{ign}. Так, пусть $r = 3$ мкм, $x_0 = 0{,}02$ м, $r_p(t_0) = (6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15)\cdot 10^{-2}$ м, тогда $t_{ign} = 22$, 23, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4,5 мкс соответственно. Здесь наблюдается та же картина, что и в сферическом случае. Частицы, расположенные достаточно далеко от центра взрыва, попадают в пробку газа и, не выходя из нее, воспламеняются. Это говорит о том, что возможно образование вторичных фронтов воспламенения. Первые обусловлены воспламенением частиц, расположенных ниже по течению от некоторого критического значения $r_p(t_0)_*$, вторые возникают при воспламенении внутренних частиц, у которых $r_p(t_0) \leqslant r_p(t_0)_*$.

Таким образом, в работе выявлены три типа движения мелких частиц в поле течения воздуха и продуктов детонации, возникающего в ближней зоне при взрыве ВВ. Это движение мелких частиц в виде слоев соответствующей симметрии, отстающих от УВ_1; движение частиц средних размеров, в котором имеется точка максимального приближния частиц к сильному разрыву; движение крупных частиц, опережающих, а потом движущихся вместе с УВ. Показано, что время воспламенения фазы частиц может определяться теми частицами, которые расположены на некотором характерном расстоянии от центра взрыва.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Федоров А. В., Тетенов Е. В., Вессьер Б.** Воспламенение газовзвеси частиц металлов при реальном взрыве I. // ФГВ.— 1991.— 27, № 5.
2. **Броуд Г.** Расчеты взрывов на ЭВМ // Механика.— 1976.— № 4.
3. **Коробейников В. П.** Задачи теории точечного взрыва.— М.: Наука, 1985.— 400 с.
4. **Бейкер У., Кокс П. и др.** Взрывные явления. Оценка и последствия.— Мир, 1986.— 319 с.
5. **Федоров А. В., Тетенов Е. В., Вессьер Б.** Динамика и воспламенение диспергированных в атмосфере частиц металлов при реальном взрыве.— Новосибирск, 1990.— (Препр./АН СССР. Сиб. отд-ние. ИТПМ; № 6—90).
6. **Меньшов И. С.** Нестационарные двухфазные течения: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Новосибирск, 1982.— 155 с.
7. **Гуревич М. А., Степанов А. М.** Воспламенение металлических частиц // ФГВ.— 1968.— 4, № 3.— С. 334—342.
8. **Медведев А. Е., Федоров А. В., Фомин В. М.** Воспламенение частиц металла в высокотемпературном потоке за ударной волной.— Новосибирск, 1981.— 27 с.— (Препр./АН СССР. Сиб. отд-ние. ИТПМ; № 33—81).

г. Новосибирск *Поступила в редакцию 20/XI 1990*

УДК 536.46

А. Г. Князева

ЗАЖИГАНИЕ КОНДЕНСИРОВАННОГО ВЕЩЕСТВА ТЕПЛОВЫМ ПОТОКОМ С УЧЕТОМ ТЕРМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ

Впервые рассмотрена задача о зажигании конденсированного вещества в постановке линейной теории термоупругости с учетом связности полей деформации и температуры. Решение проведено с использованием методов сращиваемых асимптотических разложений и пограничных функций. Показано, что время зажигания

существенно возрастает по сравнению с результатом чисто тепловой теории, напряжения вследствие больших градиентов температур в химически реагирующей системе могут достигать величин, близких к пределам прочности многих веществ.

Воздействие на поверхность конденсированного вещества теплового импульса вызывает термические напряжения. В такой ситуации часть тепла, подводимого к конденсированному веществу извне, а также тепло, выделяющееся в химической реакции, тратится на работу сил деформации. В задачах зажигания, т. е. при наличии больших градиентов температуры и узкой области интенсивного химического тепловыделения, это (взаимодействие полей деформации и температуры) может привести к достаточно сильным эффектам: затягиванию периода индукции зажигания или смене его механизма, если напряжения превысят предельно допустимые.

Пренебрегая зависимостью теплофизических характеристик, упругих постоянных и формально-кинетических параметров от температуры, рассмотрим задачу в рамках линейной теории термоупругости [1, 2]. Так как нас интересует только начальная стадия инициирования химического превращения, то выгорание вещества, как это принято в тепловой теории зажигания [3], не учитываем. Математически простейшая задача описывается системой уравнений

$$c_\varepsilon \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_\text{т} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + Q k_0 \rho \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) - \rho \frac{c_\sigma - c_\varepsilon}{3\alpha_\text{т}} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t}, \qquad (1)$$

$$a^2 \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial t^2} = s \frac{\partial^2 T}{\partial t^2},$$

$$a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad s = \alpha_\text{т} (3\lambda + 2\mu),$$

$$T(x, t) = T_\text{н}, \quad \sigma_x = \partial \sigma_x / \partial t = 0, \quad t = 0,$$

$$\sigma_x = 0, \quad -\lambda_\text{т} \frac{\partial T}{\partial x} = q_s, \quad x = 0,$$

$$\sigma_x = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x \to \infty,$$

где T — температура; x — пространственная координата; t — время; ρ — плотность; $\alpha_\text{т}$ — коэффициент линейного теплового расширения; a — скорость распространения поперечных упругих волн (скорость звука); $T_\text{н}$ — начальная температура; $\lambda_\text{т}$ — коэффициент теплопроводности; q_s — тепловой поток; E, k_0, Q — формально-кинетические характеристики экзотермической химической реакции; напряжения σ_x и деформации связаны обобщенным законом Гука: c_ε — теплоемкость при постоянной деформации и c_σ — теплоемкость при постоянном напряжении, связанные соотношением $c_\sigma - c_\varepsilon = 3(3\lambda + 2\mu)\alpha_\text{т}^2 T$ или в приближении линейной теории термоупругости

$$c_\sigma - c_\varepsilon = 3(3\lambda + 2\mu)\alpha_\text{т}^2 T_\text{н},$$

причем c_σ эквивалентна теплоемкости при постоянном давлении, а c_ε — теплоемкости при постоянном объеме. Исследование зажигания в такой постановке до сих пор не проводилось.

Пренебрегая разностью $c_\sigma - c_\varepsilon$, простые оценки времени зажигания можем сделать на основе известных результатов [3], что справедливо, если напряжения в веществе не превысят предельно допустимые $\sigma_\text{пр}$. До возбуждения химического превращения в веществе напряжения найдем из решения инертной задачи, которое легко может быть получено операционным методом. Анализ несвязной инертной задачи, проведенный в [4], показывает, что растягивающие и сжимающие напряжения возникают за времена, меньшие характерного времени прогрева, и затем быстро затухают. Максимально возможные напряжения определяются параметром s, перепадом температур или мощностью внешнего потока тепла и вполне могут соответствовать пределам прочности многих веществ.

В общем случае пренебрежение членом связности в уравнении теплопроводности (1) неправомерно. Решение задачи в этом случае удобнее проводить в перемещениях, а напряжения определять через деформации и температуру, используя обобщенный закон Гука. Система уравнений принимает вид

$$c_\varepsilon \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_т \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \rho Q k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_т T_н \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial t}, \tag{2}$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_т \frac{\partial T}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{3}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{4}$$

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{xx} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_т (T - T_н), \tag{5}$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \lambda \varepsilon_{xx} - (3\lambda + 2\mu)\alpha_т (T - T_н), \tag{6}$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0, \tag{7}$$

$$x = 0:\ -\lambda_т \frac{\partial T}{\partial x} = q_s,\ (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_т (3\lambda + 2\mu)(T - T_н), \tag{8}$$

$$x \to \infty:\ u = 0,\ \partial T/\partial x = 0, \tag{9}$$

$$t = 0:\ T = T_н,\ u = 0,\ \partial u/\partial t = 0. \tag{10}$$

В отсутствие сил инерции ($\rho \partial^2 u/\partial t^2 = 0$) решение задачи наиболее просто. Это приближение соответствует условию $v_x = (v_т/a)^2 = 0$, где $v_т$ — скорость распространения тепловых волн. Используя адиабатический метод [3] для определения времени зажигания $t_з$, найдем

$$t_з = \frac{T_* - T_н}{2EQk_0} c_\varepsilon \exp\left(\frac{E}{RT_*}\right), \tag{11}$$

$$T_* - T_н = \frac{2}{\pi} \frac{q_s^2}{\pi \alpha} \frac{\exp(E/RT_*)}{\rho \lambda_т Q k_0},$$

T_* — температура зажигания;

$$\alpha = 1 + \frac{T_н}{c_\varepsilon \rho} \alpha_т^2 \frac{(3\lambda + 2\mu)^2}{\lambda + 2\mu};$$

$(\alpha - 1)$ — коэффициент связности [5]. В отличие от тепловой теории зажигания [3], тепловой поток, идущий на нагрев вещества, сокращается в $\sqrt{\alpha}$ раз, время зажигания зависит не от c_σ (или c_p), а от c_ε. Оценки показывают, что для различных веществ параметр $\alpha = 1 \div 2$; $\alpha = 1$ соответствует несвязной задаче термоупругости.

Заметим, что в большинстве случаев $v_x \ll 1$. Малый параметр, появляющийся при старшей производной в обезразмеренной по характерным масштабам задаче, может существенно повлиять на результат. Для более подробного анализа (2)—(10) используем методы сращиваемых асимптотических разложений и пограничных функций. Аналогично [6], где изложен алгоритм решения задачи о зажигании тепловым потоком без учета термонапряжений, рассмотрим три варианта построения асимптотик.

До температуры T_0, при которой возбуждаются химические реакции, вещество нагревается как инертное тело. Обезразмеривая систему (2)—(10) по характерным масштабам этого периода, получим

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} - w \exp\left[-\Theta_0 \frac{\Theta}{1 - \sigma\Theta}\right] + \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\, \partial \tau},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \delta \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} - v_x \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \tag{12}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial \xi}, \tag{13}$$

$$s_x = \frac{\varepsilon_{xx}}{\delta} + \Theta - 1, \tag{14}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = 1, \ \frac{\partial u}{\partial \xi} = \delta(1 - \Theta), \ \xi = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = 0, \ u = 0, \ \xi \to \infty, \tag{16}$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1, \ u(\xi, 0) = \partial u/\partial \tau = 0, \ \tau = 0, \tag{17}$$

где $\Theta = \frac{T_0 - T}{T_0 - T_н}$; $\xi = x/x_п$; $\tau = t/t_п$; $\sigma = \frac{T_0 - T_н}{T_0}$; $\Theta_н = E(T_0 - T_н)/(RT_0^2)$; $w = \lambda_т (T_0 - T_н) Q k_0 \rho \exp(-E/RT_0)/q_s^2$; $v_x = (v_т/a)^2$; $\delta = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{\alpha_т(T_0 - T_н)}{u_п} x_п$; $x_п = \lambda_т(T_0 - T_н)/q_s^2$; $t_п = c_\varepsilon \rho x_п^2/\lambda_т$; $s_x = \sigma_x/\sigma_п$; $\sigma_п = \alpha_т(3\lambda + 2\mu)(T_0 - T_н)$; для перемещений и деформаций, обезразмеренных по характерным масштабам ($u_п = c_\varepsilon \rho x_п/(3\lambda + 2\mu)/\alpha_т$ и $\varepsilon_п = c_\varepsilon \rho/(3\lambda + 2\mu)/\alpha_т$), оставлены прежние обозначения u и ε соответственно; a — скорость звука. Записывая решение инертной несвязной задачи [4] в переменных прогрева, можем придать иной смысл параметру v_x: $\sqrt{v_x} = \sigma_{max}/\sigma_п$. Здесь $\sigma_{max} = q_s \alpha_т (3\lambda + 2\mu)/(c_\varepsilon \rho a)$ — максимальные напряжения в инертном теле при его нагреве потоком постоянной интенсивности; $\sigma_п = (3\lambda + 2\mu)\alpha_т(T_0 - T_н)$ — максимальные напряжения в инертном теле при мгновенном повышении температуры на границе $x = 0$ до T_0. Возможны два пути решения.

1. Условие $\Theta_0 \gg 1$, что наиболее интересно в задачах зажигания, позволяет пренебречь в уравнении теплопроводности экспоненциально малыми величинами. Тогда на стадии инертного прогрева система сводится к линейной связной задаче термоупругости. Решать инертную задачу удобно методом пограничных функций [7], так как точное решение крайне громоздко и неудобно в использовании. Последовательность дальнейших рассуждений аналогична [6]. Дополнительные сложности возникают лишь при определении поля перемещений.

2. Учитывая малость параметра v_x, можем сразу представить решение (12), (15)—(17) в виде суммы [7]

$$\Theta = \bar{\Theta}(\tau, v_x, \xi) + \Pi\Theta(\tau_v, v_x, \xi), \tag{18}$$
$$u = \bar{u}(\tau, v_x, \xi) + \Pi u(\tau_v, v_x, \xi),$$

где $\tau_v = \tau/v_x$;

$$\bar{\Theta}(\tau, v_x, \xi) = \bar{\Theta}_0(\tau, \xi) + v_x \bar{\Theta}_1(\tau, \xi) + v_x^2 \bar{\Theta}_2(\tau, \xi) + \ldots;$$

$$\bar{u}(\tau, v_x, \xi) = \bar{u}_0(\tau, \xi) + v_x \bar{u}_1(\tau, \xi) + v_x^2 \bar{u}_2(\tau, \xi) + \ldots;$$

$$\Pi\Theta(\tau_v, v_x, \xi) = \Pi_0\Theta(\tau_v, \xi) + v_x \Pi_1\Theta(\tau_v, \xi) + v_x^2 \Pi_2\Theta(r_v, \xi) + \ldots;$$

$$\Pi u(\tau_v, v_x, \xi) = \Pi_0 u(\tau_v, \xi) + v_x \Pi_1 u(\tau_v, \xi) + v_x^2 \Pi_2 u(\tau_v, \xi) + \ldots.$$

Это позволит выделить особенность, вносимую в задачу сингулярным возмущением. Предпочтем, как более простой, первый путь решения.

На стадии инертного прогрева, полагая $v_x = 0$, получим вырожденную задачу

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \tilde{\Theta}}{\partial \xi^2} + \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi\, \partial \tau}, \ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + \delta \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \xi} = 0,$$

$$\xi = 0\colon\ \frac{\partial\tilde\Theta}{\partial\xi} = 1,\ \frac{\partial\tilde u}{\partial\xi} = \delta(1-\tilde\Theta),$$

$$\xi\to\infty\colon\ \tilde u = 0,\ \frac{\partial\tilde\Theta}{\partial\xi} = 0,$$

$$\tau = 0\colon\ \tilde\Theta = 1,\ \tilde u = 0,$$

в которой отброшено второе начальное условие для перемещений и решать которую легко, например, операционным методом:

$$\tilde\Theta = 1 - 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi\alpha}}\exp\left(-\frac{\alpha\xi^2}{4\tau}\right) + \xi\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\xi\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\tau}}\right), \tag{19}$$

$$\tilde u = -\frac{\delta}{\alpha}\left[\left(\tau + \frac{\alpha\xi}{2}\right)^2\mathrm{erfc}\left(\frac{\xi\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\tau}}\right) - \xi\sqrt{\alpha}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}\exp\left(-\frac{\alpha\xi^2}{4\tau}\right)\right], \tag{20}$$

где $\alpha = 1 + \frac{1-\sigma}{\sigma}\delta$. Выражение (19) совпадает с решением обычной задачи теплопроводности о нагреве потоком, если $\alpha = 1$, и использовано в оценках (11). Дальнейшее решение ищем в виде (18). Подставляя разложение в (12), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях v_x, причем отдельно для величин, зависящих от τ и τ_v, получим для нулевого приближения

$$\frac{\partial^2\Pi_0 u}{\partial\tau_v^2} = 0,\ \frac{\partial\Pi_0\Theta}{\partial\tau_v} = \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{\partial^2\Pi_0 u}{\partial\xi\,\partial\tau_v},$$

$$\frac{\partial\bar\Theta_0}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\bar\Theta_0}{\partial\xi^2} + \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{\partial^2\bar u_0}{\partial\xi\,\partial\tau},\ \frac{\partial^2\bar u_0}{\partial\xi^2} + \delta\frac{\partial\bar\Theta_0}{\partial\xi} = 0,$$

а для последующих —

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Pi_k\Theta}{\partial\tau_v} = \frac{\partial^2\Pi_{k-1}\Theta}{\partial\xi^2} + \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{\partial^2\Pi_k u}{\partial\xi\,\partial\tau_v},\\ \frac{\partial^2\Pi_{k-1}u}{\partial\xi^2} + \delta\frac{\partial\Pi_{k-1}\Theta}{\partial\xi} = \frac{\partial^2\Pi_k u}{\partial\tau_v^2},\\ \frac{\partial\bar\Theta_k}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\bar\Theta_k}{\partial\xi^2} + \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{\partial^2\bar u_k}{\partial\xi\,\partial\tau},\\ \frac{\partial^2\bar u_k}{\partial\xi^2} + \delta\frac{\partial\bar\Theta_k}{\partial\xi} = \frac{\partial^2\bar u_{k-1}}{\partial\tau^2}.\end{gathered} \tag{21}$$

Аналогичную процедуру проделываем для граничных и начальных условий. Для нулевого приближения $\bar u_0$, $\bar\Theta_0$ условия выбираем так (в силу допустимого произвола их выбора [7]), чтобы $\bar u_0$, $\bar\Theta_0$ совпали с решением вырожденной задачи (19), (20). Тогда для П-функций в нулевом приближении имеем

$$\frac{\partial\Pi_0\Theta}{\partial\xi} = 0,\ \frac{\partial\Pi_0 u}{\partial\xi} = -\delta\Pi_0\Theta,\ \xi = 0,$$

$$\frac{\partial\Pi_0\Theta}{\partial\xi} = 0,\ \Pi_0 u = 0,\ \xi\to\infty,$$

$$\Pi_0 u = 0,\ \partial\Pi_0 u/\partial\tau_v = 0,\ \Pi_0\Theta = 0,\ \tau = 0,$$

что дает $\Pi_0 u = 0$, $\Pi_0\Theta = 0$. Первое приближение находим, используя (21) и соответствующие условия при $k = 1$:

$$\bar\Theta_1 = \frac{\beta}{\alpha}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi\tau\alpha}} + \frac{\xi^2\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\pi\tau^3}}\right]\exp\left(-\frac{\alpha\xi^2}{4\tau}\right) - \frac{2\beta}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\pi\tau\alpha}},$$

$$\bar{u}_1 = \left[-\frac{2\delta\beta}{\alpha^2}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} + \frac{\delta}{\alpha^2}\beta^2\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\right]\exp\left(-\frac{\alpha\xi^2}{4\tau}\right) - \frac{\delta}{\alpha^2}(1-\beta\xi\sqrt{\alpha})\,\mathrm{erfc}\,\frac{\xi\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\tau}} +$$

$$+\left\{\frac{\delta}{\alpha^2} + \frac{\beta^2\delta}{\alpha\sqrt{\alpha}}\xi - \frac{\delta\beta}{\alpha^2\sqrt{\alpha}} + \frac{\delta}{\alpha^2}\beta^3\right\}\exp(\beta^2\tau - \beta\xi\sqrt{\alpha})\,\mathrm{erfc}\left(\frac{\xi\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{r}} - \beta\sqrt{\tau}\right),$$

$$\Pi_1\Theta \equiv 0,\ \Pi_1 u \equiv 0,\ \beta = \frac{\delta}{2\alpha}\frac{1-\sigma}{\sigma}.$$

Таким образом, с точностью до $0(v_x^2)$ решение задачи, соответствующее стадии инертного прогрева, определено:

$$\Theta_1 \approx \bar{\Theta}_0 + v_x\bar{\Theta}_1 + \ldots,\quad u_1 \approx \bar{u}_0 + v_x\bar{u}_1 + \ldots. \qquad (22)$$

Подставляя (22) в (13), (14), найдем деформации и напряжения

$$\varepsilon_{xx_1} \approx \left\{2\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} + \frac{v_x}{\sqrt{\pi\tau}}\left[\frac{\delta\beta}{\alpha\sqrt{\alpha}} - \frac{\delta\beta^2}{\alpha}\xi\right]\right\}\exp\left(-\frac{\alpha\xi^2}{4\tau}\right) - \delta\xi\,\mathrm{erfc}\,\frac{\xi\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\tau}} -$$

$$-v_x\frac{\delta\beta^2}{\alpha}\xi\exp(-\xi\sqrt{\alpha}\beta + \beta^2\tau)\,\mathrm{erfc}\left(-\beta\sqrt{\tau} + \frac{\xi\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\tau}}\right),$$

$$s_{x_1} \approx v_x\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\left[\frac{2\beta}{\alpha\sqrt{\alpha}} - \frac{\beta^2}{\alpha}\xi\right] + \frac{\beta\xi^2}{2\sqrt{\pi\alpha\tau^3}}\right\}\exp\left(-\frac{\alpha\xi^2}{4\tau}\right) -$$

$$-\frac{\beta^2}{\alpha}\xi v_x\exp(-\xi\sqrt{\alpha}\beta + \beta^2\tau)\,\mathrm{erfc}\left(-\beta\sqrt{\tau} + \frac{\xi\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\tau}}\right) - \frac{2\beta v_x}{\alpha\sqrt{\alpha\pi\tau}}.$$

В переменных, характерных для зоны химических реакций $x < x_р$:

$$\frac{q_s}{Qk_0\rho}\exp\left(-\frac{E}{RT_0}\right)\quad (x_п/x_р = w \gg 1), \qquad (23)$$

$$\Phi = \Theta_0(\Theta - \Theta_1),\ \xi_1 = w\xi,\ \tau_1 = \eta(\Theta_0)(\tau - \tau_0),$$

где τ_0 — время достижения на поверхности температуры T_0; $\eta(\Theta_0) \gg 1$, если $T \to T_0$, справедливо

$$\Theta_0,\ \Theta_1(\xi_1, \tau_1) = \Theta_0\left(1 - 2\sqrt{\frac{\tau_0}{\pi\alpha}}\right) - \frac{\tau_1}{\sqrt{\pi\tau_0\alpha}}\frac{\Theta_0}{\eta(\Theta_0)} + \xi_1\frac{\Theta_0}{w} - \frac{v_x\Theta_0}{\sqrt{\pi\tau_0\alpha}}\beta +$$

$$+0\left(\frac{\Theta_0}{\eta^2(\Theta_0)}, \frac{\Theta_0}{w^2}, \frac{v_x}{\eta(\Theta_0)}\right) \approx 0(1). \qquad (24)$$

Следовательно,

$$\Theta/\eta(\Theta_0) = 1,\ \Theta_0/w = A \sim 0(1),$$

$$\Theta_0\left(1 - 2\sqrt{\frac{\tau_0}{\pi\alpha}} - \frac{v_x}{\sqrt{\pi\tau_0\alpha}}\frac{\delta}{2\alpha^2}\frac{1-\sigma}{\sigma}\right) = B \sim 0(1), \qquad (25)$$

$$\Theta_0,\ \Theta_1 \approx B \sim \tau_1/\sqrt{\pi\tau_0\alpha} + A\xi_1, \qquad (26)$$

что аналогично [6]. С учетом (25) перемещения и деформации, и напряжения в зоне химических реакций в области прогрева в переменных ξ_1, τ_1 запишутся в виде

$$u_1 = \frac{\delta}{\alpha}\tau_0 - \frac{\delta}{\alpha}\frac{\tau_1}{\Theta_0} + \frac{2\xi_1\delta\sqrt{\tau_0}}{w\sqrt{\pi\alpha}} + v_x\left\{-\frac{2\delta\beta}{\alpha^2}\sqrt{\frac{\tau_0}{\pi}} - \frac{\delta}{\alpha^2} + \frac{\delta\beta^2}{\alpha^2\sqrt{\pi\tau_0}} -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\beta\sqrt{\pi\tau_0}}\left(\frac{\delta}{\alpha^2} - \frac{\delta\beta}{\alpha^2\sqrt{\alpha}} + \frac{\delta\beta^3}{\alpha^2}\right)\right\} + 0(v_x^2, v_x/\Theta_0, \Theta_0^{-2}),$$

$$\varepsilon_{xx_1} = \frac{\delta\beta}{\Theta_0} + \frac{\xi_1\delta}{\Theta_0} - \frac{\delta\tau_1}{\Theta_0\sqrt{\pi\tau_0\alpha}} + \frac{2v_x\delta\beta}{\alpha\sqrt{\alpha\pi\tau_0}} + 0(v_x^2, \Theta_0^{-1}, v_x\ldots),\ s_{x_1} = 0(v_x\Theta_0^{-1}).$$

Вводя новую переменную для перемещений в зоне химических реакций $z = D(\Theta_0)(u - u_1)$ и учитывая (23), (24), (26), получим

$$\frac{A}{w}\frac{\partial \Phi}{\partial \tau_1} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_1^2} - A \exp\left[-\Phi - B + \frac{\tau_1}{\sqrt{\pi \tau_0 \alpha}} - A\xi_1\right] + \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi_1 \partial \tau_1}\frac{\Theta_0^2}{wD(\Theta_0)}, \tag{27}$$

$$\frac{w^2}{D^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi_1^2} + \frac{\delta}{A}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} = v_x \frac{\Theta_0^2}{D(\Theta_0)}\frac{\partial^2 z}{\partial \tau_1^2}.$$

Чтобы удовлетворить условию квазистационарности зоны химических реакций, необходимо положить $D(\Theta_0) = \Theta_0^2$. Следовательно, при выполнении (25) с точностью до бесконечно малых величин для температуры Φ, аналогично [6], получим

$$\Phi = \ln A - B + \frac{\tau_1}{\sqrt{\pi \tau_0 \alpha}} - A\xi_1 + 2\ln\left[\frac{\operatorname{ch}\left(b \pm \sqrt{\frac{a}{2}}\,\xi_1\right)}{\sqrt{a}}\right], \tag{28}$$

$$b = \ln\sqrt{2A} + \frac{B}{2} - \frac{\tau_1}{2\sqrt{\pi \tau_0 \alpha}},$$

$$a = \frac{A^2}{2}\left[\frac{2A + \exp\left[-B + \tau_1/\sqrt{\pi \tau_0 \alpha}\right]}{2A - \exp\left[-B + \tau_1/\sqrt{\pi \tau_0 \alpha}\right]}\right]^2. \tag{29}$$

Второе уравнение системы (27) служит для вычисления перемещений в зоне химических реакций, для чего должны быть привлечены четыре дополнительных условия. Первое найдем из граничных условий задачи, начальные условия — из сращивания решения со стадией инертного прогрева, тогда система уравнений примет вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi_1^2} + \delta A \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} = v_x A^2 \frac{\partial^2 z}{\partial \tau_1^2},$$

$$\xi = 0:\ \frac{\partial z}{\partial \xi_1} = -\frac{\delta \Theta_0}{A}\Phi(0, \tau_1) = -2\delta A \ln\left[1 - \exp\left\{-B - \ln 2A + \frac{\tau_1}{\sqrt{\pi \tau_0 \alpha}}\right\}\right] = f_1(\tau_1),$$

$$\tau = 0:\ z(\xi_1, \tau_1 \to -\Theta_0 \tau_0) = -\Theta_0^2 u_1(\xi_1, \tau_1 \to 0) = -\Theta_0^2\left\{-\frac{\delta}{\alpha}\tau_0 + \right. \tag{30}$$

$$\left. + v_x\left[-\frac{2\delta\beta}{\alpha^2}\sqrt{\frac{\tau_0}{\pi}} - \frac{\delta}{\alpha^2} + \frac{\delta}{\alpha^2}\frac{\beta^2}{\sqrt{\pi \tau_0}} - \frac{1}{\beta\sqrt{\pi \tau_0}}\left(\frac{\delta}{\alpha^2} - \frac{\delta\beta}{\alpha^2\sqrt{\alpha}} + \frac{\delta\beta^2}{\alpha^2}\right)\right]\right\} = -\beta_0 \Theta_0^2,$$

$$\partial z(\xi_1, \tau_1 \to -\Theta_0 \tau_0)/\partial \tau_1 = \Theta_0 \partial u(\xi_1, \tau_1 \to 0)/\partial \tau = -\delta/\alpha.$$

Второе условие по пространственной координате найдем позже из сращивания решения (30) с решением для перемещений вне зоны химических реакций, т. е. $\xi_1 \gg 1$.

В принципе, для более корректного решения задачи $u_1(\xi_1, \tau_1 \to 0)$ нужно записать так, чтобы выполнилось соотношение $\Theta_0^2 u_1(\xi_1, \tau_1 \to 0) \approx \approx 0(1)$. Ограничимся приближением (30), где учтено $\xi_1 \ll 1$ в начальном условии. Это позволит избежать громоздких выкладок.

В области $\xi_1 \gg 1$ перейдем к новым переменным $\bar{z} = z$, $\varphi = \Phi\Theta_0$, $(\sqrt{\Theta_0}/w)\xi_1 = \bar{\xi}_1$, тогда из (27) получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{\xi}_1^2} - \frac{w}{\Theta_0}\exp[-\Theta_0 \Theta] + \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \bar{\xi}_1 \partial \tau_1}\frac{1}{\Theta_0\sqrt{\Theta_0}},$$

$$\frac{1}{\Theta_0}\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \bar{\xi}_1^2} + \delta\sqrt{\Theta_0}\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\xi}_1} = v_x \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \tau_1^2}. \tag{31}$$

Для температуры находим [6]

$$\varphi(\tau_1, \bar{\xi}_1) = -\int\limits_{\Theta_0\tau_0}^{\tau_1} f_2(y - \Theta_0\tau_0)\frac{\exp\left(-\xi_1^2/4(\tau_1 - y)\right)}{\sqrt{\pi(\tau_1 - y)}}\,dy\eta(\tau_1 - \tau_0\Theta_0), \qquad (32)$$

$$f_2(\tau_1) = \frac{\partial\varphi(0, \tau_1)}{\partial\xi_1} = \frac{1}{\sqrt{\Theta_0}}\frac{2}{2A\exp\left(B - \tau_1/\sqrt{\pi\tau_0\alpha}\right) - 1} = \frac{w}{\Theta_0^{3/2}}\frac{\partial\Phi(\infty, \tau_1)}{\partial\xi_1}.$$

Перемещения при $\xi_1 \gg 1$ найдем, зная поле температур (32). Начальные условия определяем из сращивания со стадией инертного прогрева при $\xi_1 \gg 1$:

$$\bar{z}(\xi_1, -\tau_0\Theta_0) = 0, \frac{\partial\bar{z}}{\partial\tau_1}(\xi_1, -\Theta_0\tau_0) = 0, \qquad (33)$$

условие при $\bar{\xi}_1 \to \infty$ — из граничного условия задачи

$$\bar{z}(\infty, \tau_1) = 0. \qquad (34)$$

Оставшиеся константы интегрирования при решении (30), (31), (33), (34) сможем найти из условий

$$z(\infty, \tau_1) = \bar{z}(0, \tau_1), \quad \frac{\partial z(\infty, \tau_1)}{\partial\xi_1} = \frac{\partial\bar{z}(0, \tau_1)}{\partial\bar{\xi}_1}\frac{\sqrt{\Theta_0}}{w}. \qquad (35)$$

Точное решение задачи (30) не представляется возможным. Приближенное решение можно найти, например, методом [7]. Для удобства анализа предпочтительнее более простой путь. Так как для области химических реакций характерно $\xi_1 \ll 1$, представим $(\partial\Phi/\partial\xi_1)$ в виде разложения в ряд Тейлора в окрестности $\xi_1 = 0$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_1} \approx v_1(\tau_1) + v_2(\tau_1)\xi_1 + \ldots \approx v_1(\tau_1) + v_2(\tau_1)\left(1 - e^{-\xi_1}\right),$$

$$v_1(\tau_1) = -A + \sqrt{2a}\,\mathrm{th}(b); \quad v_2(\tau_1) = a(1 - \mathrm{th}^2 b).$$

Применяя к задачам (30) и (31), (33)—(35) операционный метод, найдем перемещения в зоне химических реакций

$$z \approx -\Theta_0^2\beta_0 - \frac{\delta}{\alpha}\tau_1 + \frac{\delta}{v_x A}\eta(\tau_1 - \tau_0\Theta_0)\int\limits_{\tau_0\Theta_0}^{\tau_1}(\tau_1 - y)\left[v_1(y - \tau_0\Theta_0) + \right.$$

$$\left. + v_2(y - \tau_0\Theta_0)\right]dy - \frac{\delta}{\sqrt{v_x}}\exp(-\xi_1)\eta(\tau_1 - \Theta_0\tau_0)\int\limits_{\tau_0\Theta_0}^{\tau_1} v_2(y - \tau_0\Theta_0)\times$$

$$\times \mathrm{sh}\frac{\tau_1 - y}{A\sqrt{v_x}}dy + \eta(\tau_1 - \gamma_1)\int\limits_{\gamma_1}^{\tau_1}\left\{\frac{1}{A\sqrt{v_x}}\eta(\tau_1 - y)f_1(y - \gamma_1) - \right.$$

$$\left. - \frac{\delta}{\sqrt{v_x}}v_2(y - \gamma_2)\left[\mathrm{ch}\frac{\tau_1 - y}{A\sqrt{v_x}} - \eta(\tau_1 - \bar{y})\right]\right\}dy \qquad (36)$$

и вдали от зоны химических реакций

$$z \approx \eta(\tau_1 - \gamma_2)\left\{-\Theta_0^2\beta_0 - \frac{\delta}{\alpha}\tau_1 + \frac{\delta}{v_x A}\int\limits_{\gamma_2}^{\tau_1}(\tau_1 - y)\left[v_1(y - \gamma_2) + v_2(y - \gamma_2)\right]dy - \right.$$

$$- \frac{\delta}{\sqrt{v_x}}\int\limits_{\gamma_2}^{\tau_1} v_2(y - \gamma_2)\,\mathrm{sh}\frac{\tau_1 - y}{A\sqrt{v_x}}dy + \frac{\delta}{\sqrt{\Theta_0}}\int\limits_{\gamma_2}^{\tau_1} f_2(y - \gamma_2)\left[\eta(\tau_1 - y) - \right.$$

$$- \exp\left(\frac{\tau_1 - y}{v_x\Theta_0}\right)\Bigg] dy + \frac{\delta}{v_x\Theta_0\sqrt{\Theta_0}} \int\limits_{\gamma_2}^{\tau_1} f_2(y-\gamma_2) \int\limits_{\gamma_2}^{\tau_1 - y} \exp\left(\frac{\tau_1 - y - s}{v_x\Theta_0}\right) \times$$

$$\times \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi_1}{2\sqrt{s}}\right) ds\, dy\Bigg\}, \qquad (37)$$

$$\gamma_1 = \tau_0\Theta_0 + A\xi_1\sqrt{v_x}, \quad \gamma_2 = \tau_0\Theta_0 + \xi_1\sqrt{v_x\Theta_0}.$$

Таким образом, поле температур и перемещений в квазистационарном режиме полностью определено. Теперь, используя (14), (28), (29), (32), (36), (37), найдем деформации и напряжения. Так, в области $\xi_1 \ll 1$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{A\Theta_0}\frac{\partial z}{\partial \xi_1} + \varepsilon_{xx_1} = \frac{1}{A\Theta_0} f_1(\tau_1 - \gamma_1)\,\eta(\tau_1 - \gamma_1) + \frac{\delta}{A\Theta_0\sqrt{v_x}}[F(\tau_1, \Theta_0, \tau_0) -$$

$$- F(\tau_1, \gamma)] + \varepsilon_{xx_1}, \quad s_x = \frac{1}{A\Theta_0\delta} f_1(\tau_1 - \gamma_1)\,\eta(\tau_1 - \gamma_1) + \frac{1}{A\Theta_0\sqrt{v_x}}[F(\tau_1, \Theta_0, \tau_0) -$$

$$- F(\tau_1, \gamma_1)] + \frac{\ln A}{\Theta_0} + \frac{2}{\Theta_0}\ln\left[\frac{\operatorname{ch}\left(b + \sqrt{\frac{a}{2}}\,\xi_1\right)}{\sqrt{a}}\right] - 1 + \frac{\varepsilon_{xx_1}}{\delta}, \qquad (38)$$

где $F(\tau_1, p) = \eta(\tau_1 - p)\int\limits_p^{\tau_1} v_2(y-p)\operatorname{sh}\frac{\tau_1 - y}{A\sqrt{v_x}}\,dy$; a, b — функции.

Время прогрева τ_0 и связь между постоянными A и B найдем по определению τ_0 (t_0 — время достижения поверхностью температуры T_0) из (24):

$$\tau_0 = \frac{\pi\alpha}{4}\left[\left(1 - \frac{B}{\Theta_0}\right)\left(1 + \frac{v_x\delta}{\pi\alpha^3(1 - B/\Theta_0)}\frac{1-\sigma}{\sigma}\right)\right]^2, \qquad (39)$$

$$B = -2\ln A\,[\sqrt{1 + 2/A} - 1].$$

Если $\alpha = 1$ и $v_x = 0$ (т. е. термические напряжения не учитываются), то (39) формально совпадет с выражением для τ_0, полученным в [6].

Примем за момент воспламенения время неограниченного роста температуры на границе $\Phi(0, \tau_1 \to \tau_{1*}) = -\infty$, тогда, используя (28), (29), найдем

$$\tau_{1*} = \sqrt{\pi\tau_0\alpha}\,\ln\frac{1}{A + 1 - A\sqrt{1 + 2/A}},$$

что отличается от результата [6] наличием множителя $\sqrt{\alpha}$. Переходя к старой переменной τ_1, получим

$$\tau_3 = \tau_{1*}/\Theta_0 + \tau_0. \qquad (40)$$

Для определения постоянной A в [6] используется условие $\Theta_0\Theta_1(0, \tau_{1*}) = 0$, которое записано на основании результатов численного счета [8]. Это дает $A = 1/2$, $B \approx 0{,}962$. Заметим, что для рассматриваемой задачи это условие может и не быть справедливым и остается предположением.

При $v_x \to 0$, как следует из (36), (38), вероятно возникновение больших перемещений, деформаций и напряжений, что может привести к разрушению вещества до момента τ_3. В этом случае использование (40) неправомерно. Время разрушения вполне естественно определять из условия достижения предельно допустимых напряжений $\sigma_{пр}$ (или $s_{пр} = \sigma_{пр}/\sigma_п$), например в точке $\xi_р = x_р/x_п = 1/w$. Тогда для времени разрушения $\tau_р$ из (38) получим сложное трансцендентное уравнение. Если, аналогично условию зажигания, принять за $\tau_р$ время резкого роста s_x, из

(38) получим асимптотическое время разрушения $\tau_p^* = B\sqrt{\pi\tau_0\alpha}/\Theta_0 + \tau_0$, которое совпадает со временем зажигания в квазистационарном режиме, что и следовало ожидать (напряжения в веществе порождены именно температурным полем). Так как к моменту τ_0 напряжения в зоне химических реакций бесконечно малы, то вполне разумно записать

$$\tau_0 < \tau_p < \tau_з.$$

Адиабатический режим предполагает, что при некоторой T_* вклад тепла от экзотермических химических реакций в общий теплобаланс системы становится определяющим. Соответствующий временной масштаб — период адиабатической индукции

$$t_{ад} = \frac{c_\sigma RT_*^2}{EQk_0}\exp\left(\frac{E}{RT_*}\right).$$

Соотношения

$$\frac{t_{хр}}{t_{ад}} = \frac{t_п}{\Theta_0 t_{ад}} = klwD \gg 1,$$

$$\frac{t_п}{t_{ад}} = klwD\Theta_0 \gg 1,$$

$$(D = \exp[E(T_* - T_0)/(RT_*T_0)] \gg 1,\ k = (T_0/T_*)^2 \sim 0(1),\ l = c_\varepsilon/c_\sigma)$$

позволяют построить, как и в [6], два типа асимптотик. В первом случае, переходя в (12) к безразмерным переменным

$$z_a = \Psi_z,\ \tau_a = klwD(\tau_{1*} - \tau_1),\ \xi_a = \Theta_0\xi_1,\ \Phi_a = \Phi + \ln D,$$

получим

$$\frac{\partial\Phi_a}{\partial\tau_a} = -\frac{\Theta_0^2}{Ak\,Dl}\frac{\partial^2\Phi_a}{\partial\xi_a^2} + \frac{1}{kl}\exp\left[-\ln D - \frac{\Theta_0\Theta(\xi_a,\tau_a)}{1-\sigma\Theta(\xi_a,\tau_a)}\right] + \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{\partial^2 z_a}{\partial\xi_a\partial\tau_a}\frac{\Theta_0}{A\Psi},$$

$$\frac{\partial^2 z_a}{\partial\xi_a^2} + \frac{\Psi\delta A}{\Theta_0}\frac{\partial\Phi_a}{\partial\xi_a} = v_x(klD)^2\frac{\partial^2 z_a}{\partial\tau_a^2}. \tag{41}$$

Следовательно, чтобы тепловыделение от химической реакции было определяющим, положим $D = \Theta_0^3$, $\Psi = \Theta_0^3$, что дает k и T_*:

$$\sqrt{k} = 1 - 3\sigma\ln(\Theta_0)/\Theta_0.$$

Второе уравнение системы (41) при условии $v_x(klD)^2 \gg 1$ с точностью до малых величин преобразуется к более простому виду:

$$\frac{\partial^2 z_a}{\partial\tau_a^2} = -\delta A\frac{\partial\Phi_a}{\partial\xi_a}. \tag{42}$$

В результате для температуры, аналогично [6], получим

$$\Phi_a = (2-\sqrt{k})\ln\left[\frac{C}{2-\sqrt{k}} + \frac{\tau_a}{kl(2-\sqrt{k})}\exp\left\{-\frac{B + (\ln D)^2\sigma/\Theta_0 - \tau_{1*}/\sqrt{\pi\tau_0\alpha}}{2-\sqrt{k}}\right\}\right], \tag{43}$$

$$C = (2-\sqrt{k})\left\{D^{\frac{1}{2-\sqrt{k}}}\left[1 - \exp\left(-B + \frac{\tau_{1*}}{\sqrt{\pi\tau_0\alpha}}\right)\right]^{\frac{2}{2-\sqrt{k}}} - \frac{wD\tau_{1*}}{2-\sqrt{k}}\exp\left[-\frac{B - \tau_{1*}/\sqrt{\pi\tau_0\alpha} + \sigma(\ln D)^2/\Theta_0}{2-\sqrt{k}}\right]\right\} \tag{44}$$

находим из условия сращивания (43) с квазистационарной стадией. С учетом (43), (44) из (42) имеем

$$z_a = C_1\tau_a + C_2. \tag{45}$$

Пренебрегая величиной $A\sqrt{v_x}\xi_a/\Theta_0$ по сравнению с $\tau_0\Theta_0$ и отличием $\exp(-\xi_a/\Theta_0)$ от единицы ($\xi_a \ll 1$) из (36) и условия сращивания (45) с квазистационарной стадией, для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 получим

$$z_a(\xi_a, \tau_a \to kwDl\tau_{1*}) = \Theta_0^2 z(\xi_a, \tau_a = 0) = \varkappa_1,$$
$$\frac{\partial z_a(\xi_a, \tau_a \to kwDl\tau_{1*})}{\partial \tau_a} = -\frac{1}{kw\Theta_0 l}\frac{\partial z(\xi_a, \tau_a = 0)}{\partial \tau_1} = \varkappa_2. \qquad (45')$$

Напряжения в веществе и асимптотическое время разрушения, как и в квазистационарном режиме, будут определяться поведением температуры (43).

Принимая за время воспламенения время, при котором температура на границе стремится к бесконечности, получим для его вычисления трансцендентное уравнение

$$\frac{w\tau_{1*}}{2-\sqrt{k}} = \left[2\,\mathrm{sh}\left(\frac{B}{2} - \frac{\tau_{1*}}{2\sqrt{\pi\tau_0\alpha}}\right)\right]^{\frac{2}{2-\sqrt{k}}}, \qquad (46)$$

меньший корень которого находим с помощью итераций, используя $\tau_{1*0} = 0$ в качестве нулевого приближения. Время зажигания в переменных прогрева найдем из (40).

В более общем случае, т. е. когда условие $v_x(klD)^2 \gg 1$ не выполнено, для определения перемещений требуется решить уравнение

$$\frac{\partial^2 z_a}{\partial \xi_a^2} = v_x(klD)^2\frac{\partial^2 z_a}{\partial \tau_a^2}$$

с (45′) по времени и условием

$$\xi_a = 0{:}\ \frac{\partial z_a}{\partial \xi_a} = -\delta\Theta_0 A(\Phi_a - \ln D),\ z_a(\xi_a \to \infty) = \Theta_0^2\bar{z}(\xi_1 \to 0)$$

по пространственной координате, где $\bar{z}$ — перемещения вне зоны химических реакций в адиабатических переменных; Φ_a — температура в зоне химических реакций в адиабатическом периоде. Задачу легко решить, например, операционным методом, переходя к новой переменной $t = \tau_a - kwDl\tau_{1*}$ и применяя вторую теорему смещения [9]:

$$z_a = \varkappa_1 + \varkappa_2\tau_a + \frac{\delta\Theta_0 A}{klD\sqrt{v_x}}\eta(\tau_a - klD\sqrt{v_x}\xi_a)\int\limits_0^{\tau_a - klD\sqrt{v_x}\xi_a}[\Phi_a(y +$$
$$+ klDw\tau_{1*}) - \ln D]\,\eta(\tau_a - klD\sqrt{v_x}\xi_a - y)\,dy.$$

Используя выражения для перемещений и температуры, найдем напряжения в зоне химических реакций в смешанном режиме

$$s_x \approx \left[\frac{1}{A\Theta_0^2}\frac{\partial z_a}{\partial \xi_a} + \varepsilon_{xx_1}\right]\frac{1}{\delta} - 1 + \frac{\Phi_a(\xi_a, \tau_a) - \ln D}{\Theta_0} + \Theta_1(\xi_a, \tau_a) =$$
$$= -\frac{1}{v_x\Theta_0(klD)^2}\eta(\tau_a - klD\sqrt{v_x}\xi_a)\int\limits_0^{\tau_a - klD\sqrt{v_x}\xi_a}\eta(\tau_a - klD\sqrt{v_x}\xi_a - y)\times$$
$$\times[\Phi_a(y + kwDl\tau_{1*}) - \ln D]\,dy + \frac{B}{\Theta_0} - \frac{\tau_{1*}}{\Theta_0\sqrt{\pi\tau_0\alpha}} + \frac{2v_x\delta\beta}{\alpha\sqrt{\pi\tau_0\alpha}} -$$
$$-1 - \frac{\ln D}{\Theta_0} + B + \frac{A\xi_a}{\Theta_0} - \frac{\tau_{1*}}{\sqrt{\pi\tau_0\alpha}} + \frac{2-\sqrt{k}}{\Theta_0}\ln\left[\frac{C}{2-\sqrt{k}} +\right.$$

$$+\frac{\tau_a}{kl(2-\sqrt{k})}\exp\left\{-\frac{B+(\ln D)^2\sigma/\Theta_0-\tau_{1*}/\sqrt{\pi\tau_0\alpha}}{2-\sqrt{k}}\right\}\Bigg], \tag{47}$$

где C — вычисляется по (44).

Видно, что в зоне химических реакций возникает волна напряжений, которая затухает при $\xi_a \gg \tau_a/klD\sqrt{v_x}$. Асимптотическое время разрушения, как показывает анализ (47) и что следовало ожидать, совпадает со временем зажигания τ_{1*}, которое находим из (46). (Время достижения предельно допустимых напряжений, разумеется, меньше τ_{1*}.) Таким образом, поле температуры, перемещений и характерные времена развития процесса в смешанном режиме также определены.

В чисто адиабатическом режиме переходим к переменной $\tau_a = kwDl\Theta_0(\tau_з-\tau)$. Остальные масштабы остаются прежними: $\xi_a=\Theta_0 w\xi$, $\Phi_a=\Theta_0(\Theta-\Theta_1)+\ln D$, $z_a=\Theta_0^4(u-u_1)$. С точностью до малых величин система уравнений (12) принимает вид, подобный смешанному режиму:

$$\frac{\partial\Phi_a}{\partial\tau_a}-\frac{1}{k}\exp\left[-\frac{\Phi_a+\sigma\ln^2 D/\Theta_0+B_*}{2-\sqrt{k}}\right],$$

$$\frac{\partial^2 z_a}{\partial\xi_a^2}=v_x(klD\Theta_0)^2\frac{\partial^2 z_a}{\partial\tau_a^2},$$

где $B_*=\Theta_0\left(1-2\sqrt{\frac{\tau_з}{\pi\alpha}}\right)-v_x\Theta_0\frac{\beta}{\alpha\sqrt{\pi\tau_0\alpha}}$. Постоянные интегрирования теперь находим из сращивания со стадией инертного прогрева (22). В результате имеем

$$\Phi_a=(2-\sqrt{k})\ln\left[\frac{C}{2-\sqrt{k}}+\frac{\tau_a}{kl(2-\sqrt{k})}\exp\left\{-\frac{B_*+(\ln D)^2\sigma/\Theta_0}{2-\sqrt{k}}\right\}\right], \tag{48}$$

$$C=(2-\sqrt{k})D^{\frac{1}{2-\sqrt{k}}}\left\{1-\frac{w\Theta_0\tau_з}{2-\sqrt{k}}\exp\left(-\frac{B_*}{2-\sqrt{k}}\right)\right\}.$$

Для перемещений

$$z_a=-\Theta_0^4\beta_*+\int_0^{\tau_a-\gamma_a}\eta(\tau_a-\gamma_a-y)\,[\Phi_a(y+kwDl\Theta_0)-$$

$$-\ln D]\,dy\,\frac{\delta\Theta_0}{klD\sqrt{v_x}}\,\eta(\tau_a-\gamma_a),\ \gamma_a=klD\Theta_0\sqrt{v_x}\xi_a, \tag{49}$$

$$\beta_*=-\frac{\delta}{\alpha}\tau_з+v_x\frac{\delta}{\alpha^2}\left\{-2\beta\sqrt{\frac{\tau_з}{\pi}}-1+\frac{\beta^2}{\sqrt{\pi\tau_з}}-\frac{1}{\sqrt{\pi\tau_з}}\left[\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}+\beta\right]\right\}.$$

Опять, определяя момент зажигания как $\Phi_a(\tau_a\to 0)\to-\infty$, получим трансцендентное уравнение для $\tau_з$

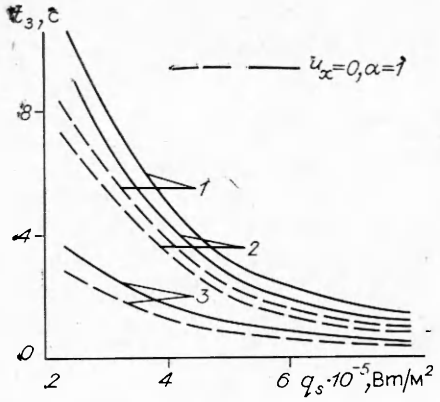
$$\frac{w\Theta_0}{2-\sqrt{k}}\tau_з=\exp\left\{\frac{\Theta_0\left(1-2\sqrt{\tau_з/\pi\alpha}\right)+v_x\Theta_0\beta/\alpha\sqrt{\pi\tau_0\alpha}}{2-\sqrt{k}}\right\}.$$

Используя (48), (49) и обобщенный закон Гука, найдем напряжения в зоне химических реакций (в остальной области справедливы (32), (37))

$$s_x=-\frac{1}{\Theta_0 v_x[klD\Theta_0]^2}\int_0^{\tau_a-\gamma_a}(\tau_a-\gamma_a-y)[\Phi_a(y+klDw\Theta_0)-\ln D]\,dy\,\eta(\tau_a-\gamma_a)+$$

$$+\frac{\Phi_a(\tau_a)-\ln D}{\Theta_0}-4\sqrt{\frac{\tau_з}{\pi\alpha}}+\frac{v_x\beta^2}{\alpha\sqrt{\alpha\pi\tau_0}}+1,$$

откуда следует, что, как и в предыдущих случаях, асимптотическое время разрушения совпадает с $\tau_з$.



Сделаем некоторые оценки. Примем следующие значения постоянных: $\alpha_т = 8{,}5 \cdot 10^{-5}$ град$^{-1}$, $c_\varepsilon = 8{,}33 \cdot 10^2$ Дж/ /(кг · K), $\rho = 2 \cdot 10^3$ кг/м^3, $\lambda_т = 0{,}2$ Вт/(м · K), $\mu = 8{,}4 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\lambda = 1{,}3 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $c_\sigma = 1{,}5 \cdot 10^3$ Дж/ /(кг · K), $T_н = 300$ K, $R = 8{,}31$ Дж/ /(моль · K), $E = 1{,}5 \cdot 10^5$ Дж/моль, $Qk_0 = 1{,}1 \cdot 10^{20}$ Дж/(кг · с). Это дает $\alpha \approx 1{,}31$. В рассматриваемом примере $v_x \approx 0$ $(10^{-15} - 10^{-17}$ для различных значений $q_s)$, что существенно упрощает расчеты времени зажигания (и асимптотического времени разрушения), но увеличивает вероятность достижения $\sigma_{пр}$.

На рисунке приведены зависимости $t_з = t_Г^*$ от потока, рассчитанные по формулам для квазистационарного (*1*), адиабатического (*3*) и для смешанного (*2*) режимов. Штриховыми линиями показано соответствующее время зажигания для задачи без учета термонапряжений. Видно, что учет эффекта связности полей деформации и температуры приводит к увеличению $t_з$ во всех режимах. Например, для квазистационарного режима при $\alpha \approx 1{,}31$ $t_з$ увеличивается в среднем на 30 % для всех рассмотренных значений q_s (и Θ_0). Соотношения между $t_з$, полученными в различных предположениях, аналогичны [6].

Возможность разрушения по $\tau_з$, разумеется, определяется максимальным напряжением и временем его воздействия. Например, в чисто адиабатическом режиме $s_{x\max} \sim -\Theta_0^{-9} v_x$. Учитывая полученное выше значение v_x и принимая $\Theta_0 = 20$, найдем $\sigma_{x\max} \approx -(10^{14} \div 10^{16})$ Н/м^2. Следовательно, нельзя однозначно сказать, с чем мы имеем дело: с разрушением или с зажиганием.

Отметим, что применяя метод пограничных функций к решению задачи (12), (15)—(17), найдем для нулевого приближения $\Pi_0\Theta \equiv \Pi_0 u = 0$. Функции $\overline{\Theta}_0$, $\overline{u}_0$ являются решениями вырожденной задачи (12) $(v_x = 0)$, если рассуждения аналогичны предыдущему. Следующее приближение для П-функций будет удовлетворять системе

$$\frac{\partial \Pi_1 \Theta}{\partial \tau_v} = \frac{\partial^2 \Pi_0 \Theta}{\partial \xi^2} - w \Pi_0 F + \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{\partial^2 \Pi_1 u}{\partial \xi \, \partial \tau_v},$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_0 u}{\partial \xi^2} + 8 \frac{\partial \Pi_0 \Theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \Pi_1 u}{\partial \tau_v^2},$$

$$\Pi_0 F = \exp\left[-\Theta_0 \frac{\overline{\Theta}_0 + \Pi_0 \Theta}{1 - \sigma(\overline{\Theta}_0 + \Pi_0 \Theta)}\right] - \exp\left[-\frac{\Theta_0 \overline{\Theta}_0}{1 - \sigma \overline{\Theta}_0}\right],$$

что опять совпадает с предыдущим решением. (В области, где существенны химические реакции, решение должно строиться иначе.)

Рассмотренная выше задача — это первая попытка оценить влияние напряжений на характеристики зажигания конденсированного вещества. Предположения о свойствах веществ достаточно грубые. В действительности с повышением температуры меняются упругие характеристики, особенно в зоне химических реакций; возникающие в веществе термические напряжения, как показано, могут привести к его разрушению, а следовательно, к смене механизма инициирования химической реакции, к различного рода неустойчивости и т. п. Все это выходит за рамки настоящей работы и является предметом дальнейших исследований.

В заключение приношу благодарность В. И. Тараканову за поддержку в работе и Р. С. Буркиной за ценные рекомендации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боли Б., Уэйнер Дж.** Теория температурных напряжений.— М.: Мир, 1964.
2. **Коваленко А. Д.** Термоупругость.— Киев: Наук. думка, 1975.
3. **Вилюнов В. Н.** Теория зажигания конденсированных веществ.— Новосибриск: Наука, 1984.
4. **Даниловская В. И.** // ИФЖ.— 1961.— 1, № 4.— С. 342.
5. **Новацкий В.** Динамические задачи термоупругости.— М.: Мир, 1970.
6. **Буркина Р. С., Вилюнов В. Н.** Асимптотика задач теории горения.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1982.
7. **Васильева А. Б., Бутузов В. Т.** Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений.— М.: Наука, 1973.
8. **Вилюнов В. Н.** К тепловой теории зажигания // ФГВ.— 1966.— 2, № 2.— С. 77—82.
9. **Деч Г.** Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования.— М.: Наука, 1971.

г. Томск *Поступила в редакцию 13/XII 1990*

УДК 536.46

В. А. Голубев, В. Ф. Проскудин, П. Г. Бережко, А. Я. Малышев, И. К. Кремзуков, Е. Н. Беляев, В. В. Островский

О ВЛИЯНИИ УСАДКИ ШЛАКОВ ПОДЖИГАЮЩЕЙ ТАБЛЕТКИ НА ПАРАМЕТРЫ ЗАЖИГАНИЯ

На примере безгазовой системы $Cr_2O_3 + 2Al + 4B$ показано, что усадка шлаков поджигающей таблетки, протекая достаточно быстро, может оказывать существенное влияние на параметры зажигания, зависящие в том числе и от высоты таблетки.

Инициирование реакции горения безгазовой системы тепловой волной горящего воспламенителя, имеющее важное практическое значение, изучено достаточно детально [1—8]. Но во всех работах рассмотрен только один частный случай, когда во время всего процесса перехода волны горения через границу раздела поджигающая таблетка — образец продукты сгорания воспламенителя неподвижны. Вместе с тем известно, что горение базгазовых систем может сопровождаться перемещением вещества (как самопроизвольным [9], так и вынужденным [10]), а для многих систем характерна усадка образовавшегося продукта [11] (т. е. перемещение вещества уже после сгорания).

Указанные обстоятельства применительно к поджигающей таблетке ставят ряд вопросов, связанных с вероятными существенными изменениями условий передачи тепла в поджигаемый образец. В частности, на параметры зажигания большое влияние может оказывать усадка шлаков поджигающей таблетки, если время протекания этих двух процессов окажется одного порядка (например, из-за наличия между воспламенителем и поджигаемым образцом инертной преграды).

Для экспериментального изучения процесса усадки и его влияния на параметры зажигания выбрана безгазовая система $Cr_2O_3 + 2Al + 4B$, которую получали путем тщательного перемешивания исходных порошкообразных компонентов в шаровой мельнице. Лабораторная сборка для сжигания (рис. 1, *а*) состояла из стального цилиндра *4*, где в донной части установ-

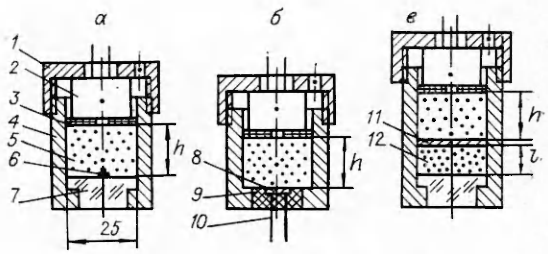


Рис. 1. Лабораторные сборки для сжигания.