

**ДВУХФАЗНОЕ ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛЕ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ  
(КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ)***Л. А. Вулис, П. Л. Гусика, Г. В. Жижин**(Ленинград)*

С помощью трехмерной фазовой диаграммы выполнено подробное качественное исследование одномерного стационарного течения идеального газа, несущего твердые частицы. Результаты анализа позволили определить характер течения и сопутствующих ему процессов обмена импульсом и энергией между фазами при всех возможных в принципе режимах. Определены границы зон устойчивых и неустойчивых равновесных состояний. Показано, что закономерности двухфазного потока в общем случае (когда исходные значения скорости отдельных фаз, а также температуры не равны) не переходят непрерывно к зависимостям, соответствующим течениям с одинаковыми значениями скорости или температуры фаз, а также течениям при отсутствии одного из воздействий.

Исследование двухфазных течений, как правило, требует применения численных методов расчета с помощью ЭЦВМ. Однако многообразие возможных режимов течения и резкое, иногда качественное различие их при, казалось бы, близких начальных условиях затрудняет истолкование и обобщение результатов численного расчета [1]. Поэтому представляет интерес систематическое и доведенное до конца качественное исследование сравнительно несложной (по постановке) задачи о стационарном одномерном течении в канале постоянного сечения смеси газа с твердыми частицами при учете теплового и динамического взаимодействия между фазами. Причиной взаимодействия служит различие локальных значений скорости и температуры отдельных фаз. Все другие виды возможных воздействий (трение о стенки, теплоотдача к стенкам и др.) не учитываются. Считается, что доля поперечного сечения канала, занятая частицами, и их парциальное давление пренебрежимо малы. Вязкость и теплопроводность газа учитываются в неявном виде только в выражениях взаимодействия фаз. Кроме того, число Маха, рассчитанное по относительной скорости, считается меньшим единицы (т. е. тепловой поток от одной фазы к другой приближенно рассчитывается по разности значений статической температуры). Принимается также, что диаметры частиц твердой фазы мало отличаются друг от друга, так что можно в расчет взаимодействия ввести некоторый эффективный диаметр частицы. Возможные в принципе фазовые превращения не учитываются, но на температуру твердой фазы не накладываются какие-либо ограничения.

Помимо конечных результатов исследования интерес может представить использованный метод — анализ процесса в плоской и главным образом пространственной (трехмерной) фазовых диаграммах, общий для ряда задач газовой динамики (например, для МГД или ЭГД квазиодномерных течений, течений с ионизацией или диссоциацией и др. [2-8]). Это относится, в частности, к высказанному ниже суждению о принципиальном, качественном (не говоря о количественном) различии результатов исследования для течения с обоими видами неравновесности или только с одним из них — динамическим или тепловым. В последнем случае анализ задачи естественно упрощается и может быть ограничен рамками плоской фазовой диаграммы. Однако непрерывный предельный переход к ней от пространственной диаграммы отсутствует, искажаются условия, определяющие равновесные режимы и суждение об их устойчивости. Общее для всей работы допущение об одномерности течения отвечает задаче качественного исследования, и, по-видимому, может служить приемлемым приближением для реального явления. Исходными для исследования, как и в других аналогичных случаях, являются уравнения закона обращения воздействий [9].

Ниже приводятся сравнительно подробные соображения и результаты физического характера. Что же касается деталей математического исследования, то изложение их хотя и схематично из-за громоздкости, но достаточно полно, чтобы отразить все основные этапы анализа.

**1. Основные уравнения.** При указанных ограничениях (более полный вид уравнений двухфазного потока см., например, [10, 11]) уравнения нераз-

рывности движения и энергии запишем в простейшем виде

$$\rho_1 \frac{du_1}{dx} + u_1 \frac{d\rho_1}{dx} = 0, \quad \kappa = \frac{\rho_2 u_2 F_2}{\rho_1 u_1 F_1} = \text{const} \quad (1.1)$$

$$\rho_1 u_1 \frac{du_1}{dx} + \kappa \rho_1 u_1 \frac{du_2}{dx} + \frac{dp}{dx} = 0 \quad (1.2)$$

$$\rho_1 u_1 \frac{d}{dx} \left( c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) + \kappa \rho_1 u_1 \frac{d}{dx} \left( c T_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) = 0 \quad (1.3)$$

где  $u$ ,  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$  — соответственно скорость, плотность, давление и температура;  $\kappa$  — отношение массовых расходов фаз (твердой к газовой),  $F$  — площадь поперечного сечения канала (считается, что площадь, занятая в поперечном сечении твердой фазы  $F_2 \ll F_1$  и  $F_1 \approx F = \text{const}$  для газа); индексы 1 и 2 здесь и ниже относятся к газу и частицам соответственно,  $c_p$  — теплоемкость газа при постоянном давлении;  $c$  — теплоемкость частиц,  $x$  — координата, ориентированная вдоль канала. Уравнения (1.1) — (1.3) должны быть дополнены уравнением состояния газа, которое в силу принятых выше предположений следует взять в виде

$$p = \rho_1 R T_1 \quad (1.4)$$

где  $R$  — удельная газовая постоянная, и уравнениями, определяющими скорость  $u_2$  и температуру  $T_2$  частиц. В обычных предположениях, введя коэффициенты сопротивления  $C_x$  и теплоотдачи  $\alpha$  (для условно сферической частицы диаметра  $d$ ), уравнения для скорости и температуры частиц представим в виде [10-13]

$$\rho_2 u_2 \frac{du_2}{dx} = \frac{3}{4} \frac{C_x}{d} \rho_1 |u_1 - u_2| (u_1 - u_2) \quad (1.5)$$

$$\rho_2 u_2 \frac{dT_2}{dx} = \frac{6\lambda_1}{cd^2} \text{Nu} (T_1 - T_2)$$

где

$$C_x = C_x(\text{Re}), \quad \text{Re} = \frac{|u_1 - u_2| d}{\nu_1}$$

$$\text{Nu} = \frac{\alpha d}{\lambda_1} = \text{Nu}(\text{Re}, \text{Pr}), \quad \text{Pr} = \frac{\rho_1 \nu_1 c_{p1}}{\lambda_1}$$

Конкретные критериальные зависимости  $C_x = C_x(\text{Re})$  и  $\text{Nu} = \text{Nu}(\text{Re}, \text{Pr})$  могут быть выбраны в соответствии с диапазоном значений числа Рейнольдса  $\text{Re}$  (см., например, [12]). Для дальнейшего качественного исследования вид их несуществен; более того, для последующего удобно придать уравнениям (1.5) вид «релаксационных равенств»

$$\frac{du_2}{dx} = \frac{u_1 - u_2}{l_d}, \quad \frac{dT_2}{dx} = \frac{T_1 - T_2}{l_t} \quad (1.6)$$

где  $l_d$  и  $l_t$  — соответственно характерные условные длины (в общем случае переменные) динамической и тепловой релаксаций.

Исходные уравнения преобразуем к стандартному виду уравнений обращения воздействий [9] для скорости течения, термодинамических параметров и числа Маха  $M$

$$\begin{aligned} (M^2 - 1) &= \frac{d \ln \xi}{dx} = k_l W_l + k_f W_f + k_q W_q \\ W_l &= \kappa \frac{u_2}{a_1^2} \frac{du_2}{dx}, \quad W_f = \kappa (u_1 - u_2) \frac{\gamma}{a_1^2} \frac{du_2}{dx} \\ W_q &= -\kappa \frac{c\gamma}{c_p(\gamma - 1)} \frac{dT_2}{dx}, \quad M = \frac{u_1}{a_1}, \quad a_1^2 = \gamma \frac{p}{\rho_1} \end{aligned} \quad (1.7)$$

где  $\xi$  может быть  $u_1$ ,  $\rho_1$ ,  $p$ ,  $T_1$  или  $M^2$ ,  $W_l$  — воздействие, связанное с механической изэнтропической работой ускорения (замедления) частиц,  $W_f$ ,  $W_q$  — воздействия, обусловленные трением и теплообменом между фазами соответственно,  $k_l$ ,  $k_f$ ,  $k_q$  — коэффициенты влияния приведены в табл. 1.

Таблица 1

$\xi$	$u_1$	$\rho_1$	$p$	$T_1$	$M^2$
$k_l - 1$	2	1	$\gamma$	$(\gamma - 1)$	$-(\gamma + 1)$
$k_f - 1$	-1	1	$1 + (\gamma - 1)M^2$	$(\gamma - 1)M^2$	$-[2 + (\gamma - 1)M^2]$
$k_q - 1$	-1	1	$\gamma M$	$(\gamma M^2 - 1)$	$-(\gamma M^2 + 1)$

**2. Предварительное обсуждение.** В полном виде задача исследования сводится к построению интегральных кривых системы уравнений (1.1) — (1.4) и (1.6), т. е. к определению характера изменения по длине канала, скорости и температуры обеих фаз  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $T_1$  и  $T_2$ , а также давления и числа Маха. Для уменьшения числа переменных введем относительные значения скорости фаз  $V = u_1/u_2$  и температуры  $\Theta = T_1/T_2$ . Из физических соображений очевидно, что рассматриваемой задаче отвечают неравенства

$$\frac{du_2}{dx} > 0 \quad \text{при } V > 1, \quad \frac{du_2}{dx} < 0 \quad \text{при } V < 1$$

и, соответственно

$$\frac{dT_2}{dx} > 0 \quad \text{при } \Theta > 1, \quad \frac{dT_2}{dx} < 0 \quad \text{при } \Theta < 1$$

С учетом этих ограничений (исключающих физически нереальные процессы типа  $du_2 > 0$  при  $V < 1$  и т. п.) можно указать 16 возможных в принципе режимов, представленных в табл. 2. Часть из режимов следует исключить или ограничить. Это относится к режимам А-I и Г-IV, противоречащим первому началу термодинамики, режиму Г-II (также Г-IV), противоречащему второму началу. Кроме того, исходя из закона обращения воздействий, два из режимов (А-II и Б-II) могут существовать только в дозвуковой области течения, а один (В-II) — только в сверхзвуковой. (Этот же закон исключает также режим Г-II как при  $M < 1$ , так и при  $M > 1$ .) Ограничения эти связаны с тем, что во всех режимах типа Г-II составляющие элементарные воздействия — работа, совершаемая газом, трение и подвод тепла — приводят к однозначному ускорению газа при  $M < 1$ , замедлению его и понижению температуры при  $M > 1$  [9]. Во всех осталь-

Таблица 2

Режим		$\frac{du_1}{dx}$	$\frac{dT_1}{dx}$	$\frac{du_1}{dx}$	$\frac{dT_1}{dx}$	$\frac{du_1}{dx}$	$\frac{dT_1}{dx}$	$\frac{du_1}{dx}$	$\frac{dT_1}{dx}$
		А		Б		В		Г	
I	$V > 1; \Theta > 1$	$> 0$	$> 0$	$> 0$	$< 0$	$< 0$	$< 0$	$< 0$	$< 0$
II	$V > 1; \Theta < 1$	$> 0$	$> 0$	$> 0$	$< 0$	$< 0$	$< 0$	$< 0$	$< 0$
		$M < 1$		$M < 1$		$M > 1$			
III	$V < 1; \Theta > 1$	$> 0$	$> 0$	$> 0$	$< 0$	$< 0$	$> 0$	$< 0$	$< 0$
IV	$V < 1; \Theta < 1$	$> 0$	$> 0$	$> 0$	$< 0$	$< 0$	$> 0$	$< 0$	$< 0$

ных случаях возможна (и расчет это подтверждает) взаимная компенсация противоположных по характеру влияния на газовое течение воздействий. Эти предварительные соображения ограничивают число возможных режимов при разных значениях  $V$ ,  $\Theta$  и  $M$ . При этом запретные режимы (А-I, Г-II и Г-IV), естественно, не реализуются и при течении в каналах переменного сечения, тогда как ограничения по числу Маха относятся только к цилиндрическим и сужающимся каналам.

Система уравнений (1.1) — (1.6), описывающая течение двухфазной смеси, содержит большое число неизвестных ( $u_1, u_2, T_1, T_2, p, M$ ), характер изменения которых по длине канала при различных условиях подлежит определению. Именно зависимости параметров течения от координаты представляют собой конечный результат качественного исследования, выполненного с помощью многомерной фазовой диаграммы. Решение существенно упрощается, если удастся (как в рассматриваемом случае) уменьшить число фазовых координат — соответствующим образом выбранных определяющих функций. В общем случае двухфазного потока при неравных значениях скорости обеих фаз, а также температуры исходную систему уравнений (1.1) — (1.6) можно свести к трем автономным уравнениям и, соответственно, трехмерному фазовому пространству  $M^2 - V - \Theta$ . В частных случаях при  $V = 1$  или  $\Theta = 1$  (также при  $u_2 = \text{const}$  или  $T_2 = \text{const}$ ) речь идет о плоских фазовых диаграммах  $M^2 - \Theta$  или  $M^2 - V$ .

Качественное исследование уравнений с помощью фазовых диаграмм схематически сводится к следующему:

1) находятся совокупности точек, в которых траектории фазового пространства меняют свое направление. В этих точках производные от фазовых координат по независимой переменной обращаются в нуль. В фазовой плоскости совокупности таких точек образуют линии, в пространстве — поверхности. Такие линии и поверхности будем называть нулевыми [2]. Нулевые линии (поверхности) вместе с прямой (плоскостью)  $M^2 = 1$ , при переходе через которую производные терпят разрыв ( $\pm \infty$ ), разбивают фазовую диаграмму на области с постоянными знаками производных. Это позволяет представить поведение траекторий во всех точках фазовых диаграмм, за исключением особых точек, в которых пересекаются все нулевые линии (поверхности);

2) определяется тип особых точек. Простейшими особыми точками, как известно, являются особенности типа седла, узла, фокуса и центра [2, 14]; в общем случае могут, однако, встречаться и более сложные особые точки [6, 15];

3) на фазовой плоскости находятся сепаратрисы, отделяющие один тип траекторий от другого. В фазовом пространстве сепаратрисы образуют сепаратрисные поверхности;

4) строятся линии или поверхности, в точках которых производные от неизвестных не являющихся фазовыми координатами, обращаются в нуль. По пересечению этих линий или поверхностей траекторий можно установить характер изменения всех параметров течения вдоль канала и тем самым довести исследование до конца.

**3. Пространственная фазовая диаграмма.** Система уравнений обращения воздействий (1.7) для скорости и температуры фаз после введения относительных значений  $V = u_2 / u_1$  и  $\Theta = T_1 / T_2$  в качестве новых зависимых переменных может быть сведена к трем уравнениям

$$(M^2 - 1) \frac{dV}{V d\chi} = \frac{F_V}{V^2 \Theta}, \quad (M^2 - 1) \frac{d\Theta}{\Theta d\chi} = \frac{F_\Theta}{V^2 \Theta}$$

$$(M^2 - 1) \frac{dM^2}{M^2 d\chi} = \frac{F_M}{V^2 \Theta} \quad (3.1)$$

<sup>1</sup> Прямая (плоскость)  $M^2 = 1$  представляет собой совокупность точек, отвечающих предельным состояниям течения. Одни из них устанавливаются в выходном сечении канала (кризис течения [9]), другие — на входе в него.

где  $\chi$  — приведенная длина — координата, ориентированная вдоль канала

$$\chi = \int_0^x \frac{c}{c_p} \kappa \frac{dx}{l_t}$$

$$F_V = (\Theta - 1) V^2 - \Theta (V - 1) \left[ \gamma M^2 (V - 1) + M^2 + \frac{V^2}{\kappa} (V^2 - 1) \right] \alpha$$

$$F_\Theta = -(\Theta - 1) V^2 \left[ \gamma M^2 - 1 + \frac{c_p \Theta}{c \kappa} (M^2 - 1) \right] +$$

$$+ \Theta (\gamma - 1) M^2 (V - 1) [\gamma M^2 (V - 1) + 1] \alpha$$

$$F_M = (\Theta - 1) V^2 (\gamma M^2 + 1) -$$

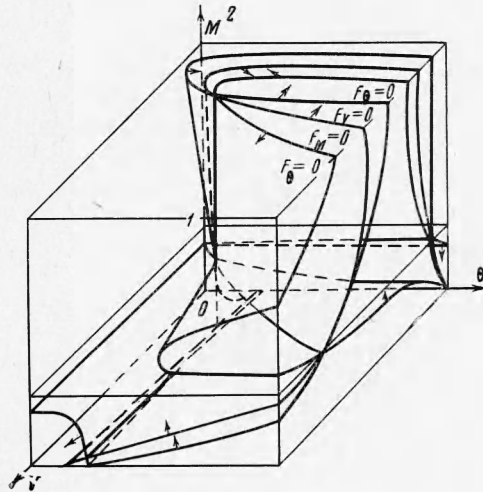
$$- M^2 \Theta (V - 1) [(\gamma - 1) (\gamma M^2 + 1) (V - 1) + (\gamma + 1) V] \alpha$$

и  $\alpha = (c_p / c) (l_t / l_d)$ . Параметр  $\alpha$  для простоты можно принять постоянным. Это не отразится на результатах качественного анализа, так как тип особых точек на линии равновесия не зависит от величины  $\alpha$  (см. ниже). С учетом условия  $\alpha = \text{const}$  система уравнений (3.1) является автономной, решения ее могут быть изображены траекториями в фазовом пространстве  $M^2 - V - \Theta$  (разумеется, в той части его, где  $M^2, V$  и  $\Theta > 0$ ).

Равенства нулю функций  $F_V, F_\Theta, F_M$  представляют собой уравнения нулевых поверхностей, в точках которых соответственно

$$\frac{dV}{d\chi} = 0, \quad \frac{d\Theta}{d\chi} = 0, \quad \frac{dM^2}{d\chi} = 0$$

Нулевые поверхности и пересечения их и плоскости  $M^2 = 1$  изображены на фиг. 1. Стрелки на поверхностях указывают на области фазового пространства, в которых знак производной от данной фазовой переменной по координате положителен. Нулевые поверхности пересекаются по прямой  $V=1, \Theta=1$  и по кривой  $M^2=1, \eta = (\Theta - 1)V^2 - \alpha\gamma\Theta(V - 1) \cdot (V - \Gamma)$ , где  $\Gamma = (\gamma - 1) / \gamma$ . Все точки прямой  $V=1, \Theta=1$  соответствуют положениям равновесия. Линеаризуем систему (3.1) в окрестности этой прямой



Фиг. 1

$$(M^2 - 1) \frac{dV}{d\chi} = (V - 1) \alpha \frac{(1 + \kappa)}{\kappa} \left( \frac{1}{1 + \kappa} - M^2 \right) + (\Theta - 1)$$

$$(M^2 - 1) \frac{d\Theta}{d\chi} = (V - 1) \alpha \gamma \Gamma M^2 - (\Theta - 1) \left[ \frac{c_p}{c \kappa} (M^2 - 1) + \gamma M^2 - 1 \right] \quad (3.2)$$

$$(M^2 - 1) \frac{dM^2}{d\chi} = - (V - 1) \alpha (\gamma + 1) M^4 + (\Theta - 1) M^2 (\gamma M^2 + 1)$$

Собственные числа, определяющие тип особенности положений равновесия на прямой  $V=1, \Theta=1$ , находятся из равенства нулю определителя [2, 12, 13]

$$\begin{vmatrix} \left[ \frac{\alpha(1+\kappa)}{\kappa(M^2-1)} \left( \frac{1}{1+\kappa} - M^2 \right) - \lambda \right], & \frac{1}{(M^2-1)}, & 0 \\ \alpha \frac{\gamma \Gamma M^2}{(M^2-1)}, & \left[ -\frac{(M^2-1)c_p/c\kappa + (\gamma M^2 - 1)}{(M^2-1)} - \lambda \right], & 0 \\ -\alpha \frac{(\gamma+1)M^4}{(M^2-1)}, & \frac{M^2(\gamma M^2 + 1)}{(M^2-1)}, & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3)$$

Одно из собственных чисел тождественно равно нулю. Следовательно, траектории в окрестности особых точек прямой равновесия расположены в плоскостях. Два других собственных значения  $\lambda_{1,2} < 0$  при  $M^2 > 1$ ,  $M^2 < (1 + \kappa)^{-1} \gamma^* / \gamma$  ( $\gamma^* = (c_p + \kappa c) / (C_V + \kappa c)$ ). Это соответствует устойчивому положению равновесия типа узла. Фазовые траектории сходятся к точкам этого типа (см. фиг. 2). При малом отклонении от значений  $V = 1$  и  $\Theta = 1$  возникает стремление к возврату в исходное состояние. При  $(1 + \kappa)^{-1} \gamma^* / \gamma < M^2 < 1$  собственные числа  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ . На этом отрезке прямой  $V = 1$ ,  $\Theta = 1$  неустойчивым положениям равновесия соответствуют особые точки типа седла; малые отклонения от них приводят к дальнейшему удалению траектории от положения равновесия.

Для определения особых точек на плоскости  $M^2 = 1$  используем введенную выше переменную  $\eta$ . Систему уравнений (3.1) можно свести к двум дифференциальным уравнениям относительно  $M^2$  и  $\eta$ . Следовательно, аналогично работе [4] фазовые траектории в окрестности особых точек плоскости  $M^2 = 1$  также расположены в плоскостях. Уравнение относительно  $M^2$  и  $\eta$  после линеаризации имеет вид

$$\frac{dM^2}{d\eta} = \frac{A\eta + B(M^2 - 1)}{C\eta + D(M^2 - 1)} \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\gamma+1)}{\Theta V^2}, & B &= \alpha \gamma^2 \frac{(V-1)}{V^2} \left( \frac{\gamma+1}{\gamma} \Gamma - V \right) \\ C &= \frac{\alpha \gamma}{V} (\Gamma + 1) + 2(V - \alpha \gamma) - \frac{(\gamma+1)}{\Theta} \\ D &= \alpha \gamma \Theta (V-1) \left\{ \frac{\gamma V}{\Theta} \left[ \gamma \Gamma (V - \Gamma) - 1 \right] - \frac{c_p \Theta}{c \kappa} (V - \Gamma) + \left( \frac{V}{\gamma \kappa} - \frac{V - \Gamma}{V} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \alpha \gamma (2V - \Gamma - 1) - 2V \frac{(\Theta - 1)}{\Theta} \right] \right\} \end{aligned}$$

Собственные числа находятся из равенства нулю определителя [13]

$$\begin{vmatrix} (A - \lambda) & B \\ C & (D - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Собственные числа зависят от координат особых точек и параметров задачи. Одно из возможных распределений особых точек на кривой  $\eta = 0$ ,  $M^2 = 1$  показано на фиг. 2. При  $V < 1$  часть кривой может состоять из особых точек типа фокуса (например, при  $\alpha = 1$ ,  $\gamma = 1.4$  область фокусов образуется для значений  $\kappa = 0.17$ ). Незначительный размер этой области и узкий диапазон параметров, соответствующих ей, а также относительная простота траекторий позволяют опустить анализ течений для особых точек типа фокуса. Через особые точки типа седла и узла на плоскости  $M^2 = 1$  возможен непрерывный переход скорости течения газа через скорость звука. Кривая  $\eta = 0$  разделяет плоскость  $M^2 = 1$  на области кризиса течения (не заштрихована на фиг. 2) и предельных состояний на выходе в канал (заштрихована на фиг. 2).

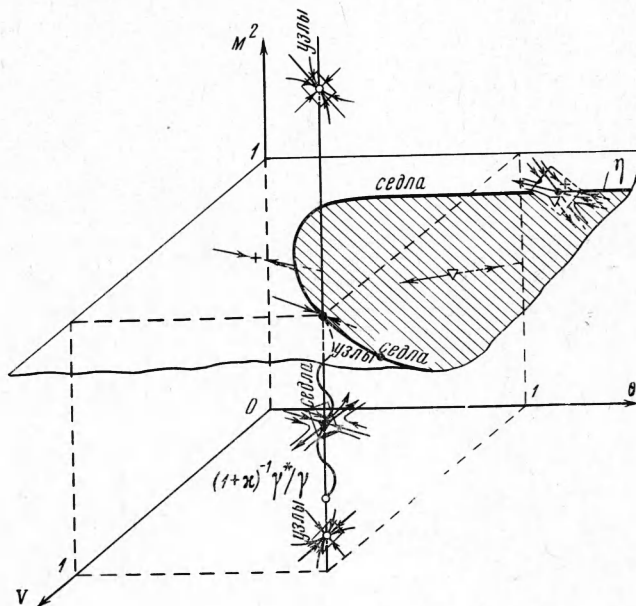
Начало координат фазового пространства ( $M^2 = V = \Theta = 0$ ) также представляет собой особую точку — трехмерный узел. Действительно,

линеаризуя уравнения (3.1) в окрестности этой точки, получим

$$\frac{dM^2}{dV} = \frac{M^2}{V}, \quad \frac{dM^2}{d\Theta} = \frac{M^2}{\Theta}$$

Следовательно,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ .

Для построения поля траекторий во всем фазовом пространстве найдем сепаратрисные поверхности, образованные из траекторий, исходящих



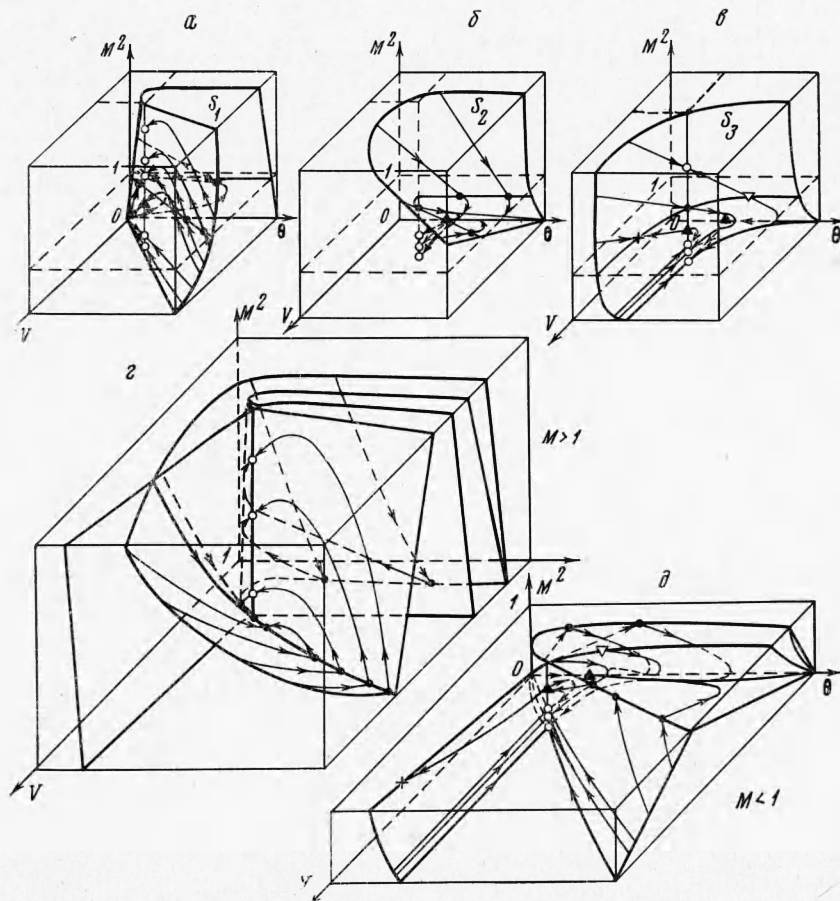
Фиг. 2

по направлениям из особых точек прямой равновесия  $V = \Theta = 1$  и кривой  $\eta = 0$ ,  $M^2 = 1$ . Три сепаратрисные поверхности ( $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ ) изображены на фиг. 3. Поверхность  $S_1$  (фиг. 3, а) проходит через прямую равновесия  $V_2 = 1$ ,  $\Theta = 1$ , ось  $\Theta$  ( $V = M^2 = 0$ ) и кривую  $\eta = 0$ ,  $M^2 = 1$ . По этой поверхности в основном осуществляется непрерывный переход от дозвуковых течений к сверхзвуковым. Поверхность  $S_2$  проходит через кривую  $\eta = 0$ ,  $M^2 = 1$ , часть оси  $\Theta$  ( $V = M^2 = 0$ ) и часть прямой  $\Theta = 1$ ,  $M^2 = 0$ . По ней осуществляется непрерывный переход из сверхзвуковых течений к дозвуковым. Наконец, поверхность  $S_3$  (фиг. 3, в) проходит через прямую равновесия  $V = 1$ ,  $\Theta = 1$ , прямую  $\Theta = 1$ ,  $M^2 = 0$  и часть оси  $\Theta$  ( $V = M^2 = 0$ ). Ей принадлежит траектория, проходящая через точку  $M^2 = 1$ ,  $V = 1$ ,  $\Theta = 1$ . Сепаратрисные поверхности делят фазовое пространство на шесть областей, каждая из которых включает в себя подобласть сверхзвукового (фиг. 3, г) и дозвукового течения газа (фиг. 3, д). На сепаратрисных поверхностях (фиг. 3) нанесены отдельные траектории, образующие эти поверхности. Стрелки на траекториях указывают на изменение фазовых переменных  $M^2$ ,  $\Theta$  и  $V$  вдоль канала (в положительном направлении координаты  $\chi$ ).

Траектории фазового пространства, не принадлежащие фазовым поверхностям, стягиваются к ним в окрестности особых линий. Это обстоятельство позволяет достаточно наглядно представить все поле траекторий, которые начинаются в начале координат и в предельных состояниях на

входе в канале (на плоскости  $M^2 = 1$ ), или исходят из положений неустойчивого равновесия, т. е. совпадают с соответствующими сепаратрисами седел. Заканчиваются траектории, приходя к кризису течения или к положению устойчивого равновесия.

Любому конкретному течению в канале отвечает на фазовой диаграмме определенный отрезок одной из фазовых траекторий, начальная точка которого соответствует состоянию потока во входном сечении канала, конечная — в выходном.

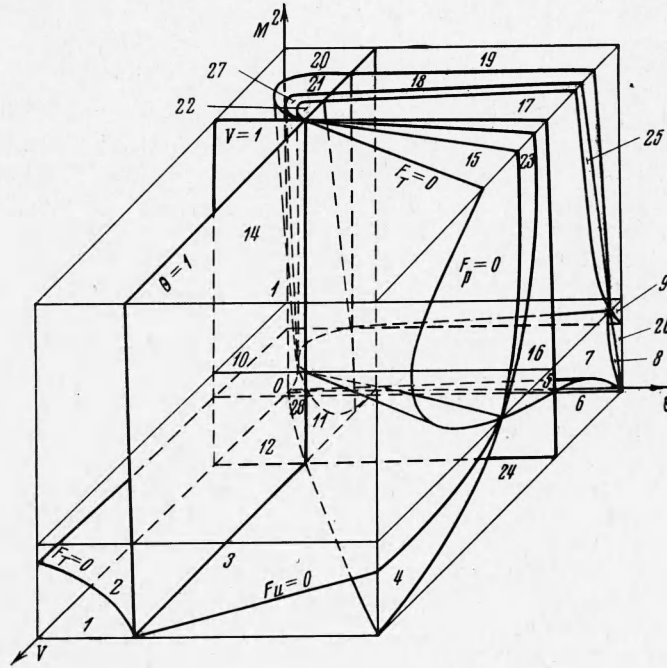


Фиг. 3

Заметим, что проведение интегральных кривых легко объяснить с помощью второго начала термодинамики. Энтропия  $S$  двухфазного потока возрастает вдоль фазовых траекторий в направлениях, указанных стрелками. На линии равновесия  $V = 1$ ,  $\Theta = 1$  каждой точке соответствует экстремум энтропии: при  $M^2 > 1$  и  $M^2 < (1 + \kappa)^{-1} \gamma^* / \gamma$  — максимум, при  $1 > M^2 > (1 + \kappa)^{-1} \gamma^* / \gamma$  — максимум для траекторий, стремящихся к линии равновесия, и минимум для отходящих от нее траекторий, стремящихся к линии равновесия, и минимум для отходящих от нее траекторий. На плоскости  $M^2 = 1$  производные газодинамических параметров по координате стремятся к бесконечности, а изменение энтропии ограни-



чено. Поэтому состояния при  $M^2 = 1$  являются изэнтропическими (по отношению к изменению параметров потока  $dS/du_1 = 0$  и т. п.). Совокупность точек, ограниченная кривой  $\eta = 0$  на плоскости  $M^2 = 1$  (на фиг. 2 заштрихована), отвечает состояниям с минимальной энтропией, остальные точки плоскости соответствуют максимуму энтропии. Таким образом, все состояния на линии равновесия  $V = 1$ ,  $\theta = 1$  и плоскости  $M^2 = 1$  (исключая проходные точки на линии  $\eta = 0$ ,  $M^2 = 1$ ) являются предельными — начальными, в которых энтропия минимальна, и конечными,



Фиг. 4

в которых она максимальна. В проходных точках все параметры потока, включая энтропию, изменяются непрерывно.

Для определения характера изменения различных переменных по длине канала найдем дополнительно поверхности в фазовом пространстве, в точках которых обращаются в нуль производные давления, скорости, температуры фаз по независимой переменной  $\chi$ . Из уравнений (1.6) и закона обращения воздействий (1.7) получим

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\chi} = 0, \quad \text{если} \quad F_p = [V + \gamma \Gamma M^2 (V - 1)] \alpha (V - 1) \Theta - V^2 (\Theta - 1) = 0 \\ \frac{du_1}{d\chi} = 0, \quad \text{если} \quad F_u = (\Theta - 1) V^2 - \Theta \gamma M^2 (V - 1) (V - \Gamma) = 0 \\ \frac{dT_1}{d\chi} = 0, \quad \text{если} \quad F_T = (\Theta - 1) V^2 (1 - \gamma M^2) + \\ + \Theta \gamma \Gamma M^2 (V - 1) [\gamma M^2 (V - 1) + 1] = 0 \\ \frac{du_2}{d\chi} = 0, \quad \text{если} \quad V = 1; \quad \frac{dT_2}{d\chi} = 0, \quad \text{если} \quad \Theta = 1 \end{aligned}$$

Поверхности  $F_p = 0$ ,  $F_u = 0$ ,  $F_T = 0$ , плоскости  $V = 1$ ,  $\Theta = 1$  и  $M^2 = 1$ , показанные на фиг. 4, делят фазовое пространство на 28 областей с заданными знаками производных (см. табл. 3). Наблюдая за тем, как

Таблица 3

Номер области на фиг. 4	$u_2'$	$u_1'$	$T_2'$	$T_1'$	$p'$	Номер области на фиг. 4	$u_2'$	$u_1'$	$T_2'$	$T_1'$	$p'$
1	$>0$	$>0$	$<0$	$>0$	$<0$	9, 17	$<0$	$>0$	$>0$	$<0$	$<0$
2	$>0$	$>0$	$<0$	$<0$	$<0$	10, 22	$<0$	$>0$	$<0$	$<0$	$<0$
3, 16	$>0$	$>0$	$>0$	$<0$	$<0$	11, 20	$<0$	$>0$	$<0$	$>0$	$>0$
4, 23	$>0$	$<0$	$>0$	$<0$	$<0$	12, 27	$<0$	$>0$	$<0$	$>0$	$<0$
5, 14	$>0$	$<0$	$>0$	$<0$	$>0$	13	$>0$	$<0$	$<0$	$>0$	$>0$
6	$<0$	$<0$	$>0$	$<0$	$>0$	15, 24	$>0$	$<0$	$>0$	$<0$	$>0$
7, 19	$<0$	$<0$	$>0$	$>0$	$>0$	21, 28	$<0$	$>0$	$<0$	$<0$	$>0$
8, 18	$<0$	$>0$	$>0$	$>0$	$>0$	25, 26	$<0$	$>0$	$>0$	$>0$	$<0$

траектории в каждой из шести зон фазового пространства проходят через эти поверхности и между ними, можно установить характер изменения давления, скорости и температуры фаз, а также других параметров, вдоль траекторий.

На фиг. 5 приведена сводка практически всех возможных режимов течения, классифицированных по типам траекторий, приводящих к сверхзвуковым и дозвуковым устойчивым положениям равновесия ( $V = 1$ ,  $\Theta = 1$ ) или заканчивающихся кризисом ( $M^2 = 1$ ), а также для траекторий, отвечающих непрерывному переходу через скорость звука. Характер изменения параметров по длине канала для режимов, соответствующих особым точкам типа узла, показан на фиг. 5, а ( $M > 1$ ) и 5, б ( $M < 1$ ). Цифры над кривыми указывают на соответствующие области фазового пространства (см. фиг. 4). Особым точкам типа седла на прямой равновесия соответствуют режимы течения, показанные на фиг. 5, в. Изменение параметров течения, заканчивающихся кризисом ( $M = 1$ ), показаны на фиг. 5, г. Течения, соответствующие непрерывному переходу через скорость звука вдоль траекторий, образующих сепаратрисные поверхности  $S_1$  и  $S_2$  (фиг. 3, а и 3, б), характеризуются режимами, приведенными на фиг. 5, д и 5, е соответственно.

**4. Плоские фазовые диаграммы.** Рассмотрим четыре частных случая двухфазных течений, допускающих исследование с помощью плоских фазовых диаграмм  $M^2 - V$  или  $M^2 - \Theta$ , а именно:

1) двухфазный поток с одинаковой температурой обеих фаз  $\Theta = 1$  при  $V \neq 1$ . Этому отвечает мгновенная температурная релаксация  $l_t = 0$ . Вместо равенства (1.6) примем  $dT_1/dx = dT_2/dx$ ;

2) двухфазный поток с одинаковой скоростью фаз  $V = 1$  при  $\theta \neq 1$ . Ему соответствует мгновенная скоростная релаксация  $l_d = 0$  и равенство  $du_1/dx = du_2/dx$ ;

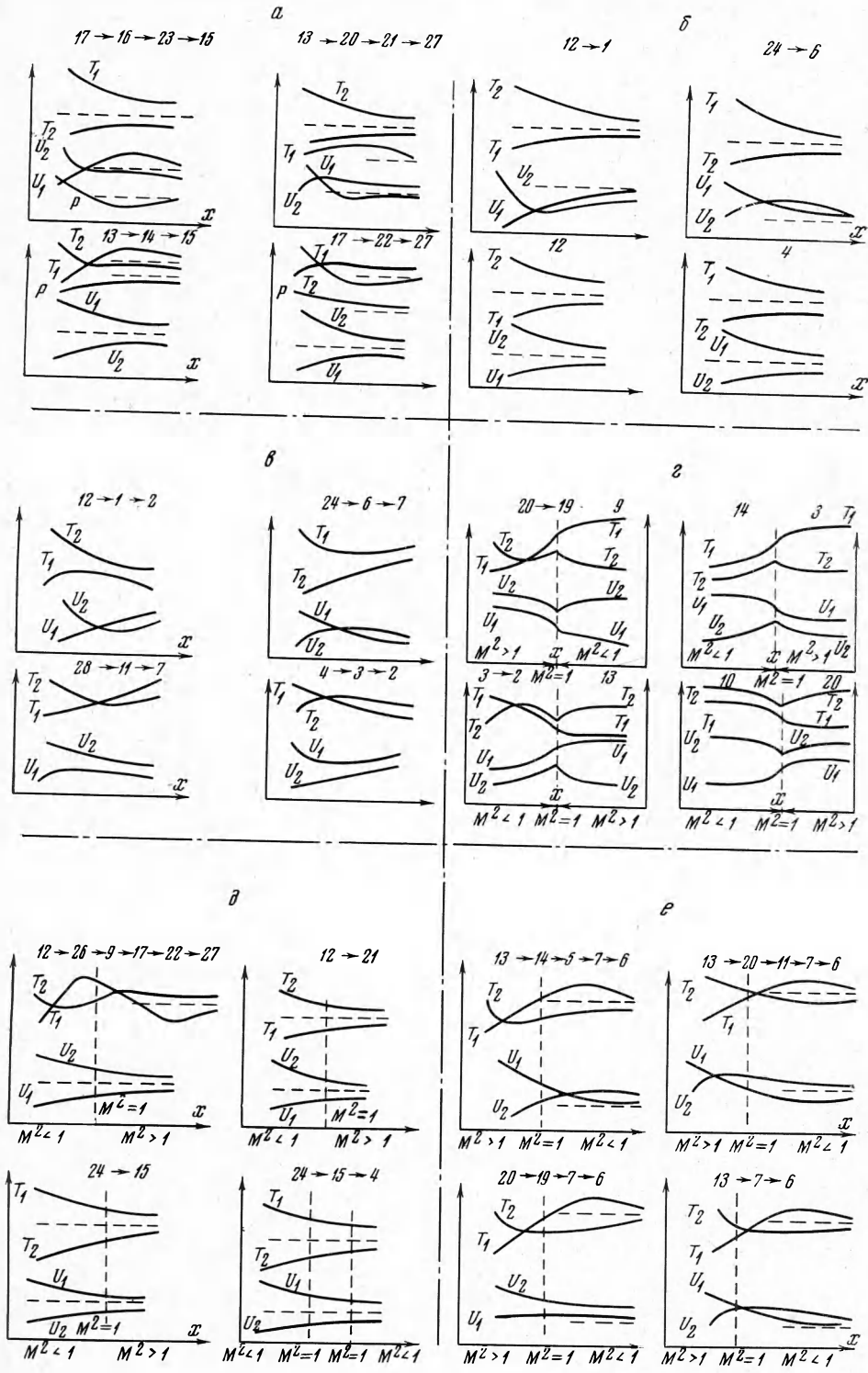
3) двухфазный поток с постоянной температурой твердой фазы  $T_2 = \text{const}$  ( $dT_2/dx = 0$ ) при бесконечной длине температурной релаксации  $l_t = \infty$ ;

4) двухфазный поток с постоянной скоростью твердой фазы  $u_2 = \text{const}$  ( $du_2/dx = 0$ ) при  $l_d = \infty$ .

Для этих условий система уравнений (1.1) — (1.6) приводит к уравнениям закона обращения воздействий, представляющим собой систему из двух уравнений для  $V$  и  $M_*^2$  при  $l_t = 0$  или  $l_t = \infty$

$$(M_*^2 - 1) \frac{d \ln V}{dx} = \left[ \kappa \frac{\gamma M_*^2}{V^2} (\Gamma - V) - (M_*^2 - 1) \right] \frac{V - 1}{l_d}$$

$$(M_*^2 - 1) \frac{d \ln M_*^2}{dx} = \kappa \frac{(\gamma - 1) M_*^2}{V^2} \left[ \gamma \left( \frac{2}{\gamma - 1} + M_*^2 \right) (\Gamma - V) + (M_*^2 - 1) \right] \frac{(V - 1)}{l_d}$$



Фиг. 5

где  $M_*^2 = \gamma / \gamma_* M^2$  при  $l_t = 0$  ( $\theta = 1$ ) и  $M_*^2 = M^2$  при  $l_* = \infty$  ( $T_2 = \text{const}$ ) и, соответственно, для  $\theta$  и  $M_*^2$  при  $l_d = 0$  или  $l_d = \infty$

$$(M_*^2 - 1) \frac{d \ln \theta}{dx} = \left[ \kappa \frac{c}{c_p} \frac{(1 - \gamma M_*^2)}{\theta} - (M_*^2 - 1) \right] \frac{(\theta - 1)}{l_t}$$

$$(M_*^2 - 1) \frac{d \ln M_*^2}{dx} = \kappa \frac{c}{c_p} (1 + \gamma M_*^2) \frac{\theta - 1}{\theta l_t}$$

где  $M_*^2 = (1 + \kappa) M^2$  при  $l_d = 0$  ( $V = 1$ ) и  $M_*^2 = M^2$  при  $l_d = \infty$  ( $u_2 = \text{const}$ ).

Фазовые диаграммы, построенные для приведенных уравнений, и зоны неустойчивых равновесий, представлены на фиг. 6. Так как качественный вид плоских диаграмм для случаев  $\Theta = 1$  и  $T_2 = \text{const}$ , с одной стороны, и  $V = 1$  и  $u_2 = \text{const}$ , с другой, попарно совпадает, на фиг. 6 изображены две диаграммы с двумя равными масштабами по оси абсцисс.

Фазовые траектории на фиг. 6, а и б показывают характер изменения безразмерных скорости  $V$  и температуры  $\Theta$  и квадрата числа Маха  $M_*^2$  по длине канала (в направлении, указанном на кривых стрелками). Равновесные состояния при  $\Theta = 1$  или  $T_2 = \text{const}$  представляет прямая  $V = 1$  (фиг. 6, а) и прямая  $\Theta = 1$  (фиг. 6, б) при  $V = 1$  или  $u_2 = \text{const}$ ; предельным состояниям соответствует линия  $M_*^2 = 1$ .

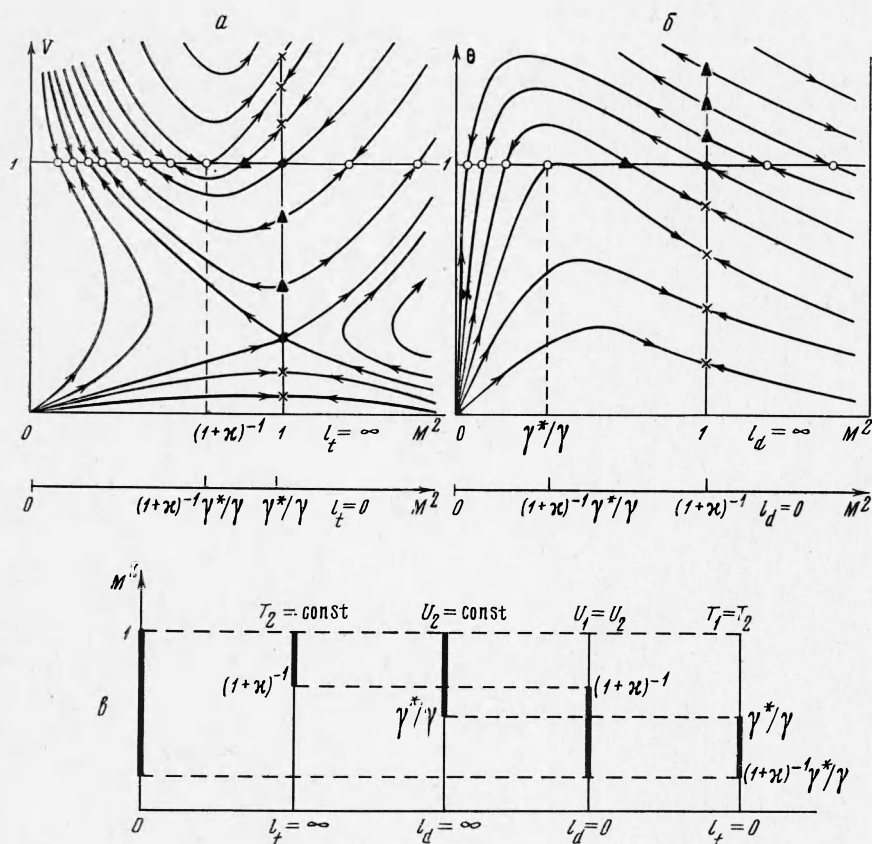
Все траектории на фиг. 6 начинаются от предельных состояний на входе в канал — на линии  $M^2 = 1$ , либо от состояний неустойчивого равновесия. Заканчиваются траектории в точках устойчивого равновесия на линии  $V = 1$  (фиг. 6, а) и линии  $\Theta = 1$  (фиг. 6, б) или на линии  $M_*^2 = 1$  в точках, соответствующих кризису на выходе из канала.

Следует подчеркнуть, что предельным состояниям на этих диаграммах отвечает в случае  $\Theta = 1$  равенство  $M^2 = \gamma^* / \gamma$  и в случае  $V = 1$  — равенство  $M^2 = (1 + \kappa)^{-1}$ , тогда как при  $T_2 = \text{const}$  и  $u_2 = \text{const}$ , как и в общем случае трехмерной фазовой диаграммы, — равенство  $M^2 = 1$ .

Несмотря на качественное соответствие фазовых траекторий в пространстве и на плоскости, между ними отсутствует непрерывный предельный переход — от слабонервных течений ( $\Theta \approx 1$  или  $V \approx 1$ ) к равновесным ( $\Theta = 1$  или  $V = 1$ ), а также условий  $T_2 \approx \text{const}$  или  $u_2 \approx \text{const}$  к равенствам  $T_2 = \text{const}$  и  $u_2 = \text{const}$ . Об этом свидетельствует прежде всего различие размеров зоны неустойчивых равновесий (фиг. 6, в). В общем случае на линии  $V = 1$  и  $\Theta = 1$  эта зона занимала отрезок, ограниченный неравенствами  $(1 + \kappa)^{-1} \gamma^* / \gamma < M^2 < 1$ . В плоских диаграммах на линии  $V = 1$  при  $T_2 = \text{const}$  будет  $(1 + \kappa)^{-1} < M^2 < 1$  и при  $l_t = 0$  соответственно  $(1 + \kappa)^{-1} \gamma^* / \gamma < M^2 < 1$ . Аналогично этому на линии  $\Theta = 1$  при  $u_2 = \text{const}$  выполняется  $\gamma^* / \gamma < M^2 < 1$  и при  $V = 1$  соответственно  $(1 + \kappa)^{-1} \gamma^* / \gamma < M^2 < (1 + \kappa)^{-1}$ . Это означает, что при  $\Theta = 1$  критической скоростью является величина  $u^* = a_T = \sqrt{\gamma^* p / \rho}$  (при  $\kappa \gg 1$ ,  $\gamma^* = (c_p + \kappa c) / (c_v + \kappa c) \rightarrow 1$  равная изотермической скорости звука), а при  $V = 1$  критическая скорость  $u^* = a_u = \sqrt{\gamma p / (\rho_1 + \rho_2)}$  (так как  $(\rho_1 + \rho_2) / \rho_1 = (1 + \kappa)$ ). Вводя условное число Маха  $M_{**} = u_1 / u^*$ , получим в обоих случаях критическое значение  $M_{**} = 1$ .

Полученные результаты позволяют в принципе указать поведение двухфазного потока (т. е. закономерности изменения скорости и температуры фаз, давления, числа Маха и др. по длине канала постоянного сечения) для любых начальных условий. Они содержат все многообразие режимов течения, а также указание на качественное несовершенство распространенных расчетных упрощений (предположения о частичном равновесии  $u_1 = u_2$  или  $T_1 = T_2$ ) в особенности для дозвуковых течений. Наличие трехмерной фазовой диаграммы может существенно облегчить про-

ведение численных расчетов для конкретных условий, при фиксировании которых можно установить возможность практической реализации и границы существования отдельных режимов. С помощью диаграммы можно провести анализ разрывных (со скачками) двухфазных течений для рассмотренной системы, а также высказать отдельные заключения о практи-



Фиг. 6

чески важном случае движения двухфазного потока в каналах переменного течения или, наконец, учесть влияние фазовых переходов. Эти вопросы требуют, однако, специального исследования.

Поступила 2 VII 1971

## ЛИТЕРАТУРА

1. Neilson T. H., Gilchrist A. An analytical and experimental investigation of the velocities of particles entrained by the gas flow in nozzles. J. Fluid Mech., 1968, vol. 33, pt 1.
2. Андерсон Э. Ударные волны в магнитной гидродинамике. М., Атомиздат, 1968.
3. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
4. Слободкина Ф. А. Качественное исследование уравнений квазиодномерного магнитогидродинамического течения в каналах. ПМТФ, 1966, № 3.
5. Слободкина Ф. А. Устойчивость квазиодномерных магнитогидродинамических течений. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.

6. Г о г о с о в В. В., П о л я н с к и й В. А., С е м е н о в а И. П., Я к у б е н к о А. Е. Одномерные течения в электрогидродинамике. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
7. С а р ы ч е в В. М. Течения диссоциирующего газа при отсутствии локального термодинамического равновесия. Докл. АН СССР, 1969, т. 185, № 5.
8. В у л и с Л. А., Г у с и к а П. Л., Ж и ж и н Г. В. Качественное исследование одномерного стационарного МГД - течения проводящего газа. Магнитная гидродинамика, 1971, № 4.
9. В у л и с Л. А. Термодинамика газовых потоков. М., Госэнергоиздат, 1950.
10. Д е й ч М. Е., Ф и л и п п о в Г. А. Газодинамика двухфазных сред. М., «Энергия», 1968.
11. Н и г м а т у л и н Р. И. Уравнения гидромеханики и волны уплотнения в двухскоростной и двухтемпературной сплошной среде при наличии фазовых превращений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
12. Л е в и ч В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
13. С о у С. Гидродинамика многофазных систем. М., «Мир», 1971.
14. Н е м ы ц к и й В. В., С т е п а н о в В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М., Гостехиздат, 1949.
15. П о н т р я г и н Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Физматгиз, 1961.