$\mathcal{AMS}$ subject classification: 65D10, 65D99, 65G99, 90C30

О локальной сходимости модифицированного метода типа Хомьера в банаховых пространствах*

Б. Пандай[1], Дж.П. Джаисвал[2]

[1]Department of Mathematics, Demonstration Multipurpose School, Regional Institute of Education, Bhopal, M.P. India-462013

[2]Department of Mathematics, Maulana Azad National Institute of Technology, Bhopal, M.P. India-462003

E-mails: bhavna.nic@gmail.com (Пандай Б.), asstprofjpmanit@gmail.com (Джаисвал Дж.П.)

Пандай Б., Джаисвал Дж.П. О локальной сходимости модифицированного метода типа Хомьера в банаховых пространствах // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 4. — С. 419–433.

Цель данной статьи — выполнить анализ локальной сходимости многошагового подхода типа Хомьера для аппроксимации решения нелинейных уравнений в банаховых пространствах, удовлетворяющего условию Липшица и условию непрерывности Гельдера. Условие Гельдера слабее условия Липшица. Кроме того, получена теорема существования и единственности и найдены границы ошибки. Представлены численные примеры для демонстрации важности теоретических дискуссий.

DOI: 10.15372/SJNM20180406

Ключевые слова: *банахово пространство, локальная сходимость, нелинейное уравнение, условие Липшица, условие Гельдера.*

Panday B., Jaiswal J.P. On the local convergence of modified Homeier-like method in banach spaces // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2018. — Vol. 21, № 4. — P. 419–433.

The aim of this article is to investigate the local convergence analysis of the multi-step Homeier-like approach in order to approximate the solution of nonlinear equations in Banach spaces, which fulfilled the Lipschitz as well as Hölder continuity condition. The Hölder condition is more relaxer than Lipschitz condition. Also, the existence and uniqueness theorem has been derived and found their error bounds. Numerical examples are available to appear the importance of theoretical discussions.

Keywords: *Banach space, local convergence, nonlinear equation, Lipschitz condition, Hölder condition.*

1. Введение

Решение нелинейных уравнений — важная проблема прикладных наук. Математическое моделирование используется для преобразования некоторых задач науки и техники в различные типы математических нелинейных уравнений. Обычно для решения таких задач используются итерационные методы. Для такой локальной сходимости необходима информация о решении. В различной литературе описывается анализ локальной сходимости с использованием рядов Тейлора, однако радиусы сходимости для решения задачи в [1–3] получены не были. Этот подход был распространен на итерационный метод в банаховых пространствах для получения лучших теоретических результатов без использования рядов Тейлора. Эти методы обсуждались многими исследователями, см., например, ссылки в статьях [4–6].

*Работа выполнена при поддержке Совета по исследованиям науки и техники (Нью Дели, Индия) в рамках схемы Стартового научного гранта для молодых ученых (проект № YSS/2015/001507).

Цель данной статьи — выполнить анализ локальной сходимости с радиусами сходимости, аппроксимирующими решение x^* для нелинейного оператора T, определяемого путем

$$T(x) = 0, \tag{1.1}$$

где T — оператор, дифференцируемый по Фреше, определенный на подмножестве D банахова пространства X со значением в банаховом пространстве Y. Известная схема Ньютона обычно используется для решения уравнения (1.1), сходящегося квадратично и определяемого следующим образом:

$$x_{n+1} = x_n - \big[T^{\top}(x_n)\big]^{-1} T(x_n), \quad n \geq 0. \tag{1.2}$$

Кроме того, для получения последовательных оценок производных необходимы итерационные схемы более высокого порядка сходимости, такие как в [7–10]. Они являются громоздкими и неограниченными. Однако эти схемы высокого порядка сходимости могут использоваться для решения некоторых жестких систем уравнений. Локальная сходимость итерационных схем исследовалась многими, например, классификация третьего порядка имеется в [11, 12], четвертого порядка — в [13], пятого порядка — в [14–17] и так далее. Некоторые статьи посвящены исследованию локальной сходимости на основе различных схем, таких как схема типа Ньютона [18], Чебышева, Чебышева–Галлея [19, 20], деформированные методы Галлея [21] и другие. Одна деформированная схема высокого порядка типа Чебышева представлена в [22], где выполнен анализ ее локальной сходимости. Ее подшаги следующие:

$$\begin{aligned}
y_n &= x_n - \big[T^{\top}(x_n)\big]^{-1} T(x_n),\\
z_n &= x_n + \alpha\big[T^{\top}(x_n)\big]^{-1} T(x_n),\\
H_n &= \frac{1}{\lambda}\big[T^{\top}(x_n)\big]^{-1}\big[T^{\top}\big(x_n + \lambda(z_n - x_n)\big) - T^{\top}(x_n)\big],\\
x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{2} T_n (y_n - x_n),
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где x_0 — начальная точка; $n = 0, 1, 2, \ldots$; $\lambda \in (0, 1]$; $\alpha \in R$ — заданные параметры. Деформированные схемы улучшают скорость сходимости ньютоновских схем. Модифицированные методы Галлея [23] дают локальную сходимость высокого порядка:

$$\begin{aligned}
y_n &= x_n - \big[T^{\top}(x_n)\big]^{-1} T(x_n),\\
u_n &= y_n + (1 - a)\big[T^{\top}(x_n)\big]^{-1} T(x_n),\\
z_n &= y_n - \gamma A_{a,n}\big[T^{\top}(x_n)\big]^{-1} T(x_n),\\
x_{n+1} &= z_n + \alpha B_{a,n}\big[T^{\top}(x_n)\big]^{-1} T(z_n),
\end{aligned} \tag{1.4}$$

где α, γ, $a \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$, $H_{a,n} = \frac{1}{a}\big[T^{\top}(x_n)\big]^{-1}\big(T^{\top}(u_n) - T^{\top}(x_n)\big)$, $A_{a,n} = I - \frac{1}{2} H_{a,n}\Big(I - \frac{1}{2} H_{a,n}\Big)$. Унифицированный метод локальной сходимости типа Джаратта (JTM) также исследуется в [24], он определяется для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$ следующим образом:

$$
\begin{aligned}
y_n &= x_n - \left[T^{\top}(x_n)\right]^{-1} T(x_n),\\
H_n &= \left[T^{\top}(x_n)\right]^{-1}\left[T(x_n) + \frac{2}{3}\gamma(y_n - x_n) - T^{\top}(x_n)\right],\\
x_{n+1} &= y_n + \frac{3\alpha}{4}\big(I + (\delta+\beta)H_n\big)^{-1}(I + \beta H_n)H_n(y_n - x_n),
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

где I — тождественный оператор, α, β, γ, δ — вещественные параметры. Здесь мы обсуждаем анализ локальной сходимости для решения нелинейного уравнения (1.1) для итерационной схемы Шармы и Гупты [25], которая определяется для $n = 0, 1, 2, \ldots$ как

$$
\begin{aligned}
y_n &= x_n - \frac{1}{2}\Gamma_n T(x_n),\\
z_n &= x_n - \left[T^{\top}(y_n)\right]^{-1} T(x_n),\\
x_{n+1} &= z_n - \big(2\left[T^{\top}(y_n)\right]^{-1} - \Gamma_n\big)T(z_n).
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Здесь $\Gamma_n = \left[T^{\top}(x_n)\right]^{-1}$. Первые два шага этой схемы известны как метод Хомьера; это — версия более высокого порядка и модифицированная форма кубически сходящейся схемы Хомьера, описанной в [26]. Доказано, что порядок метода (1.6) по крайней мере пятый. Остальная часть статьи организована следующим образом. В пункте 2 анализируется локальная сходимость вышеупомянутой итерационной схемы для решения нелинейных уравнений в банаховых пространствах с использованием условия Липшица. Численные примеры с использованием условия Липшица представлены в п. 3. В следующем пункте исследуется локальная сходимость итерационной схемы при условии Гельдера. Условие Гельдера является более обобщенным, чем условие Липшица. Наконец, рассматриваются некоторые численные примеры, подтверждающие важность условия Гельдера, и даются заключительные замечания.

2. Анализ локальной сходимости с условием Липшица

Опишем анализ локальной сходимости метода (1.6). Для этого введем некоторые скалярные функции и параметры. Предположим, что $L_0 > 0$ и $L > 0$ — заданные параметры. Все функции определены на интервале $\left[0, \frac{1}{L_0}\right)$ следующим образом:

$$
f_1(t) = \frac{1}{1 - L_0 t}\left[\frac{Lt}{2} + \frac{1 + L_0 t}{2}\right],
\tag{2.1}
$$

$$
p(t) = L_0 f_1(t) t,
\tag{2.2}
$$

$$
f_2(t) = \frac{Lt}{2(1 - L_0 t)} + \frac{L(1 + L_0 t)(1 + f_1(t))}{(1 - L_0 t)(1 - p(t))}\, t,
\tag{2.3}
$$

$$
f_3(t) = \left[1 + \left(\frac{2}{1 - L_0 f_1(t) t} + \frac{1}{1 - L_0 t}\right)\big(1 + L_0 f_2(t) t\big)\right] f_2(t),
\tag{2.4}
$$

$$
h_1(t) = f_1(t) - 1, \qquad h_2(t) = f_2(t) - 1, \qquad h_3(t) = f_3(t) - 1,
\tag{2.5}
$$

и, используя

$$
r_1 = \frac{1}{L + 3L_0} < \frac{1}{L_0},
\tag{2.6}
$$

мы можем получить

$$
0 \le f_1(t) < 1 \ \text{ для } \ t \in [0, r_1).
\tag{2.7}
$$

Аналогичным образом, мы можем найти r_2 для функции $h_2(t)$, а $h_2(t)$ имеет нуль в интервале $\left(0, \dfrac{1}{L_0}\right)$. Кроме того, $h_2(r_1) > 0$ и $r_1 < \dfrac{1}{L_0}$, откуда следует, что

$$0 < r_2 < r_1 \tag{2.8}$$

и

$$0 \le f_2(t) < 1 \quad \text{для} \quad t \in [0, r_2). \tag{2.9}$$

Используя эту процедуру, мы можем получить $h_3(0) < 0$ и $h_3(r_2) > 0$. Таким образом, h_3 имеет нуль в $(0, r_2)$. Пусть r — наименьший нуль. Поскольку $f_3(r_2) - 1 > 0$ и $L_0 r_2 < 1$ для $t \in [0, r)$, мы получим

$$r < r_2 < r_1,$$

$$0 \le f_1(t) < 1, \qquad 0 \le f_2(t) < 1, \qquad 0 \le f_3(t) < 1.$$

Анализ локальной сходимости рассматриваемой схемы при непрерывности Липшица характеризуется следующей теоремой.

Теорема 2.1. *Предположим, что $T : D \subseteq X \to Y$ — оператор, дифференцируемый по Фреше с первым порядком, и $L_0 > 0$, $L > 0$ — заданные параметры. Также предположим, что существует $x^* \in D$ для всех $x, y \in D$, и удовлетворяются следующие условия:*

$$T(x^*) = 0, \qquad \left[T^\top(x^*)\right]^{-1} \in L(X, Y),$$

$$\left\| \left[T^\top(x^*)\right]^{-1} \left(T^\top(x) - T^\top(x^*)\right) \right\| \le L_0 \|x - x^*\|, \tag{2.10}$$

$$\left\| \left[T^\top(x^*)\right]^{-1} \left(T^\top(x) - T^\top(y)\right) \right\| \le L \|x - y\|, \tag{2.11}$$

где $L(X, Y)$ — множество ограниченных линейных операторов из X в Y и $\overline{B}(x^*, r) \subseteq D$. Радиус r необходимо найти. Последовательность $\{x_n\}$, генерируемая (1.6) для $x_0 \in B(x^*, r)$, описана для $n = 0, 1, 2, \ldots$ в $B(x^*, r)$ и стремится к x^*. Следовательно, верны следующие соотношения для $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$\|y_n - x^*\| \le f_1\left(\|x_n - x^*\|\right)\|x_n - x^*\| < \|x_n - x^*\| < r, \tag{2.12}$$

$$\|z_n - x^*\| \le f_2\left(\|x_n - x^*\|\right)\|x_n - x^*\| < \|x_n - x^*\| < r, \tag{2.13}$$

$$\|x_{n+1} - x^*\| \le f_3\left(\|x_n - x^*\|\right)\|x_n - x^*\| < \|x_n - x^*\| < r. \tag{2.14}$$

Кроме того, если существует $R \in \left[r, \dfrac{1}{L_0}\right)$, такое что $\overline{B}(x^*, R) \subseteq D$, то предельная точка x^* является единственным решением в $\overline{B}(x^*, R)$.

Доказательство. Поскольку $x_0 \in D$, то из неравенства (2.10) получим

$$\left\| \left[T^\top(x^*)\right]^{-1} \left(T^\top(x_0) - T^\top(x^*)\right) \right\| \le L_0 \|x_0 - x^*\| < L_0 r < 1.$$

На основании леммы Банаха об обратимой функции [4, 5] $\left[T^\top(x_0)\right]^{-1}$ существует и

$$\left\| \left[T^\top(x^*)\right]^{-1} T^\top(x_0) \right\| \le (1 + L_0 \|x_0 - x^*\|), \tag{2.15}$$

$$\left\| \left[T^\top(x^*)\right]^{-1} T(x_0) \right\| \le (1 + L \|x_0 - x^*\|)\|x_0 - x^*\|, \tag{2.16}$$

$$\left\| \left[T^\top(x_0)\right]^{-1} T^\top(x^*) \right\| \le \frac{1}{1 - L_0 \|x_0 - x^*\|}. \tag{2.17}$$

Теперь определим y_0 с использованием первого шага схемы (1.6), для $n = 0$ мы можем получить аппроксимацию

$$\begin{aligned}y_0 - x^* &= x_0 - x^* - \frac{1}{2}\big[T^\top(x_0)\big]^{-1}T(x_0)\\ &= -\big[T^\top(x_0)\big]^{-1}T^\top(x^*)\int_0^1 \big[T^\top(x^*)\big]^{-1}\big[T^\top\big(x^*+t(x_0-x^*)\big)-T^\top(x_0)\big](x_0-x^*)\,dt +\\ &\quad \frac{1}{2}\big[T^\top(x_0)\big]^{-1}T^\top(x^*)\int_0^1 \big[T^\top(x^*)\big]^{-1}T^\top\big(x^*+t(x_0-x^*)\big)(x_0-x^*)\,dt. \qquad (2.18)\end{aligned}$$

С использованием норм обеих частей уравнения (2.18) получим

$$\begin{aligned}\|y_0-x^*\| &\le \big\|\big[T^\top(x_0)\big]^{-1}T^\top(x^*)\big\|\,\bigg\|\int_0^1\big[T^\top(x^*)\big]^{-1}\big[T^\top\big(x^*+t(x_0-x^*)\big)-T^\top(x_0)\big](x_0-x^*)\,dt\bigg\|+\\ &\quad \frac{1}{2}\big\|\big[T^\top(x_0)\big]^{-1}T^\top(x^*)\big\|\,\bigg\|\int_0^1 \big[T^\top(x^*)\big]^{-1}T^\top\big(x^*+t(x_0-x^*)\big)(x_0-x^*)\,dt\bigg\|\\ &\le \frac{1}{1-L_0\|x_0-x^*\|}\left[\frac{L\|x_0-x^*\|}{2}+\frac{1}{2}\big(1+L_0\|x_0-x^*\|\big)\right]\|x_0-x^*\|\\ &\le f_1\big(\|x_0-x^*\|\big)\,\|x_0-x^*\| < r. \qquad (2.19)\end{aligned}$$

Поскольку $h_1(0) < 0$ и $h_1\Big(\frac{1}{L_0}\Big) \to \infty$, то на основании теоремы о промежуточном значении $h_1(t)$ имеет по крайней мере один корень в $\Big]0, \frac{1}{L_0}\Big[$. Предположим, что r_1 — наименьший корень $h_1(t)$ в $\Big]0, \frac{1}{L_0}\Big[$. Теперь мы видим, что $0 < r_1 < \frac{1}{L_0}$ и $0 \le f_1(t) < 1\ \forall\, t \in [0, r_1)$. Докажем, что $T^\top(y_0)$ обратимо. Таким образом, используя уравнение (2.10), получим

$$\begin{aligned}\big\|\big[T^\top(x^*)\big]^{-1}\big[T^\top(y_0)-T^\top(x^*)\big]\big\| &\le L_0\|y_0-x^*\|\\ &\le L_0 f_1\big(\|x_0-x^*\|\big)\|x_0-x^*\|\\ &= p\big(||x_0-x^*||\big) < 1, \qquad (2.20)\end{aligned}$$

где $p(t) = L_0 f_1(t)t$, и снова на основании леммы Банаха

$$\big\|\big[T^\top(y_0)\big]^{-1}T^\top(x^*)\big\| \le \frac{1}{1-p\big(\|x_0-x^*\|\big)}. \qquad (2.21)$$

Кроме того, с использованием следующего подшага схемы (1.6) получим

$$\|z_0-x^*\| \le \|x_0-x^*\| + \big\|\big[T^\top(y_0)\big]^{-1}T(x_0)\big\|$$

и

$$\begin{aligned}\|z_0-x^*\| &\le \big\|x_0-x^*-\big[T^\top(x_0)\big]^{-1}T(x_0)\big\| + \big\|\big[T^\top(x_0)\big]^{-1}T^\top(x^*)\big\|\times\\ &\quad \big\|T^\top(x^*)^{-1}\big(T^\top(y_0)-T^\top(x_0)\big)\big\|\,\big\|\big[T^\top(y_0)\big]^{-1}T^\top(x^*)\big\|\,\big\|\big[T^\top(x^*)\big]^{-1}T(x_0)\big\|\\ &\le \frac{L\|x_0-x^*\|^2}{2\big(1-L_0\|x_0-x^*\|\big)} + \frac{1}{1-p\big(\|x_0-x^*\|\big)\big(1-L_0\|x_0-x^*\|\big)}\times\\ &\quad \big\|\big[T^\top(x^*)\big]^{-1}\big(T^\top(y_0)-T^\top(x_0)\big)\big\|\,\big\|\big[T^\top(x^*)\big]^{-1}T(x_0)\big\|\\ &\le \frac{L\|x_0-x^*\|^2}{2\big(1-L_0\|x_0-x^*\|\big)} + \frac{L\big(1+L_0\|x_0-x^*\|\big)\big(1+f_1\big(\|x_0-x^*\|\big)\|x_0-x^*\|^2\big)}{\big(1-L_0\|x_0-x^*\|\big)\big(1-p(\|x_0-x^*\|)\big)}\\ &= f_2\big(\|x_0-x^*\|\big)\|x_0-x^*\|.\end{aligned}$$

Ясно, что $h_2(t)$ имеет по крайней мере один нуль в $]0, r_1[$. Пусть r_2 — наименьший нуль $h_2(t)$. Таким образом, мы имеем $0 < r_2 < r_1$ и $h_2(r_2) > 0 \; \forall \, t \in [0, r_2)$. Получим

$$\|z_0 - x^*\| \le f_2(\|x_0 - x^*\|)\|x_0 - x^*\| < \|x_0 - x^*\| < r.$$

На основании леммы Банаха обратимая функция $\left[T^\top(y_0)\right]^{-1}$ существует и

$$\left\|\left[T^\top(y_0)\right]^{-1}T^\top(x^*)\right\| \le \frac{1}{1 - \left\|I - \left[T^\top(x^*)\right]^{-1}T^\top(y_0)\right\|} \le \frac{1}{1 - L_0\|y_0 - x^*\|}.$$

Последний подшаг схемы (1.6) задается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\|x_1 - x^*\| &\le \|z_0 - x^*\| + \\
&\quad \Big(2\left\|\left[T^\top(y_0)\right]^{-1}T^\top(x^*)\right\| + \left\|\left[T^\top(x_0)\right]^{-1}T^\top(x^*)\right\|\Big)\left\|\left[T^\top(x^*)\right]^{-1}T(z_0)\right\| \\
&\le \left[1 + \left(\frac{2}{1 - L_0\|y_0 - x^*\|} + \frac{1}{1 - L_0\|x_0 - x^*\|}\right)\big(1 + L_0\|z_0 - x^*\|\big)\right]\|z_0 - x^*\| \\
&\le \left[1 + \left(\frac{2}{1 - L_0 f_1\big(\|x_0 - x^*\|\big)\|x_0 - x^*\|} + \frac{1}{1 - L_0\|x_0 - x^*\|}\right) \times \right. \\
&\quad \left. \Big(1 + L_0 f_2\big(\|x_0 - x^*\|\big)\|x_0 - x^*\|\Big)\right] f_2\big(\|x_0 - x^*\|\big)\|x_0 - x^*\| \\
&= f_3\big(\|x_0 - x^*\|\big)\|x_0 - x^*\|.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Функция $h_3(t) = f_3(t) - 1$ дает $h_3(0) < 0$ и $h_3(r_2) > 0$. Следовательно, $h_3(t)$ имеет по крайней мере один корень в $]0, r_2[$. Пусть r — наименьший корень $h_3(t)$ в $]0, r_2[$. Тогда мы можем получить

$$r < r_2 < r_1 < \frac{1}{L_0}$$

и $0 \le f_3(t) < 1 \; \forall \, t \in [0, r)$. Теперь из уравнения (2.22) получим

$$\|x_1 - x^*\| \le f_3(\|x_0 - x^*\|)\|x_0 - x^*\| < r.$$

Следовательно, теорема верна для $n = 0$. Заменив x_0, y_0, z_0 и x_1 на x_n, y_n, z_n, x_{n+1} в предыдущих результатах, мы можем получить неравенства (2.12)–(2.14). Используя оценку $\|x_{n+1} - x^*\| \le \|x_n - x^*\| < r$, мы получим $x_{n+1} \in B(x^*, r)$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\| &\le f_3(t)\|x_n - x^*\| \\
&\le f_3(t) f_3(\|x_{n-1} - x^*\|)\|x_{n-1} - x^*\| \\
&\le f_3(t)^2 f_3(\|x_{n-1} - x^*\|)\|x_{n-2} - x^*\| \\
&\le f_3(t)^{n+1}\|x_0 - x^*\|.
\end{aligned}$$

Используя $\lim_{n\to\infty} f_3(t)^{n+1} = 0$, мы получили $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, и, таким образом, аппроксимация “стремится” к решению.

Чтобы доказать единственность, пусть $y^* \in B(x^*, r)$, где $y^* \neq x^*$ при $T(y^*) = 0$. Пусть $F = \int_0^1 T^\top\big(y^* + t(x^* - y^*)\big)\,dt$. Тогда, используя (2.10), мы получим

$$\big\|T^\top(x^*)^{-1}\big(F - T^\top(x^*)\big)\big\| \le \int_0^1 L_0\big\|y^* + t(x^* - y^*) - x^*\big\| \le \frac{L_0}{2}\|x^* - y^*\| = \frac{L_0}{2}R < 1,$$

что подтверждает существование T^{-1} и соответствует тождеству

$$0 = T(x^*) - T(y^*) = F(x^* - y^*).$$

Из этого мы можем заключить, что $x^* = y^*$. □

3. Численные результаты для условия Липшица

В этом пункте приведены численные примеры, показывающие эффективность нашей локальной сходимости.

Пример 3.1 [16]. Рассмотрим функцию f, определенную на $D = \big[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\big]$, следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \log x^2 + x^5 - x^4, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Единственное решение $x^* = 1$. Последовательные производные f имеют вид:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 \log x^2 + 5x^4 - 4x^3 + 2x^2, \\ f''(x) &= 6x \log x^2 + 20x^3 - 12x^2 + 10x, \\ f'''(x) &= 6 \log x^2 + 60x^2 - 24x + 22. \end{aligned}$$

Мы видим, что f''' неограниченна на D, но итерационный метод (1.6) удовлетворяет всем гипотезам теоремы 2.1 при $x^* = 1$. Мы получим $L_0 = L = 96.6628$. Таким образом, мы имеем

$$r = 0.000916634 < r_2 = 0.00230864 < r_1 = 0.00258631.$$

Пример 3.2. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна. Такие уравнения имеют сильный физический базис и имеют место в электромагнитной термодинамике [15]. Уравнение имеет следующий вид:

$$x(s) = u(s) + \int_a^b G(s,t)H\big(x(t)\big)\,dt, \quad a \le x \le b,$$

для $x(s)$, $u(s) \in C[a,b]$ при $\infty < a < b < \infty$; G — функция Грина, а H — полиномиальная функция. Стандартная процедура решения таких уравнений состоит в его переписи в виде нелинейного оператора в банаховом пространстве:

$$F(x) = 0,$$

$F : \Omega \subseteq C[a,b] \to C[a,b]$ с непустым открытым выпуклым подмножеством и

$$F[x(s)] = x(s) - u(s) - \int_a^b G(s,t)H\big(x(t)\big)\,dt$$

с однородной нормой $\|v\| = \max_{s\in[a,b]} |v(s)|$. Видно, что в некоторых случаях условия ограниченности могут не удовлетворяться, поскольку $F''(x)$ или $F'''(x)$ может быть неограничена в общей области. Таким образом, альтернатива — найти область, содержащую решение. Однако удобнее использовать результаты локальной сходимости, полученные в нашем исследовании, для получения радиуса шара сходимости. Применим наше теоретическое исследование, полученное в предыдущей теореме, к конкретному уравнению Гаммерштейна, задаваемому следующим образом [16]:

$$F(x(s)) = x(s) - 5\int_0^1 s\,tx(t)^3 dt$$

при $x(s)$ в $C[0,1]$. Первая производная F имеет вид:

$$F'(x(s))v(s) = v(s) - 15\int_0^1 s\,tx(t)^2 v(s)\,dt.$$

Пусть $x^* = 0$. Здесь мы имеем $L_0 = 7.5$ и $L = 15$. Для существующей итерационной схемы (1.6) получим

$$r = 0.0067881 < r_2 = 0.0195405 < r_1 = 0.0266667.$$

Пример 3.3 [16]. Предположим, что $X = Y = R$ и функция F определена на $D = [1,3]$ следующим образом:

$$F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x.$$

Используя $x^* = \dfrac{9}{4}$ и $F'(x^*)^{-1} = 2$, $L_0 = L = 1$, мы получим

$$r = 0.0886045 < r_2 = 0.22316 < r_1 = 0.25.$$

В таблице 1 приведены значения параметров, используемых в схеме (1.4). Мы вычислили радиус шара сходимости для схемы (1.6) и сравнили его с существующей итерационной схемой (1.4) в табл. 2. Таблица 2 подтверждает, что рассматриваемая схема дает больший шар сходимости, чем существующая схема (1.4).

Таблица 1. Значения параметра

Примеры	a	γ	α
3.1	0.987	0.6	0.001
3.2	1	0.005	0.008
3.3	1	0.575	0.03

Таблица 2. Сравнение радиусов шара сходимости

Примеры	Метод (1.6)	Метод (1.4)
3.1	$9.1 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-9}$
3.2	0.006788	0.004999
3.3	0.088604	0.059554

4. Анализ локальной сходимости с использованием условия Гельдера

В данном пункте мы выполним анализ локальной сходимости итерации пятого порядка (1.6) в банаховых пространствах с использованием условия Гельдера, поскольку некоторые нелинейные уравнения не удовлетворяют условию непрерывности Липшица, например

$$g(x(s)) = x(s) - 5\int_0^1 s\,tx(t)^{q+1} dt$$

при $x(s)$ в $C[0,1]$. Первая производная задается следующим образом:

$$g'(x(s)) = v(s) - \frac{5}{q+1}\int_0^1 s\,tx(t)^q dt. \tag{4.1}$$

Ясно, что условие непрерывности Липшица не действует здесь для $q \in (0,1)$, и решение получается только с использованием условия Гельдера. Для таких примеров мы также получим результаты по локальной сходимости. Предположим, что $L_0 > 0$ и $L > 0$ — заданные параметры. Предположим также, что существует решение $x^* \in D$ такое, что для всех $x, y \in D$ верны следующие соотношения:

$$T(x^*) = 0, \quad \big[T^\top(x^*)\big]^{-1} \in L(X,Y),$$
$$\big\|\big[T^\top(x^*)\big]^{-1}\big(T^\top(x) - T^\top(x^*)\big)\big\| \le L_0\|x - x^*\|^q, \tag{4.2}$$
$$\big\|\big[T^\top(x^*)\big]^{-1}\big(T^\top(x) - T^\top(y)\big)\big\| \le L\|x - y\|^q. \tag{4.3}$$

Лемма. *Если T удовлетворяет предположениям (4.2) и (4.3), то в этой точке приводимые ниже неравенства справедливы для $x \in D$, $q = (0,1]$ и $t \in [0,1]$:*

$$\big\|\big[T^\top(x^*)\big]^{-1}T^\top(x)\big\| \le 1 + L_0\|x - x^*\|^q, \tag{4.4}$$
$$\big\|\big[T^\top(x^*)\big]^{-1}T^\top(x + t(x - x^*))\big\| \le 1 + L_0\|x - x^*\|^q, \tag{4.5}$$
$$\big\|T^\top(x^*)]^{-1}T(x)\big\| \le \big(1 + L_0\|x - x^*\|^q\big)\|x - x^*\|. \tag{4.6}$$

Доказательство. Рассмотрим гипотезу (4.2). Мы можем получить

$$\big\|\big[T^\top(x^*)\big]^{-1}T^\top(x)\big\| \le 1 + \big\|T^\top(x^*)^{-1}T^\top(x) - T^\top(x^*)^{-1}T^\top(x^*)\big\| \le 1 + L_0\|x - x^*\|^q.$$

Таким же образом находим

$$\big\|\big[T^\top(x^*)\big]^{-1}T^\top\big(x + t(x - x^*)\big)\big\| \le 1 + t^q L_0\|x - x^*\|^q \le 1 + L_0\|x - x^*\|^q.$$

Теперь

$$\begin{aligned}\big\|\big[T^\top(x^*)\big]^{-1}T(x)\big\| &\le \big\|\big[T^\top(x^*)\big]^{-1}T^\top\big(x^* + t(x - x^*)\big)(x - x^*)\big\| \\ &\le \big(1 + L_0\|x - x^*\|^q\big)\|x - x^*\|.\end{aligned}$$

□

Теорема 4.1. *Предположим, что $x^* \in D$ такое, что (4.2) и (4.3) удовлетворяются. Последовательность $\{x_n\}$, генерируемая схемой (1.6) для $x_0 \in B(x^*, \rho)$, известна для $n \ge 0$ и стремится к x^*. Следовательно, приводимые ниже меры верны для $n \ge 0$:*

$$\|y_n - x^*\| \le g_1(\|x_n - x^*\|)\|x_n - x^*\| < \|x_n - x^*\| < \rho, \tag{4.7}$$
$$\|z_n - x^*\| \le g_2(\|x_n - x^*\|)\|x_n - x^*\| < \|x_n - x^*\| < \rho, \tag{4.8}$$
$$\|x_{n+1} - x^*\| \le g_3(\|x_n - x^*\|)\|x_n - x^*\| < \|x_n - x^*\| < \rho, \tag{4.9}$$

где g_1, g_2 и g_3 — функции, которые должны быть определены. Кроме того, если существует $Q \in \left[\rho, \left(\frac{1+q}{L_0}\right)^{1/q}\right]$ такое, что $\overline{B}(x^*, Q) \subseteq D$, то предельная точка x^* представляет собой только одно решение в $\overline{B}(x^*, Q)$.

Доказательство. Предположим, что $\|x_0 - x^*\|^q < \dfrac{1}{L_0}$, и, используя уравнение (4.2), получим

$$\big\|\big[T^\top(x^*)\big]^{-1}\big(T^\top(x_0) - T^\top(x^*)\big)\big\| \le L_0\|x_0 - x^*\|^q < 1.$$

Согласно лемме Банаха, $\big[T^\top(x_0)\big]^{-1}$ существует и удовлетворяет

$$\big\|\big[T^\top(x_0)\big]^{-1}T^\top(x^*)\big\| \le \frac{1}{1 - L_0\|x_0 - x^*\|^q}. \tag{4.10}$$

Следовательно, из алгоритма (1.6) мы имеем, что y_0, z_0 и x_1 хорошо определены. Для $n = 0$ получим аппроксимацию

$$\begin{aligned}\|y_0 - x^*\| &\le \frac{\|x_0 - x^*\|}{1 - L_0\|x_0 - x^*\|^q}\left[\frac{L\|x_0 - x^*\|^q}{(q+1)} + \frac{(1 + L_0\|x_0 - x^*\|^q)}{2}\right] \\ &\le g_1(\|x_0 - x^*\|)\|x_0 - x^*\| < \rho.\end{aligned}$$

Определим $g_1(t) = \frac{1}{1 - L_0t^q}\left[\frac{Lt^q}{q+1} + \frac{1 + L_0t^q}{2}\right]$. Предположим, что $\delta_1(t) = g_1(t) - 1$. Это показывает, что $\delta_1(0) < 0$ и $\delta_1\Big(\Big(\frac{1}{L_0}\Big)^{1/q}\Big) \to \infty$. Кроме того, $\delta_1(t)$ имеет по крайней мере один нуль в $\Big(0, \frac{1}{L_0}^{1/q}\Big)$. Будем считать, что ρ_1 — наименьший нуль $\delta_1(t)$ в $\Big(0, \frac{1}{L_0}^{1/q}\Big)$. Тогда

$$0 < \rho_1 < \left(\frac{1}{L_0}\right)^q$$

и $0 \le g_1(t) < 1\ \forall\, t \in [0, \rho)$. Теперь покажем, что $T^\top(y_0)$ необратимо:

$$\big\|\big[T^\top(x^*)\big]^{-1}\big[T^\top(y_0) - T^\top(x^*)\big]\big\| \le L_0g_1(\|x_0 - x^*\|^q)\|x_0 - x^*\|^q = w(\|x_0 - x^*\|), \tag{4.11}$$

где $w(t) = L_0g_1(t^q)t^q$, а это означает, что

$$\big\|\big[T^\top(y_0)\big]^{-1}T^\top(x^*)\big\| \le \frac{1}{1 - w(\|x_0 - x^*\|)}. \tag{4.12}$$

Опять из итерационной схемы (1.6) найдем

$$\begin{aligned}\|z_0 - x^*\| \le{}& \frac{L\|x_0 - x^*\|^q\|x_0 - x^*\|}{(q+1)(1 - L_0\|x_0 - x^*\|^q)} + \\ & \frac{L\big(1 + L_0\|x - x^*\|^q\big)\big(1 + \big(g_1(\|x_0 - x^*\|)\big)^q\|x_0 - x^*\|^q\big)\|x_0 - x^*\|}{\big(1 - L_0\|x_0 - x^*\|^q\big)\big(1 - w(\|x_0 - x^*\|)\big)} \\ \le{}& g_2(\|x_0 - x^*\|)\|x_0 - x^*\|,\end{aligned}$$

где $g_2(t) = \left[\frac{Lt^q}{(q+1)(1 - L_0t^q)} + \frac{L(1 + L_0t^q)\big(1 + \big(g_1(t)\big)^q t^q\big)}{(1 - L_0t^q)\big(1 - w(t)\big)}\right]$. Предположение $\delta_2(t) = g_2(t) - 1$ показывает, что $\delta_2(0) < 0$. Поэтому $\delta_2(t)$ имеет по крайней мере один нуль в $(0, \rho_1)$, и мы получим $0 < \rho_2 < \rho_1$ и $0 \le g_2(t) < 1\ \forall\, t \in [0, \rho_2)$. Следовательно,

$$\|z_0 - x^*\| \le g_2(\|x_0 - x^*\|)\|x_0 - x^*\| < \|x_0 - x^*\| < \rho.$$

Кроме того,

$$\left\| \left[T^\top(y_0)\right]^{-1} T^\top(x^*) \right\| \le \frac{1}{1 - \|I - [T^\top(x^*)]^{-1} T^\top(y_0)\|} \le \frac{1}{1 - L_0\|y_0 - x^*\|^q}.$$

И, наконец, получим

$$\begin{aligned} \|x_1 - x^*\| \le \Bigg[1 + \Bigg(&\frac{2}{1 - L_0 g_1(\|x_0 - x^*\|^q)\|x_0 - x^*\|^q} + \frac{1}{1 - L_0\|x_0 - x^*\|^q}\Bigg) \times \\ &\Big(1 + L_0 g_2(\|x_0 - x^*\|^q)\|x_0 - x^*\|^q\Big)\Bigg] g_2(\|x_0 - x^*\|^q)\|x_0 - x^*\| \\ \le{}& g_3(\|x_0 - x^*\|)\|x_0 - x^*\|, \end{aligned}$$

где

$$g_3(t) = \left[1 + \left(\frac{2}{1 - L_0(g_1(t))^q t^q} + \frac{1}{1 - L_0 t^q}\right)\left(1 + L_0(g_2(t))^q t^q\right)\right]\left(g_2(t)\right)^q. \tag{4.13}$$

Предположим, что функция $\delta_3(t) = g_3(t) - 1$. Следовательно, $\delta_3(\rho_2) > 0$ и $\delta_3(t)$ имеют по крайней мере один нуль в $(0, \rho_2)$. Пусть ρ — наименьший положительный нуль $\delta_3(t)$ в $(0, \rho_2)$. Тогда имеем

$$\rho < \rho_2 < \rho_1 < \left(\frac{1}{L_0}\right)^{1/q}$$

и $0 \le \delta_3(t) < 1 \; \forall\, t \in [0, \rho)$. Таким образом, мы можем получить

$$\|x_1 - x^*\| \le g_3(\|x_0 - x^*\|)\|x_0 - x^*\| < \rho.$$

Следовательно, теорема верна для $n = 0$.

Подставив x_n, y_n, z_n и x_{n+1} вместо x_0, y_0, z_0 и x_1, таким же образом мы можем получить неравенства (4.7)–(4.9) для $n = 0, 1, 2, \ldots$. Ввиду того, что $\|x_{n+1} - x^*\| \le \|x_n - x^*\| < \rho$, имеем $x_{n+1} \in B(x^*, \rho)$ и находим, что

$$\|x_{n+1} - x^*\| \le g_3(t)\|x_n - x^*\| \le g_3(t)^2 g_3(\|x_{n-1} - x^*\|)\|x_{n-2} - x^*\| \le \cdots \le g_3(t)^{n+1}\|x_0 - x^*\|.$$

Поскольку $\delta_3(t) < 1 \; \forall\, t \in [0, \rho)$ и $\lim_{n\to\infty} g_3(t)^{n+1} = 0$, получаем $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$. Чтобы показать единственность, положим $y^* \in B(x^*, \rho)$, $y^* \ne x^*$, $T(y^*) = 0$. Также пусть $F = \int_0^1 T^\top(y^* + t(x^* - y^*))\, dt$. Тогда, используя (2.10), получим

$$\begin{aligned} \left\|T^\top(x^*)^{-1}\big(F - T^\top(x^*)\big)\right\| &\le \int_0^1 L_0\|y^* + t(x^* - y^*) - x^*\|^q \\ &\le \frac{L_0}{(q+1)}\|x^* - y^*\|^q = \frac{L_0}{(q+1)} Q^q < 1. \end{aligned}$$

Поэтому T^{-1} существует. Используя тождество $0 = T(x^*) - T(y^*) = F(x^* - y^*)$, получим $x^* = y^*$. □

Здесь мы представили локальную сходимость схемы (1.6) с использованием условий (4.2), (4.3). Мы определили следующие функции на интервале $\left[0, \frac{1}{L_0^{1/q}}\right]$:

$$
\begin{aligned}
g_1(t) &= \frac{1}{1-L_0t^q}\left[\frac{Lt^q}{q+1}+\frac{1+L_0t^q}{2}\right],\\
g_2(t) &= \left[\frac{Lt^q}{(q+1)(1-L_0t^q)}+\frac{L(1+L_0t^q)\big(1+(g_1(t))^qt^q\big)}{(1-L_0t^q)(1-w(t))}\right],\\
g_3(t) &= \left[1+\left(\frac{2}{1-L_0(g_1(t))^qt^q}+\frac{1}{1-L_0t^q}\right)\Big(1+L_0(g_2(t))^qt^q\Big)\right]\big(g_2(t)\big)^q.
\end{aligned}
$$

Используем $L_1 = 1+L_0t^q$ и

$$\delta_1(t) = g_1(t)-1, \qquad \delta_2(t) = g_2(t)-1, \qquad \delta_3(t) = g_3(t)-1.$$

Параметр $\rho_1 = \left(\left(1-\frac{L_1}{2}\right)\Big/\left(\frac{L_1}{1+q}+L_0\right)\right)^{1/q} < \left(\frac{1}{L_0}\right)^{1/q}$ и $(1+L_0t^q) < 1$. Получим $0 \le \delta_1(t) < 1\ \forall\, t \in [0,\rho_1)$. Кроме того, $\delta_2(0) < 0$ и $\delta_2\left(\left(\frac{1}{L_0}\right)^{1/q}\right) > 0$. Следовательно, $\delta_2(t)$ имеет по крайней мере один нуль в $\left(0, \left(\frac{1}{L_0}\right)^{1/q}\right)$. Предположим, что ρ_2 — наименьший нуль $\delta_2(t)$. Следовательно, $\delta_2(\rho_1) > 0$ и $\rho_1 < \left(\frac{1}{L_0}\right)^{1/q}$. Тогда $0 < \rho_2 < \rho_1 < \left(\frac{1}{L_0}\right)^{1/q}$ и $0 \le \delta_2(t) < 1\ \forall\, t \in [0,\rho_2)$. Мы имеем следующее:

$$0 \le g_1(t) < 1, \qquad 0 \le g_2(t) < 1.$$

Кроме того, мы находим, что $\delta_3(0) = g_3(0)-1 < 0$ и $\delta_3(t) \to \infty$ при $t \to \left(\frac{1}{L_0}\right)^{1/q}$. Функция δ_3 имеет нуль в $\left(0, \left(\frac{1}{L_0}\right)^{1/q}\right)$. Поэтому $\rho < \rho_2 < \rho_1$ и $0 \le \delta_3(t) < 1$ для каждого $t \in [0,\rho)$. Таким образом, ρ — наименьший нуль $\delta_3(t)$.

5. Численные результаты для условия Гельдера

Представим численные примеры для проверки правильности нашего подхода.

Пример 5.1 [22]. Рассмотрим функцию g, определенную на $D = \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$ следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} x^3 \log x^2 + x^5 - x^4, & x \ne 0,\\ 0, & x = 0.\end{cases}$$

Единственное решение $x^* = 1$. Производные g:

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= 3x^2\log x^2 + 5x^4 - 4x^3 + 2x^2.\\
g''(x) &= 6x\log x^2 + 20x^3 - 12x^2 + 10x.
\end{aligned}
$$

Данная функция удовлетворяет всем условиям итерационной схемы (1.6) и теорема 4.1 верна; при $x^* = 1$, $q = 0.5$ мы получим $L_0 = L = 96.6628$. Также получим

$$\rho = 6.46693\cdot 10^{-7} < \rho_2 = 4.8614\cdot 10^{-6} < \rho_1 = 5.6995\cdot 10^{-6}.$$

Пример 5.2 [18]. Рассмотрим

$$g(x(s)) = x(s) - 5\int_0^1 s\,t\,x(t)^3\,dt$$

при $x(s)$ в $C[0,1]$. Первую производную можно задать следующим образом:

$$g'\big(x(s)\big)v(s) = v(s) - 15\int_0^1 s\,t\,x(t)^2 v(s)\,dt.$$

Таким образом, для тривиального решения $x^* = 0$ мы получим $L_0 = 7.5$ и $L = 15$. Теперь, используя итерационную схему (1.6) и $q = 0.5$, имеем

$$\rho = 0.0000345557 < \rho_2 = 0.000328498 < \rho_1 = 0.000553633.$$

Пример 5.3 [22]. Пусть $X = Y = R$. Определим g на $D = [1,3]$ следующим образом:

$$g(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x.$$

Тогда при $x^* = \frac{9}{4}$, $g'(x^*)^{-1} = 2$, $L_0 = L = 1$, $q = 0.5$ получим

$$\rho = 0.0060425 < \rho_2 = 0.0454234 < \rho_1 = 0.0532544.$$

В табл. 3 представлены оценки радиусов шара сходимости с использованием обсуждаемого метода (1.6) и существующего алгоритма (1.5) со значениями параметров: $\gamma = -3.5$, $\alpha = -3.5$, $\beta = -1.5$, $K = 1$, $\delta = -11.5$. Мы видим, что с использованием представленного метода радиус шара сходимости больше, чем при использовании метода (1.5).

Таблица 3. Сравнение радиусов шара сходимости

Примеры	Метод (1.6)	Метод (1.5)
5.1	$6.4669 \cdot 10^{-7}$	$1.6514 \cdot 10^{-7}$
5.2	$3.4500 \cdot 10^{-5}$	$7.1609 \cdot 10^{-6}$
5.3	$6.0425 \cdot 10^{-3}$	$1.5430 \cdot 10^{-3}$

6. Результаты и будущая работа

В данной статье мы проанализировали локальную сходимость схемы типа Хомьера пятого порядка с использованием условий Липшица и Гельдера в банаховых пространствах. Эта локальная сходимость образуется без использования разложения Тейлора. Преимущество данного подхода — итерационный метод всегда сходится к решению. Также получен шар сходимости для решения. Впоследствии эти предположения были ослаблены и получены решения для различных типов нелинейных интегральных уравнений, не решаемых при помощи предыдущего подхода. В будущем мы планируем рассмотреть локальную сходимость при более слабых предположениях.

Благодарности. Авторы хотели бы выразить благодарность рецензентам за важные критические замечания и профессору И.К. Аргирос из Отделения математических наук Камеронского университета (Лотон, США) за полезные обсуждения. Второй автор хотел бы поблагодарить Совет по исследованиям науки и техники (Нью Дели, Индия) за одобрение научно-исследовательского проекта в рамках схемы Стартового научного гранта для молодых ученых (№ YSS/2015/001507).

Литература

1. **Sharma J.R., Arora H.** A new family of optimal eighth order methods with dynamics for nonlinear equations // Appl. Math. Comput. — 2016. — Vol. 273. — P. 924–933.
2. **Amat S., Busquier S., and Plaza S.** Chaotic dynamics of a third-order Newton-type method // J. Math. Anal. Appl. — 2010. — Vol. 366. — P. 24–32.
3. **Behl R., Motsa S.S.** Geometric construction of eighth-order optimal families of Ostrowski's method // Sci. World J. — 2015. — Vol. 2015. — (Article ID 614612).
4. **Argyros I.K., Hilout S.** Computational Methods in Nonlinear Analysis. — New Jersey: World Scientific Publishing Company, 2013.
5. **Traub J.F.** Iterative Methods for the Solution of Equations. — Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1964.
6. **Rall L.B., Schwetlick H.** Computational solution of nonlinear operator equations // J. Appl. Math. Mech. — 1972. — Vol. 52. — P. 630–631.
7. **Amat S., Busquier S., and Gutiérrez J.M.** Geometric constructions of iterative functions to solve nonlinear equations // J. Comp. Appl. Math. — 2003. — Vol. 157. — P. 197–205.
8. **Argyros I.K.** Computational Theory of Iterative Methods // Studies in computational mathematics. Vol. 15. — New York: Elsevier, 2007.
9. **Chun C., Stanica P., and Neta B.** Third-order family of methods in Banach spaces // Comp. Math. Appl. — 2011. — Vol. 61. — P. 1665–1675.
10. **Ortega J.M., Rheinboldt W.C.** Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. — New York: Academic Press, 1970.
11. **Argyros I.K., Khattri S.K.** Local convergence for a family of third order methods in Banach spaces // Punjab Univ. J. Math. — 2016. — Vol. 46. — P. 52–63.
12. **Argyros I.K., George S.** Local convergence of two competing third order methods in Banach space // Appl. Math. — 2016. — Vol. 41. — P. 341–350.
13. **Argyros I.K., Gonzalez D., and Khattri S.K.** Local convergence of a one parameter fourth-order Jarratt-type method in Banach spaces // Comment. Math. Univ. Carolin. — 2016. — Vol. 57. — P. 289–300.
14. **Cordero A., Ezquerro J.A., Herńandez-Veron M.A., and Torregrosa J.R.** On the local convergence of a fifth-order iterative method in Banach spaces // Appl. Math. Comput. — 2015. — Vol. 251. — P. 396–403.
15. **Polyanin A.D., Manzhirov A.V.** Handbook of Integral Equations. — Boca Raton: CRC Press, 1998.
16. **Martinez E., Singh S., Hueso J.L., and Gupta D.K.** Enlarging the convergence domain in local convergence studies for iterative methods in Banach spaces // Appl. Math. Comput. — 2016. — Vol. 281. — P. 252–265.
17. **Singh S., Gupta D.K., Martinez E., and Hueso J.L.** Semilocal and local convergence of a fifth order iteration with Fréchet derivative satisfying Hölder condition // Appl. Math. Comput. — 2016. — Vol. 276. — P. 266–277.
18. **Argyros I.K., George S.** Local convergence for some high convergence order Newton-like methods with frozen derivatives // SeMA J. — 2015. — Vol. 70. — P. 47–59.
19. **Wang X., Kou J.** Convergence for a class of multi-point modified Chebyshev–Halley methods under the relaxed conditions // Numer. Algor. — 2015. — Vol. 68. — P. 569–583.
20. **Argyros I.K., Magrenan A.A.** A study on the local convergence and the dynamics of Chebyshev–Halley-type methods free from second derivative // Numer. Algor. — 2016. — Vol. 71. — P. 1–23.

21. **Argyros I.K., George S.** Local convergence of deformed Halley method in Banach space under Holder continuity conditions // J. Nonlinear Sci. Appl. — 2015. — Vol. 8. — P. 246–254.

22. **Argyros I.K., George S.** Local convergence for deformed Chebyshev-type method in Banach space under weak conditions // Cogent Math. — 2015. — Vol. 2. — P. 1–12.

23. **Argyros I.K., George S.** Local convergence of modified Halley-like methods with less computation of inversion // Novi Sad J. Math. — 2015. — Vol. 45. — P. 47–58.

24. **George S., Argyros I.K.** A unified local convergence for Jarratt-type methods in Banach space under weak conditions // Thai J. Math. — 2015. — Vol. 13, № 1. — P. 165–176.

25. **Sharma J.R., Gupta P.** An efficient fifth order method for solving systems of nonlinear equations // Comp. Math. Appl. — 2014. — Vol. 67. — P. 591–601.

26. **Homeier H.H.H.** A modified Newton method with cubic convergence: the multivariate case // J. Comp. Appl. Math. — 2004. — Vol. 169. — P. 161–169.

Поступила в редакцию 5 июля 2017 г.,
в окончательном варианте 5 февраля 2018 г.