

2. Волков П. К., Кузнецов Б. Г. Численное решение задачи о стационарном обтекании вязкой жидкостью газовой полости в трубе // ЧММСС.— 1982.— Т. 13, № 5.
3. Волков П. К. Всплывание газового пузыря в трубе, заполненной вязкой жидкостью // ПМТФ.— 1989.— № 6.
4. Спроченко В. П. Численное решение одной задачи о течении вязкой несжимаемой жидкости в двувязной области // ЧММСС.— Новосибирск.— 1977.— Т. 8, № 1.
5. Christov S. I., Volkov P. K. Numerical investigation of the steady viscous flow past a stationary deformable bubble // J. Fluid Mech.— 1985.— V. 158.— P. 341.
6. Том А., Эйнтл К. Числовые расчеты полей в технике и физике.— М.; Л.: Энергия, 1964.
7. Таруни Е. Л. Оптимизация неявных схем для уравнений Навье—Стокса в переменных функции тока и вихря скорости // V Всесоюз. семинар по численным методам механики вязкой жидкости.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985.— Т. 1.
8. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений.— М.: Наука, 1978.
9. Bhaga D., Weber M. E. Bubbles in viscous liquids: shapes, wakes and velocities // J. Fluid Mech.— 1981.— V. 105.— P. 61.

г. Новосибирск

Поступила 25/X 1988 г.

УДК 532.72

Т. А. Боднарь

УСТОЙЧИВОСТЬ АДИАБАТИЧЕСКОГО ПРОТОЧНОГО ХИМИЧЕСКОГО РЕАКТОРА

Численные исследования (см., например, [1—3]) показали возможность существования множества стационарных режимов работы химических реакторов с распределенными параметрами. Вместе с тем, как указал Н. Н. Моисеев в послесловии к [4], численные методы изучения систем с распределенными параметрами перестают работать в окрестностях точек бифуркации, в которых решение теряет единственность. Разработка численных методов постбифуркационного анализа, позволяющих найти все решения, выходящие из точек бифуркации, сопряжена с огромными трудностями, особенно в случае многомерных или многофакторных задач. Это в полной мере относится к численным исследованиям химических реакторов с распределенными параметрами.

В настоящей работе в рамках теории [4] предлагается метод анализа устойчивости стационарных решений системы уравнений в частных производных, описывающей работу проточного химического реактора с адиабатическим изменением температуры. Метод основан на редукции размерности бесконечномерной задачи за счет использования проекций ее решений на пространство собственных функций и альтернативы Фредгольма. Данным методом найдены нулевые, бифуркационное и изолированные (разрушающие бифуркацию) решения и определена их устойчивость. Анализ устойчивости полученных в пространстве размерности R^2 решений основан на теоремах Ляпунова и утверждении Хопфа об эквивалентности строгой потери устойчивости и двойной точки бифуркации [5].

Предполагается, что скорость тепловыделения в реакторе является непрерывной функцией $\varphi(c, T)$ от температуры и концентраций реагирующих веществ и $\partial\varphi(c, T)/\partial T > 0$. Такое предположение справедливо для любых реакций с арренпусовской скоростью выделения тепла.

1. Постановка задачи. Математическое описание процесса в проточном химическом реакторе имеет вид [6]

$$(1.1) \quad \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} - w \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + \frac{Qz}{c_p} \varphi(c, T);$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2} - w \frac{\partial c(x, t)}{\partial x} - z\varphi(c, T),$$

где x — координата; t — время; T — температура; κ — теплопроводность; c — концентрация; Q — тепловой эффект реакции, отнесенный к единице массы; z — предэкспонент; E — энергия активации; c_p — удельная теплоемкость; R — универсальная газовая постоянная; w — скорость потока; D — коэффициент диффузии; $\varphi(c, T)$ — непрерывная функция от концентраций и температуры. Не нарушая общности, предполагаем, что в реакторе происходит реакция типа Лэнгмюра —

Хиншельвуда с арренусовской скоростью выделения тепла:

$$(1.3) \quad \varphi(c, T) = \frac{k_1 c \exp(-E(RT)^{-1})}{(1 + k_2 c)^2}$$

(k_1, k_2 — постоянные).

В качестве граничных и начальных условий использованы соотношения

$$(1.4) \quad \partial T(0, t)/\partial x = -\alpha(T(0, t) - T_0), \quad \partial c(0, t)/\partial x = -\alpha_c(c(0, t) - c_0), \\ \partial T(L, t)/\partial x = \partial c(L, t)/\partial x = 0;$$

$$(1.5) \quad T(x, 0) = T_0, \quad c(x, 0) = c_0$$

(α, α_c — постоянные, L — длина реактора). Условие адиабатичности дает связь между температурой и концентрацией:

$$(1.6) \quad T(x, t) = T_0 + Qc_p^{-1}(c_0 - c(x, t)).$$

После перехода к безразмерным параметрам

$$\Theta = E(T - T_0)R^{-1}T_0^{-2}, \quad \tau = tt_a^{-1}, \quad \eta = xx_a^{-1}, \\ u = wt_a x_a^{-1}, \quad \delta = Lx_a^{-1}, \quad \beta = RT_0 E^{-1}, \quad \alpha_1 = \alpha x_a \\ (t_a = c_p RT_0^2 (EQz)^{-1} \exp(E(RT_0)^{-1}), \quad x_a = (\kappa t_a)^{0,5})$$

вводятся операторы

$$(1.7) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} - u \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Theta^n = F(\Theta, \mu);$$

$$(1.8) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} - u \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} + b_1 \Theta = \frac{\partial F(0, 0)}{\partial \Theta} \Theta + \mu \frac{\partial^2 F(0, 0)}{\partial \mu \partial \Theta} \Theta;$$

$$(1.9) \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} = \frac{\partial F(0, 0)}{\partial \Theta} \Theta + \mu \frac{\partial^2 F(0, 0)}{\partial \mu \partial \Theta} \Theta + b_0 + \sum_{n \geq 2}^{\infty} b_n \Theta^n = G(\mu, \Theta, b_0),$$

где μ — параметр из интервала, содержащего нуль;

$$b_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \Theta^n} \varphi(\Theta) \Big|_{\Theta=0}; \\ \varphi(\Theta) = \frac{k_1 (c_0 - c_p (QE)^{-1} RT_0^2 \Theta) \exp(\Theta(1 + \beta\Theta)^{-1})}{(1 + k_2 (c_0 - c_p (QE)^{-1} RT_0^2 \Theta))^2}.$$

Для каждого из операторов (1.7)–(1.9) справедливы условия (1.4), (1.5), записанные в безразмерной форме.

Таким образом, нелинейный оператор (1.9) представляет собой запись в безразмерных параметрах системы (1.1), (1.2) с учетом (1.6), у которой нелинейная функция $\varphi(\Theta)$ представлена в виде ряда по степеням Θ , и, следовательно, поставленная задача сводится к определению стационарных решений данного оператора при условиях (1.4), (1.5) и анализу их устойчивости. Операторы (1.7), (1.8) получаются из (1.9) последовательным исключением дефекта b_0 ($b_0 = 0$) и линеаризацией.

2. Нулевое решение. Анализ устойчивости нулевого решения системы (1.1)–(1.6) сводится к задаче по определению собственных значений оператора (1.8) с условиями (1.4), (1.5). Спектр оператора (1.8) на интервале $(0, \delta)$ состоит только из дискретных собственных значений $\sigma_n = b_1 - u^2/4 - \lambda_n^2$, где λ_n ($n = 1, 2, \dots$) — положительные корни уравнения

$$(2.1) \quad \operatorname{tg} \lambda \delta = - \frac{4\alpha_1 \lambda}{4\lambda^2 + u^2 + 2u\alpha_1}.$$

Нулевое решение устойчиво, если максимальное значение $\sigma_{\max} = \sigma_1 < 0$. В дальнейшем σ_1 отождествляется с параметром μ и граница

устойчивости нулевого решения определяется из уравнения

$$(2.2) \quad \mu = \lambda_1 - u^2/4 - \lambda_1^2 = 0.$$

Совместное решение (2.1), (2.2) дает зависимость для критического значения δ :

$$\delta = \frac{2}{\sqrt{4b_1 - u^2}} \left[\operatorname{arctg} \left(-\frac{\alpha_1 \sqrt{4b_1 - u^2}}{2b_1 + u\alpha_1} \right) + a\pi \right].$$

Здесь $a = 0$ при $\alpha_1 \sqrt{4b_1 - u^2} (2b_1 + u\alpha_1)^{-1} < 0$; $a = 1$ при $\alpha_1 \sqrt{4b_1 - u^2} \times (2b_1 + u\alpha_1)^{-1} \geq 0$.

Все собственные значения σ_n оператора (1.8) двукратны, и каждому из них соответствуют два собственных вектора:

$$y_{1n} = \cos \lambda_n \eta \exp(0,5u\eta), \quad y_{2n} = -(0,5u + \alpha_1) \sin \lambda_n \eta \exp(0,5u\eta).$$

Векторы y_{1i}, y_{2j} ($i, j = 1, 2, \dots$) независимы и образуют на $(0, \delta)$ полную систему, так что (1.7), (1.9) могут быть рассмотрены как некоторые эволюционные задачи в пространстве R^∞ , образованном этими векторами.

3. Бифуркационное решение. Для решения (1.7) с условиями (1.4), (1.5) вводятся преобразования, приводящие систему векторов y_{ij} ($i = 1, 2, j = 1, 2, \dots$) к биортогональной с весом $\exp(-u\eta)$ системе векторов \bar{y}_{ij} , так что собственному значению σ_1 будут отвечать векторы $\bar{y}_{11} = y_{11}$, $\bar{y}_{21} = y_{21} - \langle y_{21}, \bar{y}_{11} \rangle \exp(-u\eta) \|\bar{y}_{11}\|^{-1} \bar{y}_{11}$, где $\langle y_{ij}, y_{nm} \rangle$ — скалярное произведение векторов y_{ij}, y_{nm} , $\|\bar{y}_{ij}\| = \langle y_{ij}, \bar{y}_{ij} \exp(-u\eta) \rangle$.

Векторы \bar{y}_{ij} ($i = 1, 2, j = 1, 2, \dots$) образуют гильбертово пространство H со скалярным произведением

$$\langle (\bar{y}_{1i}, \bar{y}_{2j}), (\bar{y}_{1n}, \bar{y}_{2m}) \rangle = \langle \bar{y}_{1i}, \bar{y}_{1n}^* \rangle + \langle \bar{y}_{2j}, \bar{y}_{2m}^* \rangle$$

($\bar{y}_{1j}^*, \bar{y}_{2j}^*$ — сопряженные к $\bar{y}_{1j}, \bar{y}_{2j}$ векторы). Поскольку векторы \bar{y}_{ij} ортогональны на $(0, \delta)$ с весом $\exp(-u\eta)$, в качестве сопряженных к y_{11}, y_{21} следует брать векторы

$$\bar{y}_{i1}^* = \bar{y}_{i1} \exp(-u\eta) (\|\bar{y}_{11}\| + \|\bar{y}_{21}\|)^{-1} \quad (i = 1, 2).$$

В силу ортогональности векторов \bar{y}_{ij} решение $\Theta = \Theta(\mu)$ оператора (1.7) всегда может быть разложено на часть, принадлежащую двумерному нуль-пространству оператора (1.8), и часть, которая ортогональна $\bar{y}_{11}^*, \bar{y}_{21}^*$.

Решение (1.7) будет разыскиваться в виде рядов

$$(3.1) \quad \Theta = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n \frac{\varepsilon^n}{n!}, \quad \mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \frac{\varepsilon^n}{n!}$$

($\varepsilon = \langle (\Theta, \Theta), (\bar{y}_{11}, \bar{y}_{21}) \rangle$ — амплитуда).

Подстановка (3.1) в (1.7) и отождествление членов при одинаковых степенях ε приводят к уравнениям относительно $\varepsilon, \varepsilon^2$:

$$(3.2) \quad \partial F(0, 0)/\partial \Theta \Theta_1 = 0;$$

$$(3.3) \quad \partial F(0, 0)/\partial \Theta \Theta_2 + 2\mu_1 \partial^2 F(0, 0)/\partial \Theta \partial \mu \Theta_1 + \partial^2 F(0, 0)/\partial \Theta^2 \Theta_1^2 = 0.$$

Из (3.2) непосредственно следует, что решением может быть любая линейная комбинация $\Theta_1 = \bar{y}_{11} + \psi \bar{y}_{21}$ (ψ — параметр задачи, подлежащий определению).

Уравнение (3.3) разрешимо тогда и только тогда, когда в соответствии с альтернативой Фредгольма для $k = 1, 2$ выполняются условия $\langle \partial F(0, 0)/\partial \Theta \Theta_2, \bar{y}_{k1}^* \rangle = 0$ и, следовательно,

$$(3.4) \quad 2\mu_1 \langle \partial^2 F(0, 0)/\partial \Theta \partial \mu \Theta_1, \bar{y}_{k1}^* \rangle + \langle \partial^2 F(0, 0)/\partial \Theta^2 \Theta_1^2, \bar{y}_{k1}^* \rangle = 0.$$

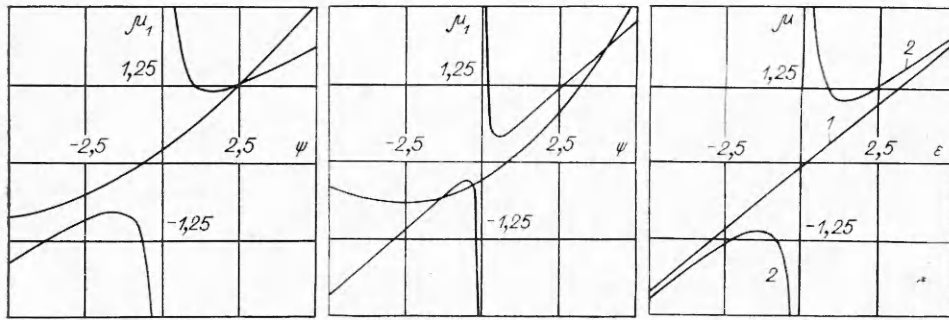


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Подстановка выражений для Θ_1, \bar{y}_{k1}^* ($k = 1, 2$) в (3.4) приводит к двум уравнениям конических сечений на (μ_1, ψ) плоскости:

$$(3.5) \quad g_1(\mu_1, \psi) = c_{11}\psi^2 + c_{12}\psi + c_{13}\mu_1\psi + c_{14}\mu_1 + c_{15} = 0;$$

$$(3.6) \quad g_2(\mu_1, \psi) = c_{21}\psi^2 + c_{22}\psi + c_{23}\mu_1\psi + c_{24}\mu_1 + c_{25} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь } c_{11} &= 0,5 \langle \partial^2 F(0, 0) / \partial \Theta^2 \bar{y}_{21}^2, \bar{y}_{11}^* \rangle, \quad c_{12} = \langle \partial^2 F(0, 0) / \partial \Theta^2 \bar{y}_{11} \bar{y}_{21}, \bar{y}_{11}^* \rangle, \\ c_{13} &= \langle \partial^2 F(0, 0) / \partial \Theta \partial \bar{y}_{21}, \bar{y}_{11}^* \rangle, \quad c_{14} = \langle \partial^2 F(0, 0) / \partial \Theta \partial \bar{y}_{11}, \bar{y}_{11}^* \rangle, \\ c_{15} &= 0,5 \langle \partial^2 F(0, 0) / \partial \Theta^2 \bar{y}_{11}^2, \bar{y}_{11}^* \rangle, \quad c_{21} = 0,5 \langle \partial^2 F(0, 0) / \partial \Theta^2 \bar{y}_{21}^2, \bar{y}_{21}^* \rangle, \\ c_{22} &= \langle \partial^2 F(0, 0) / \partial \Theta^2 \bar{y}_{11} \bar{y}_{21}, \bar{y}_{21}^* \rangle, \quad c_{23} = \langle \partial^2 F(0, 0) / \partial \Theta \partial \bar{y}_{21}, \bar{y}_{21}^* \rangle, \\ c_{24} &= \langle \partial^2 F(0, 0) / \partial \Theta \partial \bar{y}_{11}, \bar{y}_{21}^* \rangle, \quad c_{25} = 0,5 \langle \partial^2 F(0, 0) / \partial \Theta^2 \bar{y}_{11}^2, \bar{y}_{21}^* \rangle. \end{aligned}$$

В силу ортогональности векторов $\bar{y}_{11}, \bar{y}_{21}$ уравнение (3.5) всегда определяет параболу, а (3.6) — гиперболу. Точки пересечения кривых (3.5), (3.6) $(\mu_1^{(n)}, \psi^{(n)})$ являются решениями (3.3). В области действительных значений μ_1, ψ , соответствующих стационарным решениям, возможны одна, две или три точки пересечения. Так, при $c_0 \rho^{-1} = 1, k_1 = 1, k_2 = 0, RT_0 c_p (EQ)^{-1} = 0,1, \beta = 0$ (что дает $b_1 = 0,9, b_2 = 0,4$), $\delta = 2,50, \alpha_1 = 0,1, u = 1$ кривые (3.5), (3.6) пересекаются в одной точке $(\mu_1^{(1)}, \psi^{(1)}) = (1,24; 2,40)$ (рис. 1), а при $\delta = 2,49, \alpha_1 = 1, u = 0,1, b_1 = 0,9, b_2 = 0,4$ — в трех точках $(\mu_1^{(1)}, \psi^{(1)}) = (1,88; 4,05), (\mu_1^{(2)}, \psi^{(2)}) = (-0,54; -1,20), (\mu_1^{(3)}, \psi^{(3)}) = (-0,35; -0,32)$ (рис. 2). Поскольку $c_0, \rho, k_1, k_2, R, T_0, c_p, E, Q, \beta$ входят в (1.4), (1.5), (1.7) — (1.9) только через коэффициенты b_i ($i = 1, 2, \dots$), то в дальнейшем будут приводиться только значения этих коэффициентов.

Таким образом, в плоскости (μ, ε) бифуркационные решения представляют собой семейство прямых $\mu = \mu_1^{(n)} \varepsilon$. На рис. 3 (прямая 1) представлено единственное решение $\mu = \mu_1^{(1)} \varepsilon$, полученное при $\delta = \pi/2, u = 1, \alpha_1 = -0,5, b_1 = 0,9, b_2 = 0,4$. Здесь уместно еще раз отметить, что возможность существования от одного до трех решений рассматриваемой задачи доказана численными исследованиями в [1] для $\varphi(c, T) \sim c^n$ и в [3] для автокаталитических реакций типа Лэнгмюра — Хиншельвуда.

Для анализа устойчивости решений (1.7) в точках $(\mu_1^{(n)}, \psi^{(n)})$ необходимо представить зависимости $g_i(\mu_1, \psi)$ ($i = 1, 2$) в виде функций от параметра μ . Комбинируя (3.1), (3.5), (3.6) и используя условие нормирования $\varepsilon = 1$, получим

$$(3.7) \quad \bar{g}_i(\mu) = \mu^2 \left(c_{i1} \frac{\psi^2}{\mu_1^2} + c_{i2} \frac{\psi}{\mu_1^2} + c_{i3} \frac{\psi}{\mu_1} + c_{i4} \frac{1}{\mu_1} + c_{i5} \frac{1}{\mu_1^2} \right) \quad (i = 1, 2).$$

Система уравнений (3.7) может быть рассмотрена как запись в изображениях двух обыкновенных дифференциальных уравнений, и, следовательно, анализ устойчивости ее решений может проводиться мето-

дом, основанным на теореме устойчивости по первому приближению Ляпунова (см., например, [7]). В соответствии с этим методом решение (1.7) с условиями (1.4), (1.5) в точке $(\mu_1^{(n)}, \psi^{(n)})$ устойчиво, если собственные значения $s_1^{(n)}, s_2^{(n)}$ матрицы Якоби

$$I = \begin{vmatrix} \partial \bar{g}_1(\mu) / \partial (\mu_1^{-1}) & \partial \bar{g}_1(\mu) / \partial (\psi \mu_1^{-1}) \\ \partial \bar{g}_2(\mu) / \partial (\mu_1^{-1}) & \partial \bar{g}_2(\mu) / \partial (\psi \mu_1^{-1}) \end{vmatrix}$$

отрицательны. Учитывая, что в каждой точке имеет место $\det I = = \mu^2 \det I(\mu_1^{(n)}, \psi^{(n)}) + O|\mu^3|$, условие устойчивости запишем в виде

$$(3.8) \quad \max(\mu s_1^{(n)}, \mu s_2^{(n)}) < 0.$$

Условие (3.8) справедливо лишь тогда, когда в рассматриваемой точке кривые (3.5), (3.6) пересекаются трансверсально. Условие трансверсальности в n -й точке пересечения $\det I_0(\mu_1^{(n)}, \psi^{(n)}) \neq 0$,

где
$$I_0 = \begin{vmatrix} \partial g_1(\mu_1, \psi) / \partial \mu_1 & \partial g_1(\mu_1, \psi) / \partial \psi \\ \partial g_2(\mu_1, \psi) / \partial \mu_1 & \partial g_2(\mu_1, \psi) / \partial \psi \end{vmatrix}$$

свидетельствует о том, что в данной точке происходит бифуркация решения. Точки бифуркации образуют подпространство $\Omega_1(u, \delta, \alpha_1, b_0, b_1, b_2)$ фазового пространства состояний реактора $\Omega = \Omega(u, \delta, \alpha_1, b_0, b_1, b_2)$ (параметры в скобках рассматриваются как бифуркационные).

Если в точке пересечения конических сечений есть общая касательная, так что $\det I_0 = 0$, то с одной стороны от этой точки система (3.5), (3.6) имеет одно решение, а с другой — три. Если решением (3.5), (3.6) является точка, для которой $\det I_0 = 0$, то существует еще одно решение с $\det I_0 \neq 0$.

Условие трансверсальности выполняется для всех точек пересечения кривых, представленных на рис. 1, 2 (это видно из самих рисунков). Анализ устойчивости по (3.8) показал, что для $(\mu_1^{(1)}, \psi^{(1)})$ (рис. 1) $(s_1^{(1)}, s_2^{(1)}) = = \mu(0,40; -0,72)$ и решение неустойчиво с обеих сторон от критической точки $\mu = 0$, для $(\mu_1^{(1)}, \psi^{(1)})$, $(\mu_1^{(2)}, \psi^{(2)})$, $(\mu_1^{(3)}, \psi^{(3)})$ (рис. 2) собственные значения матрицы I следующие: $(s_1^{(1)}, s_2^{(1)}) = \mu(1,26; -3,28)$, $(s_1^{(2)}, s_2^{(2)}) = = \mu(0,87; 0,27)$, $(s_1^{(3)}, s_2^{(3)}) = \mu(0,38; -0,34)$. Отсюда вытекает, что решения в первой и третьей точках пересечения неустойчивы при любых μ , во второй точке решение устойчиво при $\mu < 0$ и неустойчиво при $\mu > 0$.

Общим для всех решений является неустойчивость, если $\det I < 0$, и устойчивость с одной стороны от точки $\mu = 0$, если $\det I > 0$. В связи с этим необходимо отметить, что две последовательные точки пересечения на одной дуге конических сечений (3.5), (3.6) (например, $(\mu_1^{(2)}, \psi^{(2)})$, $(\mu_1^{(3)}, \psi^{(3)})$ на рис. 2) имеют различные знаки $\det I$ и, значит, одно решение неустойчиво при любом μ , а другое устойчиво с одной стороны от точки $\mu = 0$.

Уравнение $\max(\mu s_1^{(n)}, \mu s_2^{(n)}) = 0$ представляет гиперплоскость, разделяющую Ω_1 на области устойчивости и неустойчивости бифуркационных решений. Так, если положить $u = 1$, $\alpha_1 = -0,5$, $b_1 = 0,9$, $b_2 = 0,4 - \beta$ и свести подпространство Ω_1 к двумерному $\Omega_1 = \Omega_1(1; \delta; -0,5; 0; 0,9; 0,4 - \beta)$, то граница, ограничивающая на плоскости (δ, β) область устойчивости сверху и слева, имеет вид, приведенный на рис. 4 (кривая 1).

4. **Изолированные решения.** Решение $\Theta = 0$ уравнения $G(\mu, \Theta, 0) = 0$ строго те-

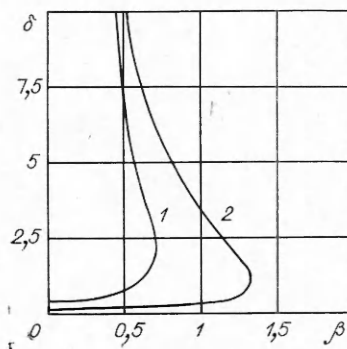


Рис. 4

ряет устойчивость при переходе μ через нуль. Отсюда, по утверждению Хопфа [5], вытекает, что точка $(\mu, \Theta) = (0, 0)$ является двойной. Для определения устойчивости решения (1.9) с учетом дефекта $b_0 \neq 0$, разрушающего бифуркацию, необходимо положить $b_0 = \Delta(\mu, \varepsilon)$. Тогда из условия $\langle \partial G(0, 0, 0)/\partial \Delta, \bar{y}_{k1}^* \rangle$ ($k = 1, 2$) следует, что стационарные решения $G(\mu, \Theta, 0) = 0$, разветвляющиеся в двойной точке $(\mu, \Theta) = (0, 0)$ при $\Delta = 0$, распадаются на изолированные решения, разрушающие бифуркацию, при $\Delta \neq 0$.

Двухкратное дифференцирование $G(\mu, \Theta, \Delta)$ по μ, ε в точке $(\mu, \varepsilon) = (0, 0)$ приводит к системе уравнений

$$(4.1) \quad \frac{\partial G(0, 0, 0)}{\partial \Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 G(0, 0, 0)}{\partial \Theta^2} \Theta_1^2 + \frac{\partial G(0, 0, 0)}{\partial \Delta} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \varepsilon^2} = 0;$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial G(0, 0, 0)}{\partial \Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \mu \partial \varepsilon} + \frac{\partial^2 G(0, 0, 0)}{\partial \mu \partial \Theta} \Theta_1 + \frac{\partial G(0, 0, 0)}{\partial \Delta} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \mu \partial \varepsilon} = 0,$$

разрешимой тогда и только тогда, когда для $k = 1, 2$ выполняются соотношения $\langle \partial^2 \Theta / \partial \varepsilon^2, \bar{y}_{k1}^* \rangle = \langle \partial^2 \Theta / \partial \mu \partial \varepsilon, \bar{y}_{k1}^* \rangle = 0$. Последние соотношения совместно с (4.1), (4.2) позволяют определить первые два ненулевых члена в разложении $\Delta(\mu, \varepsilon)$ по степеням μ, ε :

$$(4.3) \quad \Delta(\mu, \varepsilon) = -\frac{1}{2} \left[\frac{\langle \partial^2 G(0, 0, 0) / \partial \Theta^2 \Theta_1^2, \bar{y}_{k1}^* \rangle}{\langle \partial G(0, 0, 0) / \partial \Delta, \bar{y}_{k1}^* \rangle} \varepsilon^2 + \right. \\ \left. + 2 \frac{\langle \partial^2 G(0, 0, 0) / \partial \Theta \partial \mu \Theta_1, \bar{y}_{k1}^* \rangle}{\langle \partial G(0, 0, 0) / \partial \Delta, \bar{y}_{k1}^* \rangle} \varepsilon \mu \right] \quad (k = 1, 2).$$

Кривые (4.3) представляют собой изолированные решения, разрушающие бифуркацию. На рис. 3 (кривые 2) представлены такие решения, полученные при $\delta = \pi/2, u = 1, \alpha_1 = -0,5, b_0 = 1, b_1 = 0,9, b_2 = 0,4$.

Подстановка выражений для $\Theta_1, \bar{y}_{k1}^*, k = 1, 2$ в (4.3) приводит к двум уравнениям для конических сечений:

$$(4.4) \quad g_1(\mu_1, \psi) + b_0 \langle \partial G(0, 0, 0) / \partial \Delta, \bar{y}_{k1}^* \rangle = 0;$$

$$(4.5) \quad g_2(\mu_1, \psi) + b_0 \langle \partial G(0, 0, 0) / \partial \Delta, \bar{y}_{k1}^* \rangle = 0,$$

где $g_i(\mu_1, \psi)$ ($i = 1, 2$) определяются из (3.5), (3.6).

Уравнения (4.4), (4.5) так же, как и (3.5), (3.6), могут иметь одно, два или три решения, но количество решений систем (4.4), (4.5) и (3.5), (3.6) не обязательно должно совпадать. При $\delta = 2,49, \alpha_1 = 1, u = 0,1, b_0 = 1, b_1 = 0,9, b_2 = 0,4$ кривые (4.4), (4.5) пересекаются в трех точках $(\mu_1^{(1)}, \psi^{(1)}) = (2,98; 6,19), (\mu_1^{(2)}, \psi^{(2)}) = (-1,43; -2,41), (\mu_1^{(3)}, \psi^{(3)}) = (-1,31; -1,23)$.

Уравнения (4.4), (4.5) по своей структуре аналогичны (3.5), (3.6). Поэтому исследование устойчивости решения (1.9) в точках пересечения кривых (4.4), (4.5) проводится таким же образом, как это сделано в п. 3 для бифуркационного решения. Результаты расчетов приведенного выше решения (4.4), (4.5) дали $(s_1^{(1)}, s_2^{(1)}) = \mu(3,55; -5,47), (s_1^{(2)}, s_2^{(2)}) = \mu(1,68; 0,86), (s_1^{(3)}, s_2^{(3)}) = \mu(1,39; -0,79)$, откуда вытекает, что решения (1.9) в точках $(\mu_1^{(1)}, \psi^{(1)}), (\mu_1^{(3)}, \psi^{(3)})$ неустойчивы с обеих сторон от точки $\mu = 0$, в точке $(\mu_1^{(2)}, \psi^{(2)})$ устойчивы при $\mu < 0$.

В двумерном подпространстве $\bar{\Omega}_1 = \Omega_1(1; \delta; -0,5; 1; 0,9; 0,4 - \beta)$ граница между областями устойчивости и неустойчивости решения, разрушающего бифуркацию, приведена на рис. 4 (кривая 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hlavacek V., Hofmann H. Steady state axial heat and mass transfer in tubular reactors. An analysis of the uniqueness of solutions // Chem. Engng Sci. — 1970. — V. 25, N 1.
2. Берман В. С., Рязанцев Ю. С., Шевцова В. М. О числе стационарных режимов одно-

- мерного проточного химического реактора с реакцией типа автокаталитической // ФГВ.— 1983.— Т. 19, № 1.
3. Рязанцев Ю. С., Шевцова В. М. О числе стационарных режимов адиабатического проточного химического реактора с автокаталитической реакцией // ФГВ.— 1984.— Т. 20, № 5.
 4. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций.— М.: Мир, 1983.
 5. Марсен Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения.— М.: Мир, 1980.
 6. Кафаров В. В. Методы кибернетики в химии и химической технологии.— М.: Химия, 1976.
 7. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости.— М.: Наука, 1967.

г. Бийск

Поступила 11/XII 1989 г.

УДК 532.522:532.135

А. Р. Давыдов, В. М. Левин, В. П. Первадчук, Н. М. Труфанова

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХСЛОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОУПРУГИХ РАСПЛАВОВ ПОЛИМЕРОВ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КАНАЛАХ

Одной из стадий технологического процесса производства многослойных пленок, бикомпонентных (в том числе и оптических) волокон является совместная экструзия двух или более расплавов полимеров через формирующий канал. При этом имеет место слоистое или стратифицированное течение [1]. Наиболее полно исследован участок установившегося стратифицированного течения, где профиль скорости потока и положение границ раздела слоев жидкостей неизменны по длине канала [1—4]. Меньшее число работ посвящено изучению начального участка совместного течения, где, как показано в эксперименте [5] и в теоретическом конечно-элементном анализе [6], координаты границы раздела существенно изменяются.

В данной работе предлагаются результаты численного исследования двухслойного течения несмешивающихся вязкоупругих жидкостей. Приводятся математическая модель течения, метод численной реализации и анализируются результаты расчетов.

1. Постановка задачи и метод решения. Рассматривается стационарное осесимметричное двухслойное течение вязкоупругих жидкостей равных плотностей в цилиндрическом канале. В переменных вихрь ω и функция тока ψ , которые связаны с компонентами вектора скорости v_r и v_z так, что

$$\omega = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}, \quad v_z = \frac{1}{r\rho} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad v_r = -\frac{1}{r\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

дифференциальные уравнения, определяющие математическую модель течения, имеют вид [7]

$$(1.1) \quad \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\omega}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\omega}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right] r^2 - \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left(r^3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\omega}{r} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\omega}{r} \right) \right) + S_w r^2 = 0;$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r\rho} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \omega = 0,$$

где r, z — координаты; ρ — плотность; μ — вязкость полимеров.

В уравнении для напряженности вихря (1.1) источниковый член определяется выбранным реологическим уравнением состояния (РУС). Используем в качестве РУС модель Де Витта, предсказывающую аномалию вязкости жидкостей, а также появление в установившемся течении первой и второй разностей нормальных напряжений [1]:

$$(1.3) \quad \tau_{ij} + \lambda D_j \tau_{ij} / (D_j t) = \mu d_{ij}.$$