

ствии фазы растяжения или в результате формирования поля напряжений, создающего растягивающие напряжения в вершине трещины.

Поступила 3 IV 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь И. С. О взаимодействии поверхностных волн с краевыми трещинами.—«Докл. АН СССР», 1973, т. 209, № 6.
2. Гузь И. С., Финкель В. М., Червов Г. А. Некоторые результаты исследования взаимодействия рэлеевских импульсов с краевыми трещинами.— ПМТФ, 1972, № 6.
3. Володарская Ш. Г., Гузь И. С., Куткин И. А., Финкель В. М. Исследование взаимодействия волн напряжений со стационарной макротрещиной в упругопластических и квазихрупких материалах.— ПМТФ, 1971, № 3.
4. Гузь И. С. Влияние ориентации краевой трещины на прохождение поверхностных волн.— ПМТФ, 1973, № 5.

УДК 539.374

### О ХАРАКТЕРЕ СОСТОЯНИЯ СРЕДЫ В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛОСТИ, РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ В ДИЛАТИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

С. З. Дунин, В. К. Сироткин, Е. В. Сумин

(Москва)

При расширении газовой полости в твердой среде могут происходить существенные изменения состояния этой среды. В частности, происходит разрушение хрупкой породы. Характер движения разрушенной породы существенно отличается от характера движения неразрушенной среды. Так, при сдвиговых деформациях происходит изменение плотности разрушенной породы. Это явление обычно называют дилатансией [1]. Кроме того, прочностные характеристики при разрушении породы также изменяются.

В данной работе рассмотрено напряженное состояние среды в окрестности расширяющейся полости в момент остановки. Исследовано влияние характеристик разрушенной породы на величину остаточных напряжений. Определен радиус зоны разрушения и исследована его зависимость от характеристик среды. Вычислен объем порового пространства в окрестности полости, образующегося за счет дилатансии. Исследован также характер напряженного состояния в упругопластических средах, которые не дилатируют при пластическом течении.

1. Рассмотрим адиабатическое расширение сферической газовой полости в упругопластической среде. В начальный момент времени по упругопластической среде начинает распространяться ударная волна, напряжение в которой превышает предел прочности среды на раздавливание, т. е. фронт ударной волны совпадает с фронтом разрушения. Предполагается, что на фронте ударной волны происходит уплотнение среды на некоторую постоянную величину  $\varepsilon$ , не зависящую от интенсивности волны [2]:

$$\varepsilon = (\rho - \rho_0)/\rho = \text{const.}$$

Между расширяющейся полостью и фронтом ударной волны происходит пластическое течение разрушенной среды, которая за счет дилатан-

сии разрыхляется (уплотняется). Предположим, что скорость дилатансии  $\Lambda$  постоянна во всей области пластического течения. Пластическое течение описывается условием текучести Кулона — Мора [3]

$$|\sigma_r - \sigma_\varphi| = -\sin \varphi (\sigma_r + \sigma_\varphi) + 2c \cos \varphi,$$

которое при расширении полости приобретает вид

$$(1.1) \quad (1 + \alpha)\sigma_\varphi - \sigma_r - Y = 0,$$

где  $\alpha = 2 \sin \varphi / (1 - \sin \varphi)$ ;  $Y = 2c \cos \varphi / (1 - \sin \varphi)$ .

Течение гранулированной среды за фронтом ударной волны будет описываться уравнением движения

$$(1.2) \quad \rho(r, t) \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r},$$

условием текучести (1.1) и условием дилатансии [1]

$$(1.3) \quad I_1 = 2\Lambda \sqrt{I_2}.$$

Для сферически-симметричного движения и  $\Lambda = \text{const}$  уравнение (1.3) принимает вид

$$(1.4) \quad \frac{\partial v}{\partial r} + 2 \frac{v}{r} = \Lambda \left| \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right|.$$

Интегрирование условия (1.4) определяет поле скоростей в пластической зоне при расширении полости

$$(1.5) \quad v(r, t) = \frac{\lambda_\pi(t)}{r^n}, \quad n = \frac{2 - \Lambda}{1 + \Lambda}.$$

В рамках такой модели в работе [4] получено выражение для плотности грунта, учитывающее уплотнение на фронте ударной волны и рыхление благодаря дилатансии:

$$(1.6) \quad \rho(r, t) = \rho_0 \left[ \frac{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}}{1 - \varepsilon} + \left(\frac{a_0}{r}\right)^{n+1} \right]^\Lambda (1 + \varepsilon),$$

где  $a_0, a$  — начальный и текущий радиусы полости;  $\rho_0$  — начальная плотность;  $n$  определяется из (1.5).

Подставив (1.1), (1.5), (1.6) в уравнение (1.2), получим

$$(1.7) \quad \rho(r, t) \left( \frac{\dot{\lambda}_\pi}{r^n} - n \frac{\lambda_\pi^2}{r^{2n+1}} \right) = \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2\alpha}{\alpha + 1} \frac{\sigma_r}{r} - \frac{2Y}{\alpha + 1} \frac{1}{r},$$

$$\sigma_\varphi = (\sigma_r + Y) / (1 + \alpha).$$

Интегрируя (1.7) от  $a$  до  $r$ , получим

$$(1.8) \quad \sigma_r(r) = C(t) r^{-\omega} + r^{-\omega} \dot{\lambda}_\pi a^{\omega-n+1} F_1(r) - r^{-\omega} n \dot{\lambda}_\pi^2 a^{\omega-2n} F_2(r) +$$

$$+ \frac{2Y}{\omega(1+\alpha)} \left[ 1 - \left(\frac{a}{r}\right)^\omega \right], \quad \omega = \frac{2\alpha}{\alpha+1};$$

$$(1.9) \quad F_1(r) = \rho_0 (1 + \varepsilon) \int_{a/r}^1 \left[ \frac{1 - \xi^{n+1}}{1 - \varepsilon} + \left(\frac{a}{\xi}\right)^{n+1} \xi^{n+1} \right]^\Lambda \xi^{n-\omega-2} d\xi,$$

$$F_2(r) = \rho_0 (1 + \varepsilon) \int_{a/r}^1 \left[ \frac{1 - \xi^{n+1}}{1 - \varepsilon} + \left( \frac{a_0}{a} \right)^{n+1} \xi^{n+1} \right]^\Delta \xi^{2n - \omega - 1} d\xi,$$

где  $\xi = a/r$ .

Величины  $C(t)$ ,  $\dot{\lambda}_n(t)$ ,  $\lambda_n(t)$  находятся, согласно граничному условию, на стенке полости

$$(1.10) \quad \sigma_r|_{r=a} = -p(a) = -P_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^{3\gamma},$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты, и граничному условию (условию «сшивки») на фронте разрушения. Используя (1.10), находим

$$C(t) = -p(a)a^\omega.$$

К концу расширения полости ударная волна в силу диссипативных процессов затухает и вырождается в упругий предвестник, т. е. наступает динамическое безволновое расширение полости [5]. Уже на этом этапе фронт разрушения излучает упругие волны. Уравнение распространения малых возмущений в упругой среде имеет вид

$$\text{grad div } \mathbf{v} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2}.$$

Будем считать, что на этапе безволнового расширения полости  $c_0 \gg a$ . Тогда упругую область можно рассматривать как несжимаемую среду. Поле скоростей в упругой области имеет вид

$$(1.11) \quad v(r, t) = \lambda_e(t)/r^2, \quad \lambda_e = a^2 \dot{a}.$$

Упругие деформации описываются уравнением движения

$$(1.12) \quad \rho_0 (\partial v / \partial t + v \partial v / \partial r) = \partial \sigma_r / \partial r + 2(\sigma_r - \sigma_\varphi) / r$$

и конвективно-гукowymi соотношениями [6]

$$(1.13) \quad E \partial v / \partial r = \dot{\sigma}_r - \dot{\sigma}_\varphi, \quad E v / r = (1/2)(\dot{\sigma}_\varphi - \dot{\sigma}_r),$$

где  $E$  — модуль Юнга; точка означает полную производную по времени. Используя соотношения (1.11), (1.13), получим

$$(1.14) \quad \dot{\sigma}_\varphi - \dot{\sigma}_r = 2E \lambda_e / r^3, \quad \sigma_r - \sigma_\varphi = 2E \ln(1 - u/r),$$

где  $u$  — смещение материальной точки.

Для того чтобы определить величину смещения в упругой области, воспользуемся уравнением баланса массы

$$(1.15) \quad \int_a^r \rho(r, t) r^2 dr = \int_{a_0}^{r-u} \rho(r, t) r^2 dr, \quad r - u > R,$$

где  $R$  — радиус фронта разрушения. Из (1.6), (1.14) и (1.15) окончательно получаем

$$(1.16) \quad \sigma_r - \sigma_\varphi = \frac{2}{3} E \ln \left\{ 1 - \frac{1}{r^3} [R^3 - a_0^3 - 3a^3 F_3(R)] \right\} \equiv \frac{2}{3} E \ln \left[ 1 - \frac{g(R)}{r^3} \right],$$

где

$$(1.17) \quad F_3(R) = (1 + \varepsilon) \int_{a/R}^1 \left[ \frac{1 - \xi^{n+1}}{1 - \varepsilon} + \left( \frac{a_0}{a} \right)^{n+1} \xi^{n+1} \right]^\Lambda \frac{d\xi}{\xi^4}.$$

Тогда решение уравнения (1.12) с учетом граничного условия для напряжений на бесконечности

$$(1.18) \quad \sigma_r(r) \rightarrow -p_h,$$

где  $p_h$  — литостатическое давление, имеет вид

$$\sigma_r(r) = -p_h - \frac{4E}{9} \text{Li}_2 \left[ \frac{g(R)}{r^3} \right] - \rho_0 \left( \frac{\lambda_e}{r} - \frac{\lambda_e^2}{2r^4} \right),$$

где

$$\text{Li}_2(x) = - \int_0^x \ln(1 - \eta) \frac{d\eta}{\eta}.$$

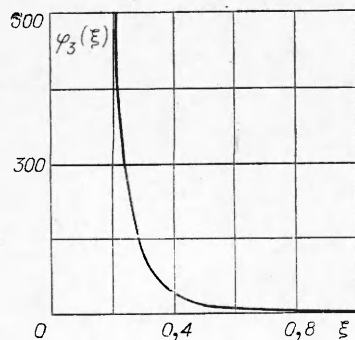
Решения в упругой и пластических областях должны быть «спиты» на фронте разрушения. К концу расширения полости условия на фронте разрушения имеют вид

$$(1.19) \quad \sigma_r(R - 0) = \sigma_r(R + 0), \quad \lambda_e/r^2 = \lambda_{\pi}/r^n.$$

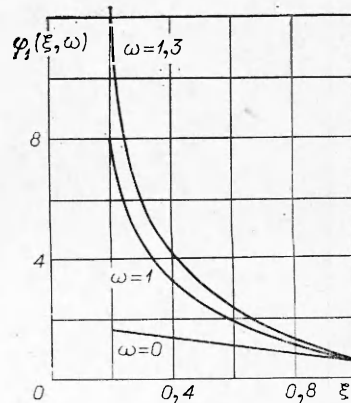
2. Рассмотрим поведение  $\sigma_r$  в упругой и пластической областях к концу расширения полости, в этом случае  $\lambda_e = \lambda_{\pi} = 0$ ,  $(a_0/a_m)^{n+1} \ll 1$ ,  $\varepsilon \ll 1$ , где  $a_m$  — радиус полости в момент остановки. Так как интеграл в выражении (1.17) определяется малыми  $\xi$ , то, пренебрегая малой областью  $1 - \xi^{n+1} \ll (a_0/a_m)^{n+1}$  для подынтегральной функции, можно воспользоваться приближенным выражением

$$\varphi_3(\xi) = [1 - \xi^{n+1}]^\Lambda \frac{1}{\xi^4} \approx (1 - \Lambda \xi^{n+1}) \frac{1}{\xi^4}, \quad \text{если } \frac{1 - \Lambda}{2} \xi^{n+1} \ll 1.$$

Последнее равенство справедливо вплоть до  $\xi = 0,9$ , т. е.  $r = 1,1a_m$ . На фиг. 1 показан график функции  $\varphi_3(\xi)$  ( $\Lambda = 0,1$ ;  $n = 1,7$ ), из которого



Ф и г. 1



Ф и г. 2

видно, что подинтегральная функция  $\varphi_3(\xi)$  на интервале  $[0,8; 1]$  вносит очень малый вклад. Поэтому для интеграла (1.17) справедливо выражение

$$F_3(R) = \int_{a/R}^1 (1 - \Lambda \xi^{n+1}) \frac{d\xi}{\xi^4} = \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{R}{a} \right)^3 - \left( \frac{R}{a} \right)^{3\Lambda} \right].$$

Объем, вытесненный сферической полостью при расширении несжимаемой пластической среды, равен  $a_m^3 - a_0^3$ . В нашем случае в пластической зоне происходит разрыхление (уплотнение) благодаря дилатансии. При этом объем, вытесненный полостью, равен

$$(2.1) \quad g(R_m) = a_m^3 \left( \frac{R_m}{a_m} \right)^{3\Lambda} - a_0^3.$$

Объем, пошедший на образование пор при рыхлении ( $\Lambda > 0$ ), равен

$$V_n = a_m^3 \left[ \left( \frac{R_m}{a_m} \right)^{3\Lambda} - 1 \right].$$

Подставляя (2.1) в (1.16), получим решение в упругой области

$$(2.2) \quad -\sigma_r(r) = p_h + \frac{4E}{9r^3} g(R_m) + \rho_0 \frac{\dot{\lambda}_e}{r}.$$

Здесь было использовано разложение  $\ln(1 - \eta) \approx -\eta$  при  $\eta \ll 1$ . Как видно из (2.2), радиальные напряжения могут достигать минимума в точке  $r_{**}$

$$r_{**} = \left[ \frac{4E}{3\rho_0 |\dot{\lambda}_e|} g(R_m) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Если в пластической области происходит разрыхление, то  $r_{**}$  сдвигается от полости.

Перейдем к рассмотрению пластической области. Для получения решения в пластической области необходимо исследовать подинтегральную функцию  $\varphi_1(\xi, \omega)$  интеграла (1.9), график которой показан на фиг. 2. Разложим  $\varphi_1(\xi, \omega)$  по степеням  $\Lambda$  и ограничимся линейным членом. Разлагая  $\ln(1 - \xi^{n+1})$  в ряд, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} F_1(r) &= \rho_0 \int_{a_m/r}^1 \xi^{n-\omega-2} d\xi - \Lambda \rho_0 \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_m/r}^1 \xi^{k(n+1)+n-\omega-2} d\xi = \\ &= \frac{\rho_0}{\omega-n+1} \left[ \left( \frac{r}{a_m} \right)^{\omega-n+1} - 1 \right] - \Lambda \rho_0 \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(n+1)+n-\omega-1} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left( \frac{a_m}{r} \right)^{k(n+1)+n-\omega-1}}{k(n+1)+n-\omega-1} \right]. \end{aligned}$$

Удерживая в этих рядах только основные члены, для  $\sigma_r$  в момент остановки при расширении полости (при  $r > 1,1a_m$ ) получим

$$(2.3) \quad \sigma_r(r) = \frac{Y}{\alpha} - \left[ p(a_m) + \frac{Y}{\alpha} \right] \left( \frac{a_m}{r} \right)^{\omega} + \frac{\rho_0 \dot{\lambda}_e}{r^{n-1}} \left\{ \frac{1}{\omega-n+1} \left[ 1 - \left( \frac{a_m}{r} \right)^{\omega-n+1} \right] - \right. \\ \left. - \frac{\Lambda}{2n-\omega} \left( \frac{a_m}{r} \right)^{\omega-n+1} \right\}.$$

Полученное выражение при  $\omega - n + 1 = 0$ , т. е.  $\alpha = \alpha_0 = (1 - 2\Lambda)/(1 + 4\Lambda)$ , переходит в решение

$$(2.4) \quad \sigma_r(r) = \frac{Y}{\alpha} - \left[ p(a_m) + \frac{Y}{\alpha} \right] \left( \frac{a_m}{r} \right)^\omega + \frac{\rho_0 \dot{\lambda}_n}{r^\omega} \left( \ln \frac{r}{a_m} - \frac{\Lambda}{n+1} \right).$$

Таким образом, вместо классификации [6] в среде с дилатансией следует ввести классификацию: а)  $0 < \alpha < \alpha_0$ ; б)  $\alpha = \alpha_0$ ; в)  $\alpha > \alpha_0$ . Как видно из (2.3), (2.4), радиальные напряжения в пластической области могут достигать максимума в точке  $r_*$

$$r_* = a_m \left\{ \frac{\omega}{n-1} - \frac{(\omega - n + 1)\omega}{(n-1)\rho_0 |\dot{\lambda}_n|} \left[ p(a_m) + \frac{Y}{\alpha} \right] a_m^{n-1} + \frac{(\omega - n + 1)\Lambda\omega}{(n-1)(2n - \omega)} \right\}^{1/(\omega - n + 1)}$$

или

$$\ln \frac{r_*}{a_m} = \frac{1}{\omega} + \frac{\Lambda}{n+1} - \frac{\left[ p(a_m) + \frac{Y}{\alpha} \right] a_m^\omega}{\rho_0 |\dot{\lambda}_n|}, \quad \alpha = \alpha_0.$$

Для оценки слагаемого, содержащего  $|\dot{\lambda}_n|$ , воспользуемся условием «сшивки» (1.19) для решения (2.2) в упругой области и решения (2.3) в пластической области.

3. Рассмотрим сначала хрупкоразрушающиеся породы. Будем считать, что разрушение происходит, если максимальное сжимающее напряжение достигает  $\sigma_*$ . Для таких пород можно считать, что  $Y \ll \sigma_*$ . Учитывая, что в момент остановки полости должно выполняться равенство  $-\sigma_r(R_m) = \sigma_*$ , получим уравнения для  $R_m$  и  $\rho_0 |\dot{\lambda}_n|$

$$(3.1) \quad \sigma_* = \left[ p(a_m) + \frac{Y}{\alpha} \right] \left( \frac{a_m}{R_m} \right)^\omega - \frac{Y}{\alpha} - \left\{ \sigma_* - p_h - \frac{4Ea_m^2}{9R_m^3} \left[ \left( \frac{R_m}{a_m} \right)^{3\Lambda} - \left( \frac{a_0}{a_m} \right)^3 \right] \right\} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\omega - n + 1} \left[ 1 - \left( \frac{a_m}{R_m} \right)^{\omega - n + 1} \right] - \frac{\Lambda}{2n - \omega} \left( \frac{a_m}{R_m} \right)^{\omega - n + 1} \right\};$$

$$(3.2) \quad \frac{Y}{\alpha} + p_h - \left[ p(a_m) + \frac{Y}{\alpha} \right] \left( \frac{a_m}{R_m} \right)^\omega + \frac{4Ea_m^2}{9R_m^3} \left[ \left( \frac{R_m}{a_m} \right)^{3\Lambda} - \left( \frac{a_0}{a_m} \right)^3 \right] = \\ = \rho_0 |\dot{\lambda}_n| R_m^{n-1} \left\{ 1 + \frac{1}{\omega - n + 1} \left[ 1 - \left( \frac{a_m}{R_m} \right)^{\omega - n + 1} \right] - \frac{\Lambda}{2n - \omega} \left( \frac{a_m}{R_m} \right)^{\omega - n + 1} \right\}.$$

Так как  $Y \ll \sigma_*$ , т. е. сцепление в разрушенной породе мало по сравнению с прочностью неразрушенной породы, то его можно не учитывать. Запишем решения уравнений (3.1), (3.2), а также выражения для  $r_*$ ,  $r_{**}$ ,  $V_n$  для разных значений  $\omega$ :

$$1) \quad \omega - n + 1 > 0$$

$$(3.3) \quad R_m = a_m \left\{ \frac{4E}{9\sigma_* \left[ (\omega - n + 2) - \frac{p_h}{\sigma_*} \right]} \right\}^{1/3(1-\Lambda)};$$

$$(3.4) \quad \frac{\rho_0 |\dot{\lambda}_n|}{R_m^{n-1}} = (\omega - n + 1) \sigma_*,$$

$$r_* = a_m \left\{ \frac{\omega}{n-1} - \frac{\omega a_m^{n-1} p(a_m)}{(n-1)\sigma_* R_m^{n-1}} + \frac{(\omega - n + 1)\Lambda\omega}{(n-1)(2n - \omega)} \right\}^{1/(\omega - n + 1)},$$

$$r_{**} = \left[ \frac{4Eg(R_m) \omega - n + 2}{3R_m \sigma_*} \right]^{1/2},$$

$$V_{II} = \frac{9\sigma_* R_m^3 \left[ (\omega - n + 2) - \frac{p_h}{\sigma_*} \right]}{4E} - a_m^3.$$

Как видно из выражения (3.3), радиус зоны дробления в этом случае уменьшается с ростом прочности раздробленной породы. Этот эффект целиком определяется влиянием динамики движения среды в окрестности полости на характер напряженного состояния. Заметим, что рост литостатического давления приводит к возрастанию  $R_m/a_m$  (если не учитывать зависимости  $\sigma_*$  от глубины). Отметим также, что ускорение обратного движения, определяемое выражением (3.4), растет с ростом прочности раздробленной породы, этот эффект, по-видимому, связан с возрастанием градиента радиальных напряжений с ростом  $\omega$ .

$$2) \quad \omega - n + 1 < 0$$

$$(3.5) \quad R_m = a_m \left[ \frac{4E}{9\sigma_* \left( 1 - \frac{p_h}{\sigma_*} \right)} \right]^{1/3(1-\Lambda)};$$

$$(3.6) \quad \frac{\rho_0 |\dot{\lambda}_n|}{R_m^{n-1}} = \sigma_* (n - \omega - 1) \left( \frac{a_m}{R_m} \right)^{n-\omega-1},$$

$$r_* = a_m \left\{ \frac{\omega}{n-1} + \frac{\omega a_m^{n-1} p(a_m)}{(n-1) \sigma_* R_m^{n-1}} \left( \frac{R_m}{a_m} \right)^{n-\omega-1} - \frac{(n-\omega-1) \Lambda \omega}{(n-1)(2n-\omega)} \right\}^{-1/(n-\omega-1)},$$

$$r_{**} = \left[ \frac{4Eg(R_m)}{3(n-\omega-1) R_m \sigma_*} \left( \frac{R_m}{a_m} \right)^{n-\omega-1} \right]^{1/2};$$

$$(3.7) \quad V_{II} = \frac{9\sigma_* R_m^3 (1 - p_h/\sigma_*)}{4E} - a_m^3.$$

В данном случае радиус зоны дробления не зависит от прочности раздробленной породы и совпадает с квазистатической оценкой [5]. Заметим также, что ускорение обратного движения падает с уменьшением  $\omega$ , так как в формуле (3.6) основная зависимость от  $\omega$  определяется величиной  $(a_m/R_m)^{n-\omega-1}$ .

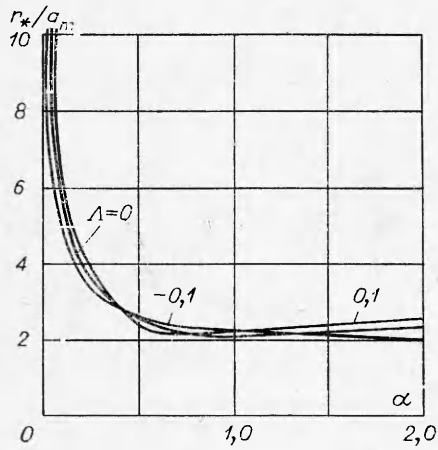
$$3) \quad \omega = n - 1$$

$$\frac{\rho_0 |\dot{\lambda}_I|}{R_m^{n-1}} = \frac{\sigma_*}{\ln \frac{eR_m}{a_m}}, \quad \ln \frac{r_*}{a_m} = \frac{1}{\omega} + \frac{\Lambda}{n-1} - \frac{a_m^{n-1} p(a_m) \ln \frac{eR_m}{a_m}}{\sigma_* R_m^{n-1}},$$

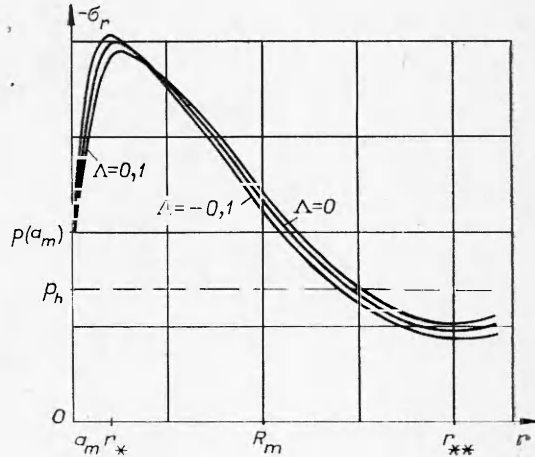
$$r_{**} = \left[ \frac{4Eg(R_m)}{3R_m \sigma_*} \ln \frac{eR_m}{a_m} \right]^{1/2}.$$

Выражения для  $R_m$  и  $V_{II}$  аналогичны (3.5) и (3.7) соответственно. Приведем оценки, которые показывают, на сколько изменяются некоторые величины за счет дилатансии, считая, что  $\Lambda$  меняется в интервале от 0,1 до 0,2. Так, радиус  $r_*$  увеличивается на 5,5—11%, пик напряжения  $\sigma_r(r_*)$  — на 3—6%, радиус зоны дробления — на 18—36%.

Более детальная зависимость  $r_*$  от параметров  $\alpha$  и  $\Lambda$  приведена на фиг. 3. Видно, что дилатансия слабо влияет на радиус пережатия  $r_*$ .



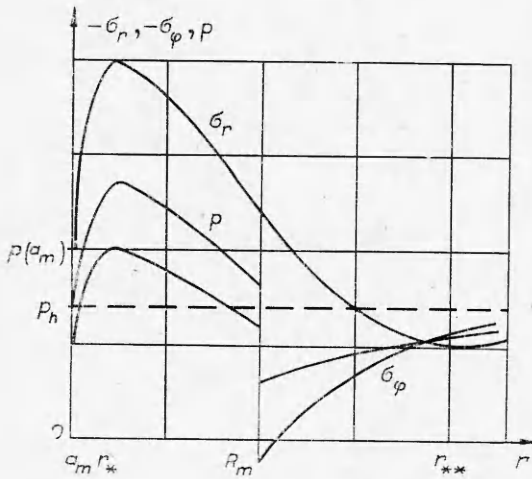
Ф и г. 3



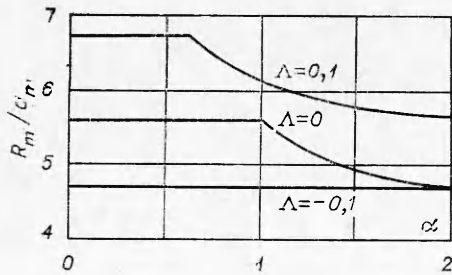
Ф и г. 4

В то же время изменение прочности раздробленной среды в области малых  $\alpha$  ( $\alpha < 0,6$ ) существенно влияет на величину  $r_*$ . В области же больших  $\alpha$  ( $\alpha > 0,6$ ) зависимость  $r_*$  от  $\alpha$  очень слабая.

На фиг. 4 приведено качественное поведение  $-\sigma_r(r)$  в момент остано-



Ф и г. 5



Ф и г. 6

новки полости при различных значениях  $\Lambda$  и  $\alpha = \alpha_0$ . Видно, что изменение  $\Lambda$  не приводит к качественному изменению характера напряженного состояния. Для более детальной характеристики напряженного состояния на фиг. 5 приведены графики  $-\sigma_r(r)$ ,  $-\sigma_\phi(r)$  и  $p(r) = -\frac{1}{3}(\sigma_r + 2\sigma_\phi)$  при  $\Lambda = 0$ ,  $\omega = 1$ . Видно, что в пластической области все эти величины имеют максимум, причем пик напряжения находится довольно близко от полости ( $r_* \sim 2a_m$ ). На границе зоны разрушения напряжение  $-\sigma_\phi(r)$  испытывает скачок и становится растягивающим. Таким образом, существует возможность образования радиальных трещин. В данной статье влияние радиальных трещин не учитывается, поэтому полученные результаты применимы для достаточно больших глубин. Такой характер напряжений связан с учетом динамических членов. Так, давление в упругой области становится меньше литостатического на величину  $\rho_0 |\lambda_e|/r$ .



Зависимость радиуса зоны дробления  $R_m$  от параметров  $\alpha$  и  $\Lambda$  приведены на фиг. 6. Видно, что в этом случае величина дилатансии существенно влияет на величину  $R_m$ . При этом изменение дилатансии может приводить к изменению качественной зависимости радиуса дробления от свойств раздробленной породы.

4. Рассмотрим случай  $\alpha = 0$ , т. е. идеально пластическую среду. Условие текучести Кулона — Мора (1.1) переходит в условие Треска

$$(4.1) \quad \sigma_\varphi - \sigma_r = Y.$$

Решение уравнения (1.12) с учетом (1.16), (1.18) имеет вид

$$\sigma_r(r) = -p_h - \frac{4E}{9} \text{Li}_2 \left( \frac{a^3 - a_0^3}{r^3} \right) - \rho_0 \left( \frac{\dot{\lambda}_e}{r} - \frac{\dot{\lambda}_a^2}{2r^4} \right).$$

В пластической области с учетом условия (1.10) запишем

$$\sigma_r(r) = -p(a) + 2Y \ln \frac{r}{a} + \rho_0 \dot{\lambda}_\Pi \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{r} \right) - \frac{\rho_0 \dot{\lambda}_\Pi^2}{2} \left( \frac{1}{a^4} - \frac{1}{r^4} \right).$$

Воспользуемся условием на фронте разрушения (1.19) в момент остановки полости ( $\dot{\lambda}_e = \dot{\lambda}_\Pi = \dot{\lambda}$ ), тогда

$$-p_h - \frac{4E}{9} \frac{a_m^3 - a_0^3}{R_m^3} + \frac{\rho_0 |\dot{\lambda}|}{a_m} = -p(a_m) + 2Y \ln \frac{R_m}{a_m}.$$

Пользуясь тем, что  $(a_0/a_m)^3 \ll 1$ , запишем решение в пластической области

$$(4.2) \quad \sigma_r(r) = -p(a_m) + 2Y \ln \frac{r}{a_m} - \left( 1 - \frac{a_m}{r} \right) \left( 2Y \ln \frac{R_m}{a_m} - p(a_m) + p_h + \frac{4E}{9} \left( \frac{a_m}{R_m} \right)^3 \right).$$

Как видно из (4.2), радиальные напряжения могут достигать максимума в точке  $r_*$

$$(4.3) \quad r_* = \frac{a_m}{2Y} \left[ 2Y \ln \frac{R_m}{a_m} + p_h - p(a_m) + \frac{4E}{9} \left( \frac{a_m}{R_m} \right)^3 \right].$$

Использование (1.16), (4.1) приводит к выражению радиуса зоны разрушения в идеально пластической среде

$$(4.4) \quad R_{r_1} = a_m \left( \frac{2E}{3Y} \right)^{1/3}.$$

Подставляя (4.4) в (4.3), получим

$$(4.5) \quad \frac{r_*}{a_m} = \frac{1}{3} \left[ \ln \left( \frac{2E}{3Y} \right) + 1 \right] + \frac{p_h - p(a_m)}{2Y}.$$

Как показывают оценки работы [6], для малых  $p_h$  величина  $p(a_m) - p_h > 0$ . При этом с учетом, что для идеально пластических сред  $Y/E \sim 10^{-3}$ , радиус  $r_*$  оказывается меньше  $2,5 a_m$ , т. е. максимальные напряжения будут вблизи полости или на ее границе. С ростом литостатического давления  $p(a_m) - p_h$  убывает и может изменить знак. В этом случае  $r_*$  возрастает и область максимальных сжимающих напряжений смещается от полости.

Для максимальных сжимающих напряжений из соотношений (4.2), (4.5) получим

$$-\sigma_r(r_*) = p(a_m) + 2Y \left[ \frac{r_*}{a_m} - \ln \frac{r_*}{a_m} - 1 \right].$$

Так, для  $r_* \approx 2,5 a_m$  (при  $p_h \sim p(a_m)$ ) максимальное напряжение превышает давление в полости на величину  $\approx 1,5Y$ .

Анализ напряженного состояния в окрестности расширяющейся полости в момент остановки позволяет отметить следующее:

1. Пережатие существует в дилатирующей среде с сухим трением при  $\alpha > \alpha_*$ . Для  $\alpha_*$  получается зависимость от  $\Lambda$ :  $\alpha_* = \alpha_*^0 + 0,1 \Lambda$  ( $\alpha_*^0 = 0,06$ ;  $\varphi_*^0 = 1,5^\circ$ ). Однако, как указывается в работах [6, 7], в реальных грунтах с трением  $\varphi \approx 12-30^\circ$ . Фиг. 3 показывает, что для этих углов зависимость  $r_*$  от  $\alpha$  довольно слабая и  $r_* \approx 2a_m$ . При разрыхлении пик напряжения  $-\sigma_r(r_*)$  сдвигается от полости и уменьшается, при уплотнении происходит сдвиг к полости и пик увеличивается.

2. Радиус зоны дробления  $R_m$  и минимум в упругой области  $r_{**}$  существенно зависят от  $\omega$ ,  $\Lambda$ . При разрыхлении  $R_m$ ,  $r_{**}$  увеличиваются, при уплотнении — уменьшаются.

3. В случае пластических сред для небольших литостатических давлений зона максимальных сжимающих напряжений оказывается вблизи полости. С ростом литостатического давления пик напряжения удаляется от полости.

Поступила 5 I 1978

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Николаевский В. Н. Механические свойства грунтов и теория пластичности. Механика твердых деформируемых тел. Т. 6. М., ВИНТИ, 1972.
2. Компанец А. С. Ударные волны в пластически уплотняющейся среде. — Докл. АН СССР, 1956, т. 109, № 1.
3. Bishop A. W. Shear strength parameters for undisturbed and remoulded soil specimens— In: Proceedings of the Roscoe Memorial Symposium, Cambridge University, 1972.
4. Дунин С. З., Спроткин В. К. Расширение газовой полости в хрупкой породе с учетом дилатационных свойств грунта. — ПМТФ, 1977, № 4.
5. Родионов В. И. и др. Механический эффект подземного взрыва. М., «Недра», 1971.
6. Чедвик П., Коке А., Гонкин Г. Механика глубинных подземных взрывов. М., «Мир», 1966.
7. Николаевский В. Н., Сырников Н. М. О плоском предельном течении сыпучей дилатирующей среды. — Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 2.