

УДК 536.24

**Влияние вязкой диссипации
на естественную конвекцию между
вертикальными параллельными пластинами
при периодических во времени
граничных условиях**

Б.К. Джа, А.О. Аджибейд

Факультет математики Университета Ахмаду Белло, Нигерия

E-mail: basant777@yahoo.co.uk, olubadey2k@yahoo.com

Исследуется естественная конвекция вязкой несжимаемой жидкости в канале, образованном двумя бесконечными вертикальными параллельными пластинами. Рассматривается полностью развитое ламинарное течение в вертикальном канале при стационарно-периодическом режиме на границах. Учитывается влияние внутреннего нагрева вследствие вязкой диссипации. В результате разделения скорости и температуры на стационарную и периодическую части возникает обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, решение которого дает выражения для скорости и температуры, амплитуд и фаз температуры и скорости, а также скорости теплопереноса и трения на пластинах. При наличии вязкой диссипации жидкость с относительно малым числом Прандтля имеет более высокую температуру, чем стенки канала, и тепло переносится от жидкости к пластине.

Ключевые слова: свободная конвекция, вязкая диссипация, периодический подвод тепла.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование естественной конвекции, вызываемой стационарно-периодической температурой, очень важно ввиду ее приложений в различных инженерных и экологических задачах. Например, в системах автоматического управления электрические и электронные компоненты часто подвергаются периодическому нагреву и охлаждению в результате естественных процессов конвекции. В работе [1] изучалось влияние периодического нагрева на течения, рассматривался случай, когда температура поверхности изменяется незначительно около среднего уровня, более высокого, чем температура окружающей среды. Авторы выполнили анализ возмущений в терминах амплитуды температуры поверхности, но их результаты ограничены небольшими амплитудами колебания температуры поверхности. В работе [2] эта же задача решалась с помощью несколько иного представления возмущений, и результаты по-прежнему были ограничены небольшими амплитудами. Авторы работы [3] разделяли температуру и скорость на стационарную

и периодическую части, изучая влияние синусоидального изменения температуры поверхности, они получили решения для больших частот. Работа [4] обобщила исследование [3] на случай включения неоднородной температуры поверхности с помощью формальных асимптотических разложений, но их результаты по-прежнему справедливы лишь для малой амплитуды температуры поверхности. Авторы [5] использовали конечно-разностный подход в своем исследовании ламинарной естественной конвекции с осциллирующей температурой поверхности, и они смогли преодолеть ограничения по амплитуде. Работы [6–8] внесли дополнительный вклад в исследование течения жидкости около бесконечной пластины с осциллирующей температурой поверхности. Другой работой, в которой рассматривается течение жидкости в канале, вызываемое осциллирующей температурой поверхности, является работа [9], в которой изучалась полностью развитая конвекция между двумя периодически нагреваемыми параллельными пластинами. Исследование имело отношение к миниатюризации электрических и электронных панелей. В работе [10] исследовалось влияние числа Струхала на развитие пограничного слоя между двумя периодически нагреваемыми пластинами и был сделан вывод, что число Струхала оказывает обратное влияние на нестационарное течение, оно уменьшается до нуля при высоких числах Струхала. Авторы [11] исследовали смешанную конвекцию в круглом канале, подвергнувшись периодическим синусоидальным изменениям температуры на стенке, и показали, что существует резонансная частота, при которой скорость колебаний достигает максимума. Они показали также, что резонансная частота является функцией числа Прандтля (Pr) и радиального положения. Авторы работы [12] изучали влияние генерации тепла и поглощения на естественную конвекцию между двумя бесконечными вертикальными параллельными пластинами, подвергающимися периодическому нагреву при наличии отсоса и инъекции. Их работа показывает, что влияние тепла и поглощения на течение взаимны.

Вязкость жидкости чувствительна к повышению температуры (см. [13, 14]). Например, вязкость воды уменьшается на 140 % при повышении температуры от 380 К ($\bar{\mu}=0,0131 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1} \text{ c}^{-1}$) до 420 К ($\bar{\mu}=0,00548 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1} \text{ c}^{-1}$) [15]. Это изменение вязкости жидкости в зависимости от температуры может влиять на характеристики потока, а также на эффективность работы промышленного оборудования, где важна смазка [16]. Более ранние исследования на свободноконвективных течениях жидкости пренебрегали эффектами вязкой диссипации до появления работы [17], где показано, что в стационарном свободноконвективном течении нельзя пренебрегать теплом, выделяющимся из-за вязкой диссипации, для жидкостей с высоким числом Прандтля или течений при высоком гравитационном поле. В работе [17] отмечено, что влияние вязкой диссипации в естественной конвекции заметно, когда индуцированная кинетическая энергия становится значительной по сравнению с количеством переданного тепла. Вообще в сдвиговом течении часть работы рассеивается в виде тепла и разогрева, вызванного сдвигом, что определенно приводит к повышению температуры внутри жидкости (см. [18]). Авторы [19] признали вязкую диссипацию турбулентной кинетической энергии в качестве важного источника тепла в ураганах и показали, что этот источник тепла увеличивает их интенсивность. В независимых работах авторы [20, 21] использовали метод рядов возмущений для анализа совокупного воздействия силы плавучести и вязкой диссипации на течение жидкости в вертикальных каналах. В работе [20]

сделан вывод, что в случае восходящего потока безразмерные скорость и температура являются возрастающими функциями параметра вязкой диссипации, а в случае нисходящего потока скорость уменьшается, несмотря на повышение температуры с увеличением вязкой диссипации. В работе [21] сделан вывод, что в случае асимметричного нагрева вязкая диссипация усиливает обращение нисходящего потока в то время как в случае восходящего потока она снижает этот эффект. Авторы работы [22] исследовали влияние вязкой диссипации в вертикальной трубе с равномерным тепловым потоком и пришли к выводу, что в течении, подпитываемом плавучестью, безразмерная скорость вблизи стенки канала увеличивается при увеличении числа Бринкмана. В аналогичной работе [23] использовалось два различных разложения возмущения с целью изучения полностью развитой ламинарной смешанной конвекции в наклонном канале и был сделан вывод, что наличие вязкой диссипации приводит к резкой зависимости коэффициента безразмерного падения давления и числа Нуссельта от числа Грасгофа. Дальнейший вклад в изучение эффектов вязкой диссипации внесли авторы [24–30].

Целью данной работы является исследование поведения течения в вертикальном канале, когда конвекция вызывается периодическим нагревом пластин и учитывается влияние вязкой диссипации. Когда член вязкой диссипации включается в уравнение энергии, температурное поле зависит от поля скоростей через нелинейный член в уравнении энергии. Эта связь отсутствует, когда пренебрегают членом вязкой диссипации.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Ниже рассматривается полностью развитое ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в вертикальном канале, возникающее вследствие стационарно-периодического температурного режима на ограничивающих пластинах. Пластины канала считаются вертикальными, параллельными оси x в точках $y = \pm h$ (рис. 1). Обе пластины симметрично подвергаются стационарно-периодическому нагреву, вследствие эффекта плавучести, индуцированного градиентом температуры, автоматически устанавливается естественная конвекция, и из-за вязкости рабочей жидкости скорость на границе остается равной нулю. Из-за симметричности условий на границах достаточно исследовать течение в одной половине канала ($0 \leq y \leq h$).

Следуя [10] и учитывая нагрев вследствие вязкой диссипации, уравнения импульса и энергии для рассматриваемой физической задачи запишем в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g\beta(T - T_0), \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{C_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (2)$$

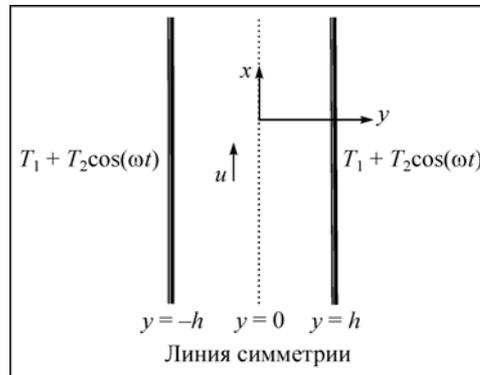


Рис. 1. Конфигурация течения и система координат.

где граничные условия на обеих пластинах имеют вид:

$$u(\pm h, t) = 0, \quad T(\pm h, t) = T_1 + T_2 \cos(\omega t). \quad (3)$$

Чтобы разделить температуру на стационарную и периодическую части, используем следующие выражения:

$$u = \frac{g\beta h^2}{\nu} \left[(T_1 - T_0)A(\eta) + T_2 B(\eta)e^{i\omega t} \right], \quad (4)$$

$$T = T_0 + (T_1 - T_0)F(\eta) + T_2 G(\eta)e^{i\omega t}, \quad (5)$$

где $A(\eta)$, $F(\eta)$ представляют собой стационарные части, а $B(\eta)$, $G(\eta)$ — периодические части, соответственно, скорости и температуры.

Подставляя уравнения (4) и (5) в уравнения (1) и (2), получаем с учетом граничных условий (3) следующие обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} A''(\eta) &= -F(\eta), \quad B''(\eta) - i \text{St} B(\eta) = -G(\eta), \\ F''(\eta) &= E_c (A'(\eta))^2, \quad G''(\eta) - \text{St} \text{Pr} G(\eta) = 2E_c A'(\eta) B'(\eta), \end{aligned} \quad (6)$$

которые решаются при следующих граничных условиях:

$$A(\pm 1) = B(\pm 1) = 0, \quad F(\pm 1) = G(\pm 1) = 1. \quad (7)$$

Безразмерные величины в вышеприведенных уравнениях определяются следующим образом:

$$\eta = \frac{y}{h}, \quad E = \frac{g^2 \beta^2 h^4 (T_1 - T_0)}{\alpha \nu C_p}, \quad \text{St} = \frac{h^2 \omega}{\nu}, \quad \text{и} \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}. \quad (8)$$

St — число Струхала, соответствующее частоте периодического нагрева, Pr — число Прандтля и E — число Эккерта. Физические величины, используемые в выражениях (8), определены в списке обозначений.

Поскольку уравнения (6) совместные, мы разрешаем связи с использованием возмущения:

$$p = p_0 + E p_1 \quad (10)$$

для $A(\eta)$, $B(\eta)$, $F(\eta)$, $G(\eta)$, где $E \ll 1$.

Решив систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (6) с граничными условиями (7) и используя возмущение (10), получим следующие результаты при $\text{Pr} \neq 0$:

$$F(\eta) = 1 + E \left(\frac{1}{12} (1 + \eta^4) \right), \quad (11)$$

$$A(\eta) = \frac{1}{2} (1 - \eta^2) + E \left(\frac{1}{360} (\eta^6 - 15\eta^2 + 14) \right), \quad (12)$$

$$G(\eta) = \frac{\cos h(z\eta\sqrt{\text{StPr}})}{\cos h(z\sqrt{\text{StPr}})} + E \left(\begin{aligned} & (X_5 - X_1\eta^2) \cos h(z\eta\sqrt{\text{StPr}}) + X_2\eta \sin h(z\eta\sqrt{\text{StPr}}) \\ & + X_3 \cos h(z\eta\sqrt{\text{St}}) - X_4 \eta \sin h(z\eta\sqrt{\text{St}}) \end{aligned} \right), \quad (13)$$

$$B(\eta) = \frac{i}{St(1-Pr)} \left(\frac{\cos h(z\eta\sqrt{St})}{\cos h(z\sqrt{St})} - \frac{\cos h(z\eta\sqrt{St Pr})}{\cos h(z\sqrt{St Pr})} \right) + \\ + E \left((C + R_1\eta^2) \cos h(z\eta\sqrt{St}) + \right. \\ \left. + (q_0 + q_1\eta^2) \cos h(z\eta\sqrt{St Pr}) + R_2\eta \sin h(z\eta\sqrt{St}) + q_2\eta \sin h(z\eta\sqrt{St Pr}) \right), \quad (14)$$

где z , X_i ($i = 1, 2, \dots, 5$), q_0, q_1, q_2, R_1, R_2 и C — постоянные, поясненные в Приложении.

Выражения для температуры и скорости (13) и (14) становятся неопределенными при $Pr = 1$, поэтому мы решаем уравнение (6) для $Pr = 1$ и получаем следующие результаты:

$$G(\eta) = \frac{\cos h(z\eta\sqrt{St})}{\cos h(z\sqrt{St})} + \\ + E \left((d + 2k_1\eta^2) \cos h(z\eta\sqrt{St}) + 2(k_0\eta^3 + k_2\eta) \sin h(z\eta\sqrt{St}) \right), \quad (15)$$

$$B(\eta) = \frac{iz}{2\sqrt{St} \cos h(z\sqrt{St})} \left(\eta \sin h(z\eta\sqrt{St}) - \operatorname{tg} h(z\sqrt{St}) \cos h(z\eta\sqrt{St}) \right) + \\ + E \left(2(m_0 + m_2\eta^2 + m_4\eta^4) \cos h(z\eta\sqrt{St}) + 2(m_1\eta + m_3\eta^3) \sin h(z\eta\sqrt{St}) \right), \quad (16)$$

где постоянные $k_0, k_1, k_2, m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, d$ даны в Приложении.

Если пренебречь влиянием вязкой диссипации ($E = 0$), то результаты, представленные в уравнениях (11)–(16), совпадают с результатами работы [10].

Фаза температуры (ψ) и фаза скорости (χ) получаются из выражений:

$$\psi = \operatorname{tg} n^{-1} \left(\frac{G_i}{G_R} \right) \quad \text{и} \quad \chi = \operatorname{tg} n^{-1} \left(\frac{B_i}{B_R} \right). \quad (17)$$

Амплитуды периодической температуры и периодической скорости даются формулами:

$$|G| = (G_R^2 + G_i^2)^{1/2} \quad \text{и} \quad |B| = (B_R^2 + B_i^2)^{1/2}, \quad (18)$$

где G_R, B_R — периодические температура и профиль скорости в фазе, а G_i, B_i сдвинуты относительно нее на 90° . Положительные значения B_R изображают скорость в положительном направлении, в то время как отрицательные значения указывают на обратное течение. Фаза скорости χ — это угол, на который течение отклоняется от восходящего направления (в фазе), а $|B|$ обозначает абсолютную скорость в любой точке канала.

Выбирая dG/dY и dB/dY на пластинах, получаем скорость теплопередачи (Nu) и трение (τ) соответственно по формулам

$$Nu = \frac{z\sqrt{St Pr} \sin h(z\sqrt{St Pr})}{\cos h(z\sqrt{St Pr})} +$$

$$+E \left[\begin{aligned} & \left((X_5 - X_1) z \sqrt{\text{St Pr}} + X_2 \right) \sin h \left(z \sqrt{\text{St Pr}} \right) \\ & + \left(X_2 z \sqrt{\text{St Pr}} - 2X_1 \right) \cos h \left(z \sqrt{\text{St Pr}} \right) \\ & + \left(X_3 z \sqrt{\text{St}} - X_4 \right) \sin h \left(z \sqrt{\text{St}} \right) - X_4 z \sqrt{\text{St}} \cos h \left(z \sqrt{\text{St}} \right) \end{aligned} \right], \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{i}{\text{St}(1 - \text{Pr})} \left(z \sqrt{\text{St}} \operatorname{tg} h \left(z \sqrt{\text{St}} \right) - z \sqrt{\text{St Pr}} \operatorname{tg} h \left(z \sqrt{\text{St Pr}} \right) \right), \\ & +E \left(\left((C + R_1) z \sqrt{\text{St}} + R_2 \right) \sin h \left(z \sqrt{\text{St}} \right) + \left(2R_1 + R_2 z \sqrt{\text{St}} \right) \cos h \left(z \sqrt{\text{St}} \right), \right. \\ & \left. \left((q_0 + q_1) z \sqrt{\text{St Pr}} + q_2 \right) \sin h \left(z \sqrt{\text{St Pr}} \right) + \left(q_2 z \sqrt{\text{St Pr}} + 2q_1 \right) \cos h \left(z \sqrt{\text{St Pr}} \right) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Рассматривается свободноконвективное течение вязкой несжимаемой жидкости между двумя бесконечными вертикальными параллельными пластинами. Устанавливается конвективный поток вследствие периодического нагрева пластин канала. Рассматривается также влияние на течение тепла, выделяющегося вследствие вязкой диссипации. Поток определяется тремя основными параметрами, а именно: числом Струхала (St), которое представляет частоту периодического подвода тепла на пластины, числом Прандтля (Pr), которое обратно пропорционально температуропроводности рабочей жидкости, и числом Эккерта (E), которое является параметром вязкой диссипации. Значения Pr выбираются между безразмерными значениями 0,044 и 7,0, учитывая диапазон Pr для ртути (0,008–0,041), паров воды (0,882–0,994), кислорода (0,729–0,759), воздуха (0,703–0,784), воды (5,18–8,91) и т. д. (см. [31]). Значения St выбираются между 0 и 10, в то время как параметр вязкой диссипации (E) предполагается принимающим значения в интервале $-0,5 \div 0,5$. Положительные значения E являются показателем производства тепла от касательного напряжения в жидкости, отрицательные значения означают поглощение тепла и, наконец, нулевое значение E означает, что членом вязкой диссипации пренебрегается и задача совпадает с рассмотренной в работе [10]. Результаты представлены в графической форме на рис. 2–12 таким образом, чтобы четко выявить влияние каждого из управляющих параметров на поведение течения.

На рис. 2 показано влияние E на распределение температуры, возрастающей с увеличением параметра вязкой диссипации. На рис. 3 температура оказывается

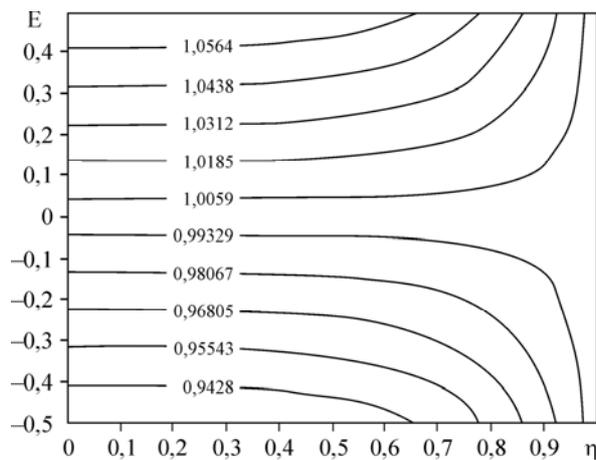


Рис. 2. Распределение температуры. $St = 1$, $Pr = 0,044$.

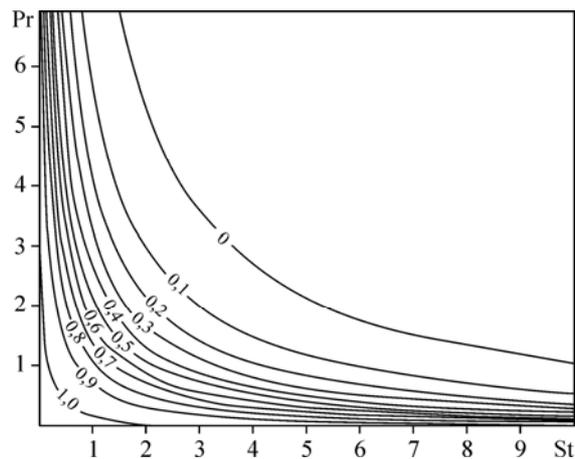


Рис. 3. Распределение температуры. $\eta = 0,4$, $E = 0,1$.

убывающей функцией Pr , так как увеличение Pr соответствует уменьшению температуропроводности рабочей жидкости, что приводит к снижению температуры жидкости. Кроме того, увеличение St приводит к снижению температуры вследствие падения интенсивности нагрева. Из этого рисунка видно, что температура уменьшается до нуля при больших Pr и St .

На рис. 4 и 5 показана скорость как возрастающая функция E , возвратное течение наблюдается при отрицательных значениях E . По мере роста St скорость сначала увеличивается, но дальнейший рост St приводит к непрерывному снижению скорости, как показано на рис. 5. На рис. 6 показана диаграмма Арганда, которая иллюстрирует фазы скорости и температуры. Ось x соответствует направлению течения жидкости, в то время как проникновение тепла происходит в отрицательном направлении по оси y . Угол отклонения (θ) от оси x показывает фазу скорости, а угол отклонения (ϕ) от оси y — фазу температуры (см. рис. 6). Скорость и температура наиболее высоки, когда их фазы принимают минимальные

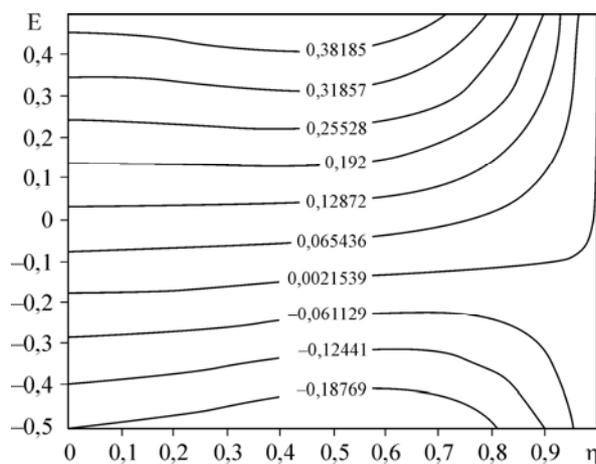


Рис. 4. Распределение скорости. $Pr = 0,71$, $St = 2$.

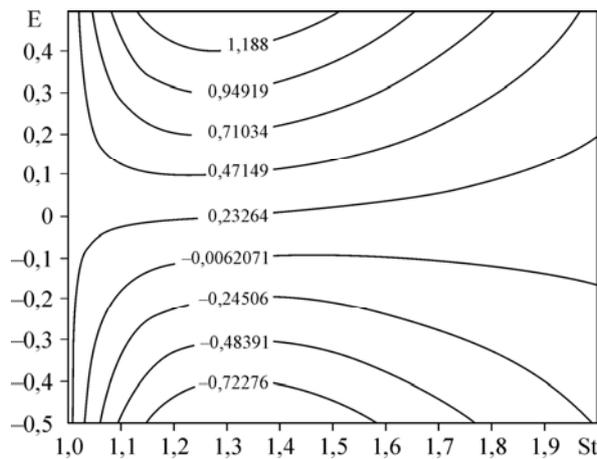


Рис. 5. Распределение скорости. $\eta = 0,4$, $Pr = 0,71$.

значения. На рис. 7 видно, что фаза температуры уменьшается с увеличением E . Это является показателем улучшения проникновения тепла и, следовательно, повышения температуры. Обратная тенденция наблюдается с ростом St . Увеличение числа Эккерта приводит к уменьшению фазы скорости, как показано на рис. 8, что соответствует возрастанию скорости с числом Эккерта (см. рис. 4). На рис. 9 видно, что амплитуда температуры увеличивается с ростом E , но уменьшается с ростом St . Это можно объяснить увеличением производства тепла из-за вязкой диссипации с повышением E . Тенденция та же самая для амплитуды скорости, которая увеличивается с ростом E , когда конвекция становится более доминирующей (рис. 10).

Скорость теплопередачи между жидкостью и пластинами канала показана на рис. 11. Из этого рисунка видно, что число Нуссельта растет с увеличением Pr . Это объясняется повышением градиента температуры вблизи пластин с увеличением числа Прандтля, что вызывает рост скорости теплопередачи. Также видно, что скорость теплопередачи уменьшается с ростом числа Эккерта. Это связано с тем, что

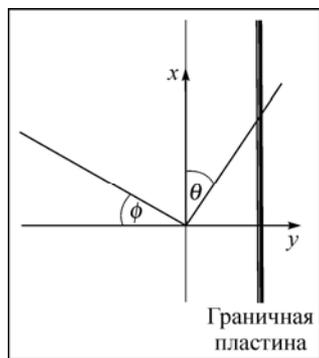


Рис. 6. Фаза скорости и температуры.

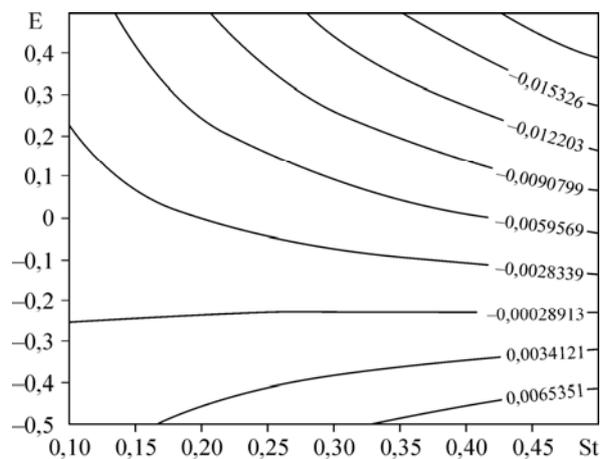


Рис. 7. Фаза температуры. $Pr = 0,044$, $\eta = 0,6$.

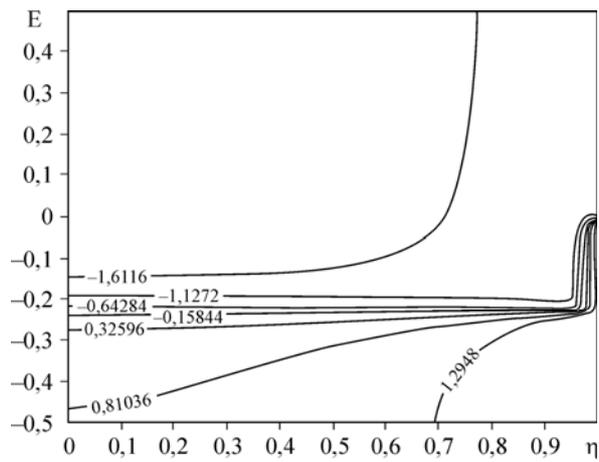


Рис. 8. Фаза скорости. $St = 4$, $Pr = 0,71$.

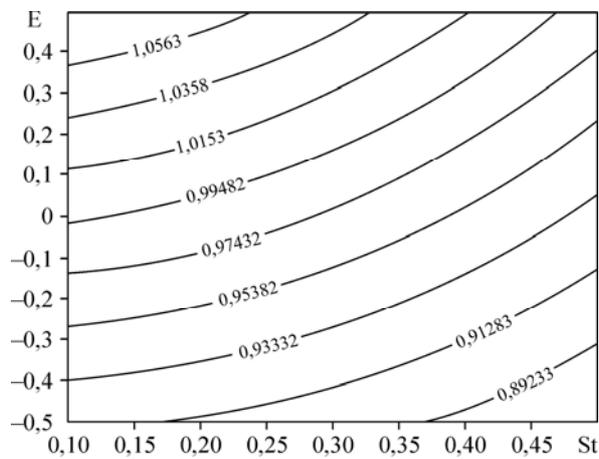


Рис. 9. Амплитуда температуры. $\eta = 0,4$, $Pr = 2$.

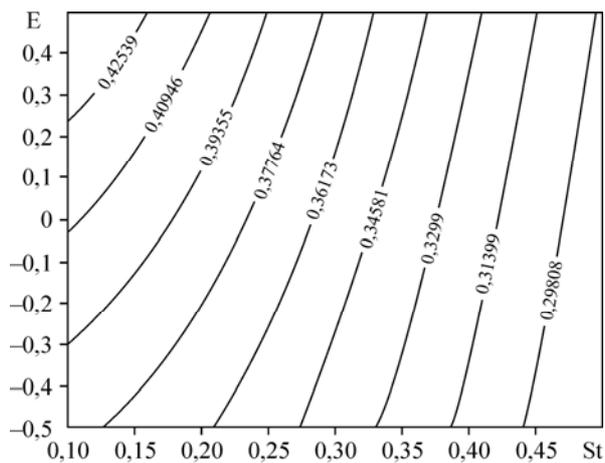


Рис. 10. Амплитуды скорости. $\eta = 0,4$, $Pr = 5$.

вязкая диссипация повышает температуру жидкости и снижает градиент температуры вблизи пластин. Кроме того, следует отметить, что изменение направления теплопередачи (от жидкости к пластине) происходит при увеличении положительных

значений E или уменьшении Pr при любом положительном E . Этот результат объясняется тем, что при увеличении E производство тепла за счет вязкой диссипации является более выраженным и температура жидкости превышает температуру

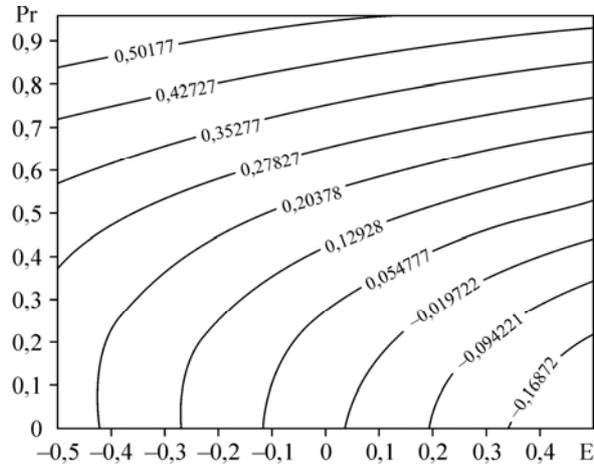


Рис. 11. Скорость теплопередачи на пластинах. $St = 1,5$.

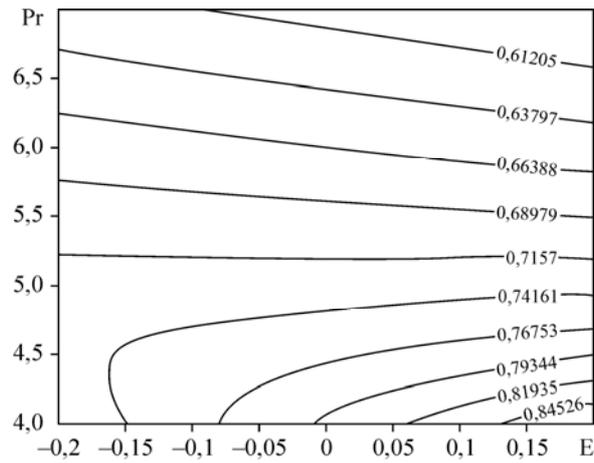


Рис. 12. Трение на пластинах. $St = 0,3$.

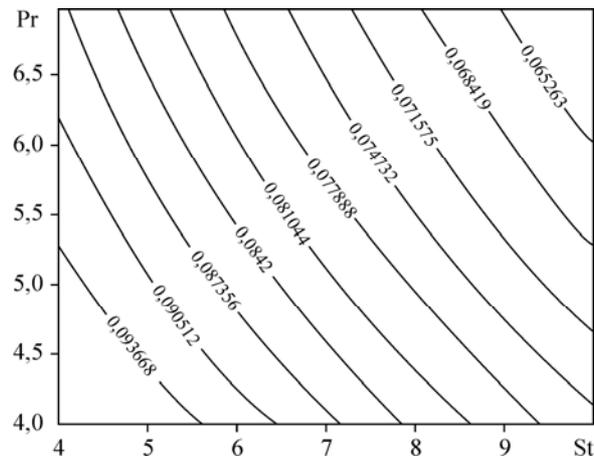


Рис. 13. Трение на пластинах. $E = 0,5$.

пластины. Рис. 12, 13 показывают трение на пластинах. Оно уменьшается с увеличением Pr и St , но увеличение E приводит к возрастанию температуры жидкости, скорости и, следовательно, трения (см. рис. 12).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе определено влияние чисел Эккерта (E), Струхаля (St) и Прандтля (Pr) на теплоперенос и течение жидкости. Нагрев вследствие вязкой диссипации в пределах канала увеличивает температуру жидкости выше температуры пластины, когда число Прандтля рабочей жидкости относительно невелико. Кроме того, влияние числа Струхаля на поток подавляется, когда число Эккерта принимает относительно большое положительное значение. В пренебрежении членом вязкой диссипации результаты исследования хорошо согласуются с результатами и выводами работы [10].

ОБОЗНАЧЕНИЯ

A — стационарная скорость,	St — число Струхаля,
B — нестационарная скорость,	t — безразмерное время,
C_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении,	T_0 — начальная температура жидкости,
E — число Эккерта,	T_1 — стационарная температура стенки,
F — стационарная температура,	T_2 — периодическая температура стенки,
g — ускорение силы тяжести,	T — безразмерная температура жидкости,
G — периодическая температура,	u — безразмерная скорость,
h — полуширина канала,	x — вертикальная ось (направление течения),
Nu — число Нуссельта,	y — координата, перпендикулярная пластине.
Pr — число Прандтля,	

ГРЕЧЕСКИЕ СИМВОЛЫ

α — температуропроводность,	μ — коэффициент вязкости,
β — коэффициент теплового расширения,	ν — кинематическая вязкость,
η — безразмерная горизонтальная координата,	ω — частота периодического нагрева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sparrow E. M., Gregg J. L. Nearly quasi-steady free convection heat transfer in gases // Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer. 1960. Vol. 82, No. 3. P. 258–260.
2. Chung P. M., Anderson A. D. Unsteady laminar free convection // Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer. 1961. Vol. 83, No. 4. P. 473–478.
3. Nanda R. J., Sharma V. P. Free convection laminar boundary layers in oscillatory flow // J. Fluid Mech. 1963. Vol. 15, pt 3. P. 419–428.
4. Kelleher M. D., Yang K. T. Heat Transfer Response of Laminar Free convection boundary layers along a vertical heated plate to surface temperature oscillation // ZAMP. 1968. Vol. 19, No. 1. P. 31–44.
5. Yang J. W., Scaccia C., Goodman J. Laminar Natural Convection about vertical plates with oscillatory surface temperature // Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer. 1974. Vol. 96, No. 1. P. 9–14.
6. Schetz J. A., Eichhorn R. Unsteady natural convection in the vicinity of a doubly infinite vertical plate // Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer. 1962. Vol. 84, No. 3. P. 334–338.
7. Muhuri P. K., Gupta A. S. Free convection boundary layer on a flat plate due to small fluctuations in the surface temperature // ZAMM. 1979. Vol. 59, No. 1. P. 117–121.
8. Rott N., Rosenzweig M. L. On the response of the laminar boundary layer to small fluctuations of the free-stream velocity // J. Aerospace Sci. 1960. Vol. 27, No. 10. P. 741–748.
9. Bar-Cohen A., Rohsenow W. M. Thermally optimum spacing of vertical, natural convection cooled, parallel plates // Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer. 1984. Vol. 106, No. 1. P. 116–123.
10. Wang C. Y. Free Convection between vertical plates with periodic heat input // Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer. 1988. Vol. 110, No. 2. P. 508–511.
11. Barletta A., Rossi di Schio E. Mixed convection flow in a vertical circular duct with time-periodic boundary condition: steady-periodic regime // Int. J. Heat Mass Transfer. 2004. Vol. 47, No. 14–16. P. 3187–3195.
12. Jha B. K., Ajibade A. O. Free convective flow of heat generating /absorbing fluid between vertical porous plates with periodic heat input // Int. Comm. Heat and Mass Transfer. 2009. Vol. 36, No. 6. P. 624–631.

13. **Sahin A. Z.** The effect of variable viscosity on the entropy generation and pumping power in a laminar fluid flow through a duct subjected to constant heat flux // *Int. Comm. Heat and Mass Transfer*. 1999. Vol. 35, No. 6. P. 499–506.
14. **Tasnim S. H., Mahmud S.** Entropy generation in a vertical concentric channel with temperature dependent viscosity // *Int. Comm. Heat Mass Transfer*. 2002. Vol. 29, No. 7. P. 907–918.
15. **Schlichting H., Gersten K.** *Boundary Layer Theory*. 8th revised and enlarged edition. NY: Springer-Verlag. 2000.
16. **Yasutomi S., Bair S., Winer W.O.** An application of a free volume model to lubricant rheology. 1. Dependence of viscosity on temperature and pressure // *J. Tribol. (Trans. ASME)*. 1984. Vol. 106, No. 2. P. 291–303.
17. **Gebhart B.** Effects of viscous dissipation in natural convection // *J. Fluid Mech.* 1962. Vol. 14, pt 2. P. 225–232.
18. **Makinde O. D.** Thermal criticality in viscous reactive flows through channels with a sliding wall: An exploitation of the Hermite-Padé approximation method // *Mathematical and Computer Modelling*. 2008. Vol. 47, No. 5-6. P. 312–317.
19. **Bister M., Emanuel K. A.** Dissipative heating and hurricane intensity // *Meteor Atmos. Phys.* 1998. Vol. 65, No. 3-4. P. 233–240.
20. **Zanchini E.** Effect of Viscous dissipation on mixed convection in a vertical channel with boundary condition of the third kind // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1998. Vol. 41, No. 23. P. 3949–3959.
21. **Barletta A.** Laminar mixed convection with viscous dissipation in a vertical channel // *Inter. J. Heat Mass Transfer*. 1998. Vol. 41, No. 22. P. 3501–3513.
22. **Barletta A., Rossi di Schio E.** Effect of Viscous dissipation on mixed convection heat transfer in a vertical tube with uniform wall heat flux // *Heat Mass Transfer*. 2001. Vol. 38, No. 1–2. P. 129–140.
23. **Barletta A., Zanchini E.** Mixed convection with Viscous dissipation in an inclined channel with prescribed wall temperatures // *Inter. J. Heat Mass Transfer*. 2001. Vol. 44, No. 22. P. 4267–4275.
24. **Businger S., Businger J. A.** Viscous dissipation of turbulent kinetic energy in storms // *J. Atmospheric Sci.* 2001. Vol. 58, No. 28. P. 3793–3796.
25. **Abo-Eldahab E. M., El Aziz M. A.** Viscous dissipation and joule heating effects on MHD-free convection from a vertical plate with power-law variation in surface temperature in the presence of Hall and ion-slip currents // *Appl. Math. Modelling*. 2005. Vol. 29, No. 6. P. 579–595.
26. **Soundalgekar V. M., Uplekar A. G., Jaiswal B. S.** Transient free convection flow of dissipative fluid past an infinite vertical porous plate // *Arch. Mech.* 2004. Vol. 56, No. 1. P. 7–17.
27. **Watanabe T., Pop I.** Thermal boundary layers in magnetohydrodynamic flow over a flat plate in the presence of transverse magnetic field // *Acta Mech.* 1994. Vol. 105, No. 1–4. P. 233–238.
28. **Makinde O. D., Maserumule R. L.** Thermal criticality and entropy analysis for a variable viscosity Couette flow // *Phys. Scr.* 2008. Vol. 78, No. 1. P. 1–6.
29. **Makinde O. D.** Irreversibility analysis of variable viscosity channel flow with convective cooling at the walls // *Can. J. Phys.* 2008. Vol. 86, No. 2. P. 383–389.
30. **Hassan H., Regnier N., Pujos C., Defaye G.** The effect of viscous dissipation on the polymer temperature during injection molding // *5th European Thermal-Sci. Conf. The Netherlands*. 2008.
31. **Lienhard IV J. H., Lienhard V J. H.** *A Heat Transfer Textbook*. Cambridge MA: Phlogiston Press, 3rd edition (version 1.24). 2006. P. 707–718.

Статья поступила в редакцию 14 апреля 2010 г.

Постоянные величины, использованные в уравнениях (13)–(16):

$$z = \sqrt{i},$$

$$X_1 = \frac{i}{2\text{St}(1-\text{Pr}) \cos h(z\sqrt{\text{St Pr}})}, \quad X_2 = \frac{z}{2\sqrt{\text{Pr St}}^{3/2}(1-\text{Pr}) \cos h(z\sqrt{\text{St Pr}})},$$

$$X_3 = \frac{4}{\text{St}^2(\text{Pr}-1)^3 \cos h(z\sqrt{\text{St}})}, \quad X_4 = \frac{-2z}{\text{St}^{3/2}(\text{Pr}-1)^2 \cos h(z\sqrt{\text{St}})},$$

$$X_5 = X_1 - X_2 \text{tg} h(z\sqrt{\text{St Pr}}) - \frac{X_3 \cos h(z\sqrt{\text{St}})}{\cos h(z\sqrt{\text{St Pr}})} + \frac{X_4 \sin h(z\sqrt{\text{St}})}{\cos h(z\sqrt{\text{St Pr}})},$$

$$q_1 = \frac{i X_1}{\text{St}(1-\text{Pr})}, \quad q_2 = \frac{X_2 + 4q_1 z \sqrt{\text{St Pr}}}{i\text{St}(1-\text{Pr})}, \quad q_0 = \frac{X_5 + 2q_1 + 2q_2 z \sqrt{\text{St Pr}}}{i\text{St}(1-\text{Pr})},$$

$$R_1 = \frac{X_4}{4z\sqrt{\text{St}}}, \quad R_2 = \frac{iz(X_3 - 2R_1)}{2\text{St}},$$

$$C = \frac{R_1 \cos h(z\sqrt{\text{St}}) + (q_0 + q_1) \cos h(z\sqrt{\text{St Pr}}) + R_2 \sin h(z\sqrt{\text{St}}) + q_2 \sin h(z\sqrt{\text{St Pr}})}{-\cos h(z\sqrt{\text{St}})},$$

$$k_0 = \frac{iz}{12\sqrt{\text{St}} \cos h(z\sqrt{\text{St}})}, \quad k_1 = \frac{i}{48\text{St}} \left(\sec h(z\sqrt{\text{St}}) \text{tg} h(z\sqrt{\text{St}}) \right), \quad k_2 = \frac{-k_1}{z\sqrt{\text{St}}},$$

$$d = -\left(2(k_0 + k_2) \text{tg} h(z\sqrt{\text{St}}) + 2k_1 \right),$$

$$m_0 = -\left((m_1 + m_3) \text{tg} h(z\sqrt{\text{St}}) + m_2 + m_4 \right), \quad m_1 = \frac{d - 4m_2}{4z\sqrt{\text{St}}},$$

$$m_2 = \frac{k_2 - 6m_3}{4z\sqrt{\text{St}}}, \quad m_3 = \frac{k_1 - 12m_4}{6z\sqrt{\text{St}}}, \quad m_4 = \frac{k_0}{8z\sqrt{\text{St}}}.$$