

- дам в газовой динамике. II Междунар. коллоквиум по газодинамике взрыва и реагирующих систем.— М.: ВЦ АН СССР, 1971.— Т. 2.
5. Гасилов В. А., Головин В. М. и др. О численном моделировании рэлей-тейлоровской неустойчивости в несжимаемой жидкости.— М., 1979.— (Препр./Ин-т прикл. математики АН СССР; № 70).
  6. Волкова Р. А., Круглякова Л. В. и др. О моделировании рэлей-тейлоровской неустойчивости в несжимаемой жидкости в трехмерной постановке.— М., 1985.— (Препр./Ин-т прикл. математики АН СССР; № 86).
  7. Голдштейн Г. Классическая механика.— М.: Наука, 1975.
  8. Франк А. М. Полностью консервативный численный алгоритм для дискретных моделей несжимаемой жидкости // Моделирование в механике.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР; ИТПМ СО АН СССР, 1987.— Т. 1 (18), № 5.
  9. Овсянников Л. В. Параметры кноидальных волн // Проблемы математики и механики.— Новосибирск: Наука, 1983.
  10. Maxworthy T. Experiments on collisions between solitary waves // J. Fluid Mech.— 1976.— V. 76.— P. 177.
  11. Загрядская Н. Н., Иванова С. В. и др. Действие длинных волн на вертикальную преграду // Изв. ВНИИГ.— 1980.— Т. 138.— С. 94.
  12. Давлетшин В. Х. Силовое воздействие одиночных волн на вертикальные сооружения // Сопровождение по цунами: Тез. докл.— Горький: ИПФ АН СССР, 1984.
  13. Железняк М. И. Воздействие длинных волн на сплошные вертикальные преграды // Накат цунами на берег.— Горький: ИПФ АН СССР, 1985.
  14. Pedersen G., Gjevik B. Run-up of solitary waves // J. Fluid Mech.— 1983.— V. 135.— P. 283.
  15. Паутов В. Н., Франк А. М., Шарая И. А. О методике расчета движения несжимаемой жидкости со свободной границей на сетке Дирихле.— Красноярск, 1987.— (Препр./ВЦ СО АН СССР; № 16).
  16. Frank A. M., Pautov V. N. On discrete model of inviscid incompressible fluid // Proc. Sci. and Meth. Seminar on Ship Hydrodynamics.— Varna: BSHC, 1986.

Поступила 28/1 1988 г.

УДК 533.6.12

## О НЕЛИНЕЙНОМ РАЗВИТИИ ДЛИННОВОЛНОВЫХ НЕВЯЗКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

В. И. Жук, С. П. Попов  
(Москва)

Анализ распространения по пограничному слою малых двумерных возмущений в ряде случаев сводится к решению одного нелинейного уравнения относительно некоторой функции, зависящей от времени и продольной координаты [1]. Если амплитуда  $\delta$  и длина волны  $\lambda$  возмущений удовлетворяют условиям  $Re^{-2/3} \ll \delta \ll 1$ ,  $\lambda = O(Re^{-1/2} \times \delta^{-1})$ , где число Рейнольдса  $Re \rightarrow \infty$  определено по характерному размеру обтекаемого тела, то двумерное поле течения в пограничном слое может быть построено в результате решения уравнения Бюргера [2] при сверхзвуковом режиме обтекания и уравнения Бенджамина — Оно [3, 4] при дозвуковых скоростях набегающего потока. Упоминутые уравнения, выведенные в [1] с помощью асимптотических разложений решений полной системы уравнений Навье — Стокса, рассматриваются в [5] как следствие предельного перехода в теории свободного взаимодействия [6—8] к высокочастотным крупномасштабным возмущениям.

1. Проиллюстрируем вывод аналогичного одномерного уравнения на примере возмущенного течения в плоской струе несжимаемой жидкости, граничащей с твердой стенкой [9, 10]. Будем считать время  $t$ , декартовы координаты  $x, y$ , компоненты вектора скорости  $u, v$  и давление  $p$  безразмерными соответственно по величинам  $L^* U^{*-1}$ ,  $L^*$ ,  $U^*$ ,  $\rho^* U^{*2}$  ( $L^*$ ,  $U^*$  — характерные длина и скорость струи,  $\rho^*$  — плотность несжимаемой жидкости). При больших  $Re = U^* L^* / \nu^*$  ( $\nu^*$  — кинематическая вязкость) пристеночная струя аналогична пограничному слою, а невозмущенный профиль  $U_0$  продольной компоненты скорости в струе зависит от переменной  $Y_m = Re^{1/2} y$ . Дальнейший анализ основывается на свойствах функции  $U_0$ , вытекающих из вида изучаемого движения, а именно: на выходе из струи (при увеличении  $Y_m$ ) и вблизи твердой поверхности  $Y_m = 0$ , ограничивающей струю снизу,

$$(1.1) \quad \begin{aligned} U_0 &\rightarrow 0, \quad dU_0/dY_m \rightarrow 0, \quad Y_m \rightarrow \infty, \\ U_0 &\rightarrow \lambda_1 Y_m + \lambda_2 Y_m^2 + \dots, \quad Y_m \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Пусть в потоке имеется возмущение продольной компоненты скорости порядка  $\delta$ . Такое возмущение можно создать, например, располагая на обтекаемой поверхности малое препятствие высотой порядка  $y = O(\text{Re}^{-1/2}\delta)$ . Обозначим характерный масштаб длины волны возмущения через  $\lambda$ , тогда из уравнения неразрывности следует порядок возмущения вертикальной компоненты скорости  $v = O(\text{Re}^{-1/2}\delta\lambda^{-1})$  в основной толще струи при  $Y_m = O(1)$ . Приравнявая порядки членов уравнения сохранения вертикальной компоненты импульса  $\partial p/\partial y \sim U_0 \partial v/\partial x \sim \text{Re}^{-1/2}\delta\lambda^{-2}$ , легко оценить возмущение давления  $\Delta p = O(\text{Re}^{-1}\delta\lambda^{-2})$ . С другой стороны, вблизи стенки, где возмущение скорости  $u$  порядка самой скорости, уравнение сохранения продольной компоненты импульса дает  $\partial p/\partial x \sim \sim u \partial u/\partial x$ , т. е.  $\Delta p = O(\delta^2)$ . Сравняя две оценки для  $\Delta p$ , получим порядок длины волны возмущения  $\lambda = O(\text{Re}^{-1/2}\delta^{-1/2})$ . Данные оценки позволяют представить решение уравнений Навье — Стокса в основной толще струи в виде

$$(1.2) \quad u = U_0 + \delta u_{1m} + \delta^2 u_{2m} + \dots, \quad v = \delta^{3/2} v_{1m} + \delta^{5/2} v_{2m} + \dots, \\ p = p_\infty + \delta^2 p_{1m} + \delta^3 p_{2m} + \dots$$

Здесь все искомые возмущающие функции с индексами  $1m, 2m$  зависят от переменных  $T = \text{Re}^{1/2}\delta^{3/2}t$ ,  $X = \text{Re}^{1/2}\delta^{1/2}x$ ,  $Y_m = \text{Re}^{1/2}y$ , а  $p_\infty$  — давление на верхней границе струи. Из системы уравнений первого приближения

$$U_0 \frac{\partial u_{1m}}{\partial X} + v_{1m} \frac{dU_0}{dY_m} = 0, \quad U_0 \frac{\partial v_{1m}}{\partial X} = -\frac{\partial p_{1m}}{\partial Y_m}, \quad \frac{\partial^2 u_{1m}}{\partial X^2} + \frac{\partial v_{1m}}{\partial Y_m} = 0$$

вытекают явные выражения [9, 10]

$$(1.3) \quad u_{1m} = A_1(T, X) \frac{dU_0}{dY_m}, \quad v_{1m} = -\frac{\partial A_1}{\partial X} U_0(Y_m), \quad p_{1m} = \frac{\partial^2 A_1}{\partial X^2} \int_0^{Y_m} U_0^2 dY'_m.$$

Как видно из (1.1), (1.3),  $v_{1m} \rightarrow 0$  при  $Y_m \rightarrow 0$ , что указывает на необходимость учитывать вблизи стенки следующие члены разложения для  $v$ . Подставляя (1.3) в систему уравнений второго приближения

$$\frac{\partial u_{2m}}{\partial T} + U_0 \frac{\partial u_{2m}}{\partial X} + u_{1m} \frac{\partial u_{1m}}{\partial X} + v_{2m} \frac{dU_0}{dY_m} + v_{1m} \frac{\partial u_{1m}}{\partial Y_m} = -\frac{\partial p_{2m}}{\partial X}, \\ \frac{\partial v_{2m}}{\partial T} + U_0 \frac{\partial v_{2m}}{\partial X} + u_{1m} \frac{\partial v_{1m}}{\partial X} + v_{1m} \frac{\partial v_{1m}}{\partial Y_m} = -\frac{\partial p_{2m}}{\partial Y_m}, \quad \frac{\partial u_{2m}}{\partial X} + \frac{\partial v_{2m}}{\partial Y_m} = 0,$$

получаем

$$v_{2m} = -U_0 \frac{\partial A_2}{\partial X} - \frac{\partial A_1}{\partial T} - \frac{dU_0}{dY_m} A_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} + U_0 \int_0^{Y_m} \frac{\partial p_{1m}}{\partial X} \left[ \frac{1}{U_0^2} - \frac{1}{\lambda_1^2 Y_m'^2 (1 + 2\lambda_2 \lambda_1^{-1} Y'_m)} \right] \times \\ \times dY'_m + U_0 \int_0^{Y_m} \frac{\partial p_{1m}}{\partial X} \frac{1}{\lambda_1^2 Y_m'^2 (1 + 2\lambda_2 \lambda_1^{-1} Y'_m)} dY'_m$$

(функция  $A_2(T, X)$ , как и  $A_1(T, X)$ , произвольна).

Найдем предельный вид разложений (1.2) вблизи стенки. Используя (1.1), при  $Y_m \rightarrow 0$  имеем

$$(1.4) \quad u = \lambda_1 Y_m + \delta \lambda_1 A_1 + \dots, \\ v = -\delta^{3/2} \lambda_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} Y_m - \delta^{5/2} \left( \frac{\partial A_1}{\partial T} + \lambda_1 A_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1} \frac{\partial^3 A_1}{\partial X^3} \right) + \dots, \\ p = p_\infty - \delta^2 \Delta \frac{\partial^2 A_1}{\partial X^2} + \dots, \quad \Delta = \int_0^\infty U_0^2 dY_m.$$

Первые два члена асимптотических рядов (1.4) для  $u$  и  $v$  становятся одного порядка, если  $Y_m = O(\delta)$ . Это служит основанием отдельно рассмотреть пристеночную область, в которой новая переменная  $Y_a = \delta^{-1}Y_m$  порядка единицы, а решение ищется в виде

$$(1.5) \quad u = \delta u_a + \dots, \quad v = \delta^{5/2}v_a + \dots, \quad p = p_\infty + \delta^2 p_a + \dots$$

Система уравнений Навье — Стокса в результате подстановки в нее выражений (1.5) с зависящими от  $T$ ,  $X$  и  $Y_a = \text{Re}^{1/2}\delta^{-1}y$  функциями  $u_a$ ,  $v_a$ ,  $p_a$  дает

$$(1.6) \quad \frac{\partial u_a}{\partial T} + u_a \frac{\partial u_a}{\partial X} + v_a \frac{\partial u_a}{\partial Y_a} = -\frac{\partial p_a}{\partial X} + O(\text{Re}^{-1/2}\delta^{-7/2}),$$

$$\frac{\partial p_a}{\partial Y_a} = 0, \quad \frac{\partial u_a}{\partial X} + \frac{\partial v_a}{\partial Y_a} = 0.$$

Символом  $O$  в уравнении сохранения продольной компоненты импульса обозначен порядок вязких членов. При  $\delta = O(\text{Re}^{-1/7})$  нелинейный пристеночный подслой  $Y_a = O(1)$  вязкий, такой случай изучался в [9, 10]. Ниже предполагается  $\delta \gg \text{Re}^{-1/7}$ , тогда нелинейная область толщины  $y = O(\text{Re}^{-1/2}\delta)$  разделяется, в свою очередь, на основную невязкую часть, где  $Y_a = O(1)$ , а вязкие члены в первом уравнении системы (1.6) малы, и непосредственно примыкающий к обтекаемой поверхности вязкий подслой, в котором  $Y_a \sim (\text{Re}^{-1/2}\delta^{-7/2})^{1/2} \ll 1$ .

К системе (1.6) с отброшенными вязкими членами необходимо добавить граничное условие непротекания на стенке и предельные условия на верхнем краю нелинейной области, задаваемые переписанными относительно переменной  $Y_a$  выражениями (1.4). Нетрудно убедиться, что функции

$$(1.7) \quad u_a = \lambda_1 Y_a + \lambda_1 A_1,$$

$$v_a = -\lambda_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} Y_a - \frac{\partial A_1}{\partial T} - \lambda_1 A_1 \frac{\partial A_1}{\partial X} + \frac{\Delta}{\lambda_1} \frac{\partial^3 A_1}{\partial X^3}, \quad p_a = -\Delta \frac{\partial^2 A_1}{\partial X^2},$$

обеспечивающие выполнение условий срачивания при  $Y_a \rightarrow \infty$ , являются решением нелинейной системы (1.6). Остается удовлетворить условию непротекания. Пусть источником возмущений служит упомянутая выше неровность на обтекаемой поверхности, форма которой описывается уравнением  $Y_a = G(T, X)$ . Тогда граничное условие имеет вид

$$(1.8) \quad v_a - \frac{\partial C}{\partial T} = \frac{\partial G}{\partial X} u_a \quad \text{при} \quad Y_a = G.$$

Для функций  $u_a$ ,  $v_a$ , задаваемых формулами (1.7), условие (1.8) приводит к неоднородному уравнению Кортевега — де Вриза

$$(1.9) \quad \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial^3 A}{\partial x^3} - \varphi(t, x), \quad A = A_1 + G, \quad \varphi = \frac{\partial^3 G}{\partial x^3},$$

в котором с целью исключения постоянных  $\lambda_1$  и  $\Delta$  выполнено преобразование независимых переменных  $T = \lambda_1^{-2} \Delta^{1/2} t$ ,  $X = \lambda_1^{-1} \Delta^{1/2} x$ . Для нормального вдува с плоской поверхности  $Y_a = 0$  со скоростью  $v_a = v_n$  в уравнении (1.9) неоднородный член  $\varphi = \lambda_1^{-2} \Delta^{1/2} v_n$ .

Если функция  $A$  найдена из одномерного уравнения (1.9), то двумерное поле скоростей и давление полностью определяются как в нелинейном подслое, так и в основной толще струи.

2. Обратимся к решению уравнения (1.9), а также полученных в [1] уравнения Бюргера [2]

$$(2.1) \quad \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \varphi(t, x)$$

и Бенджамина — Оно [3, 4]

$$(2.2) \quad \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 A / \partial \xi^2}{\xi - x} d\xi - \varphi(t, x).$$

К (2.1), (2.2) при определенных предположениях сводится задача о нестационарном взаимодействии невязких возмущений в пограничном слое соответственно со сверх- и дозвуковым потоком газа. Функция  $\varphi$  в правых частях (2.1), (2.2) пропорциональна скорости нормального вдува либо связана с наличием препятствия на обтекаемой поверхности.

Уравнения (1.9), (2.1), (2.2) описывают нелинейную эволюцию возмущений с длиной волны  $\lambda$ , зависящей от амплитуды  $\delta$  и превышающей характерный поперечный размер течения порядка  $Re^{-1/2}$ , причем значение  $\delta \ll 1$  должно быть велико по сравнению с масштабом амплитуды асимптотической теории [6—10], где вязкость играет определяющую роль. В частности, применительно к течению в струе около плоской стенки ограничение на амплитуду выражается неравенством  $\delta \gg Re^{-1/7}$ .

На рис. 1 ( $t = 9,75$ ) приведено численное решение уравнения Кортевега — де Вриза (1.9) с нулевыми начальными данными и неоднородным членом в правой части, задаваемым выражением  $\varphi(t, x) = -2 \sin(2\pi t) \times \sin(\pi x/5)$  в прямоугольнике  $0 < x < 5$ ,  $0 < t < 0,5$  и  $\varphi(t, x) = 0$  вне его. Таким образом моделировался кратковременный отсос из пристеночной струи через щель. Как видно из рис. 1, внесенное локальное возмущение трансформируется в волновой пакет, распространяющийся в сторону роста  $x$ . Максимальный пик несколько смещается вниз по потоку от щели и слабо затухает со временем; в головной части волнового пакета происходит рождение новых максимумов и минимумов.

Иная картина наблюдается при постоянно вносимых в поток возмущениях, как следует из построенных на рис. 2, 3 решений уравнения (1.9) для  $\varphi = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ ,  $a = 0,5$  и  $A = 0$  при  $t = 0$ . Приведенное на рис. 2 штриховой кривой распределение  $-A$  в момент времени  $t = 4,35$  указывает на образование волнового пакета, распространяющегося вниз по потоку, а в области воздействия описываемых функцией  $\varphi$  внешних возмущений (вблизи  $x = 0$ ) происходит постепенное увеличение по времени функции  $|A|$  до тех пор, пока не наступят условия для отделения солитона. Сплошная кривая, отвечающая  $t = 8,9$ , иллюстрирует процесс возникновения первого солитона. С течением времени солитоны периодически зарождаются в месте внесения возмущений и распространяются в виде цепочки в сторону отрицательных  $x$  (рис. 3,  $t = 21,7$ ). Волновой пакет распространяется в сторону положительных  $x$  с увеличением характерной длины периодичности и незначительным возрастанием амплитуды.

Для уравнения (2.2) в качестве примера численно решалась задача с нулевыми данными Коши в предположении  $\varphi(t, x) = 1$  при  $0 < x < 0,5$  и  $\varphi(t, x) = 0$  вне этого интервала. На рис. 4 показана величина  $-A$  как функция  $x$  для  $t = 22,6$ . Наличие неоднородного члена также приводит к образованию группы солитонов, распространяющихся вверх по потоку от области воздействия, и волнового пакета, идущего вниз по потоку.

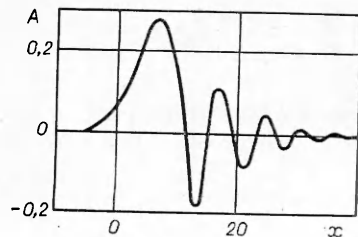


Рис. 1

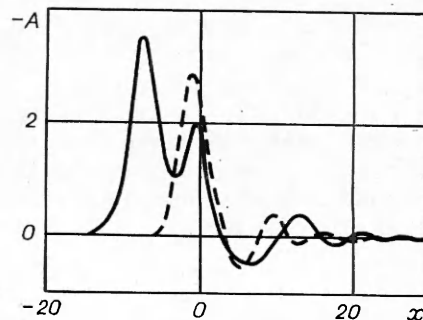
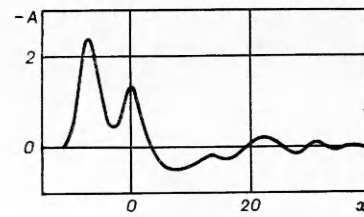
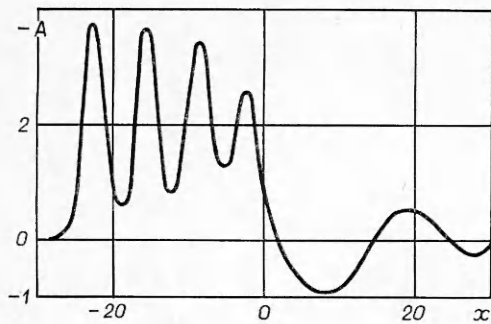


Рис. 2



Р и с. 4

Р и с. 3

3. Стационарными невязкими уравнениями описываются область присоединения сверхзвукового потока [11], а также течение в окрестности отрыва пограничного слоя на движущейся вниз по потоку поверхности [12]. Два примера нестационарных локально-невязких течений с взаимодействием, подчиняющихся уравнению Бюргера, приведены в [13]: обтекание сверхзвуковым потоком пластины с периодически колеблющимся щитком и распространение вдоль плоской поверхности клина возмущений, вызванных внезапным изменением перепада давлений на его задней кромке.

Рассмотрим задачу о взаимодействии пограничного слоя на пластине в сверхзвуковом потоке с падающей на него извне в момент времени  $t = 0$  ударной волной. Предположим, что скачок давления, отнесенный к скоростному напору на бесконечности, по порядку величины превосходит  $Re^{-1/4}$ , хотя и остается малым. Тогда в области возмущенного пограничного слоя применимо уравнение (2.1) с неоднородным членом  $\varphi = p_0 \delta(x)$ , где  $\delta(x)$  — дельта-функция,  $p_0 > 0$  — взятое в безразмерной системе единиц [6—8] давление за ударной волной с учетом ее отражения в точке  $x = 0$ . Неоднородный член указанного вида может быть интерпретирован также как следствие отклонения щитка на пластине.

Полагая  $A = 0$  при  $t = 0$  и производя известное преобразование Коула — Хопфа [14]  $A = -2B^{-1} \partial B / \partial x$ , приходим к линейной задаче

$$(3.1) \quad \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + \frac{p_0}{2} \theta(x) B, \quad \theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases} \quad \tilde{B}(\infty; x) = \tilde{B}_0, \quad \frac{d\tilde{B}_0}{dx} = 0.$$

В результате преобразования Лапласа  $\tilde{B}(s, x) = \int_0^\infty B(t, x) e^{-st} dt$  из (3.1) вытекает

$$\tilde{B} = \frac{B_0}{s - \frac{1}{2} p_0} + K_+ \exp \left[ - \left( s - \frac{1}{2} p_0 \right)^{1/2} x \right], \quad x > 0, \quad \tilde{B} = \frac{B_0}{s} + K_- \exp \left( s^{1/2} x \right), \\ x < 0.$$

Коэффициенты  $K_-$  и  $K_+$  находятся из требования непрерывности в точке  $x = 0$  функции  $\tilde{B}$  и ее первой производной:

$$K_- = \frac{p_0 B_0}{2s \left( s - \frac{1}{2} p_0 \right)^{1/2} \left[ \left( s - \frac{1}{2} p_0 \right)^{1/2} + s^{1/2} \right]}, \quad K_+ = - \frac{s^{1/2}}{\left( s - \frac{1}{2} p_0 \right)^{1/2}} K_-.$$

Переходя от изображений к оригиналам, для  $x > 0$  получаем

$$B = B_0 \exp \left( \frac{1}{2} p_0 t \right) \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2 \sqrt{t}} \right) + B_0 I(p_0, t), \\ I(p_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau(t-\tau)}} \exp \left( - \frac{x^2}{4\tau} + \frac{1}{2} p_0 \tau \right) d\tau.$$

Аналогично для  $x < 0$  справедливо выражение

$$B = B_0 \operatorname{erf}\left(\frac{|x|}{2\sqrt{t}}\right) + B_0 \exp\left(\frac{1}{2}p_0 t\right) I(-p_0, t).$$

Интеграл типа свертки  $I(p_0, t)$  приведем к виду

$$(3.2) \quad I(p_0, t) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{1}{\mu(\mu-1)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\mu + \frac{1}{2}p_0 \frac{t}{\mu}\right) d\mu,$$

удобному для его оценки при  $t \rightarrow \infty$ . Максимум функции, стоящей в показателе экспоненты подынтегрального выражения в (3.2), достигается на нижней границе  $\mu = 1$  интервала интегрирования, в то время как максимум этой функции в интеграле  $I(-p_0, t)$  достигается в точке  $\mu = \sqrt{2p_0 t/|x|}$ . Применение метода Лапласа к асимптотической оценке интеграла  $I(p_0, t)$  на больших временах дает

$$(3.3) \quad A = -\frac{2}{x + (2/p_0)^{1/2}}, \quad x > 0.$$

Асимптотика  $I(-p_0, t)$  зависит от  $|x|/t$ . При фиксированном  $x$  и  $t \rightarrow \infty$  имеем  $A = -\sqrt{2p_0}$ ,  $x < 0$ . Для конечных значений  $\zeta = x + \sqrt{p_0/2t}$  решение при  $t \rightarrow \infty$  выражается формулой

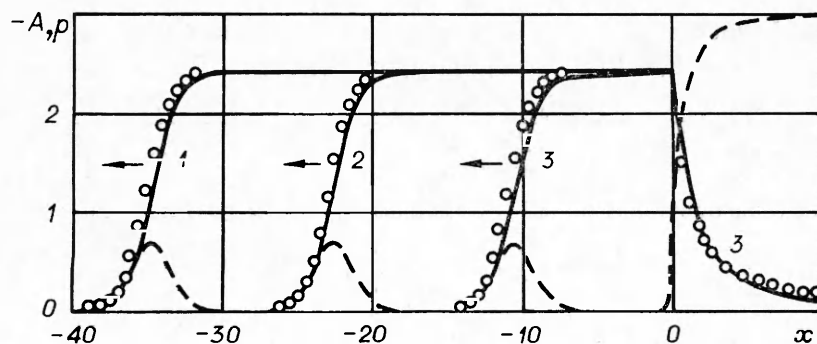
$$(3.4) \quad A = -\sqrt{\frac{p_0}{2}} \left\{ 1 + \operatorname{th} \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p_0}{2}} \left( x + \sqrt{\frac{p_0}{2} t} \right) + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{\sqrt{\pi p_0 t}} \right] \right\},$$

$$x < 0.$$

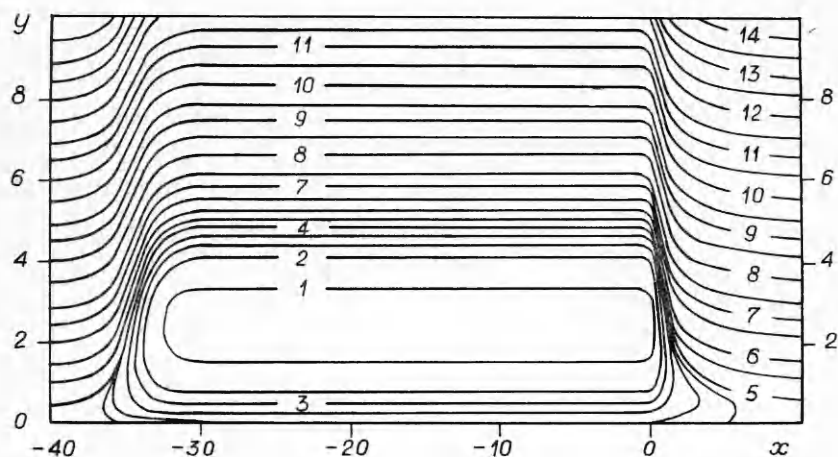
Как следует из (3.4), вверх по потоку распространяются волна отрыва и импульс давления с незатухающей амплитудой и фазовой скоростью  $D = -\sqrt{p_0/2} + O(t^{-1})$ .

Решение задачи о внезапном падении давления за точкой  $x = 0$  до  $p_0 < 0$  получается из приведенных выше результатов заменой  $A \rightarrow -A$ ,  $x \rightarrow -x$ ,  $t \rightarrow t$ ,  $p_0 \rightarrow |p_0|$ . В частности, понижение внешнего давления сопровождается распространением вниз по потоку волны с фазовой скоростью  $D = \sqrt{|p_0|/2}$ .

На рис. 5 сплошными линиями 1-3 показаны построенные численно распределения  $-A(t, x)$  для  $p_0 = 3$  при  $t = 30; 20; 10$ . Распределения полного давления  $p(x) = p_0 \operatorname{erf}(x/\sqrt{t}) - \partial A/\partial x$  для тех же времен изображены штриховыми линиями. В области фронта волны оно полностью определяется самоиндуцированной частью  $-\partial A/\partial x$ , вблизи  $x = 0$  давление складывается из внешнего и самоиндуцированного. Между ними находится область с нулевым давлением, которая со временем увеличивается в соответствии с движением фронта волны. Кружками показана функция  $-A(t, x)$ , вычисленная по асимптотическим формулам (3.3), (3.4).



Р и с. 5



Р и с. 6

По найденному  $A(t, x)$  можно построить двумерную картину течения. Для этого же варианта расчета при  $t = 30$  она изображена на рис. 6, где линии 1—14 отвечают значениям функций тока  $-2,5; -1,5; -1,0; 0; 0,1; 1,0; 3,0; 6,0; 10; 15; 21; 28; 30; 45$ .

Решения уравнения Бюргера позволяют сделать вывод, что падение ударной волны приводит к возникновению обширной отрывной зоны, вытягивающейся вверх по потоку. В рамках выбранной модели скорость перемещения переднего фронта этой зоны постоянна и определяется амплитудой внешнего воздействия. Что касается амплитуды такой волны отрыва, то она остается неизменной во времени и однозначно связана со скоростью распространения вверх по потоку. Другим воздействием, столь же эффективно порождающим волну отрыва в пограничном слое, является стационарный щелевой вдув газа.

В работах, посвященных численным расчетам течения в окрестности точки излома поверхности или падения внешнего скачка на основе вязких уравнений теории свободного взаимодействия [6—8], отмечаются ухудшение сходимости конечно-разностных схем либо возникновение колебательных режимов с ростом амплитуды возмущающего фактора [15, 16]. Как следует из вышеизложенного, при достаточно больших углах отклонения поверхности или интенсивностях падающей ударной волны, когда справедливо невязкое уравнение (2.1), стационарное решение данной задачи отсутствует.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Жук В. И., Рыжов О. С. О локально-невязких возмущениях в пограничном слое с самоиндуцированным давлением // ДАН СССР.— 1982.— Т. 263, № 1.
2. Burgers J. M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence // Advances in Appl. Mech.— N. Y.: Acad. Press, 1948.— V. 1. Рус. пер. Об одной математической модели, иллюстрирующей теорию турбулентности // Проблемы механики.— М.: ИЛ, 1955.
3. Benjamin T. B. Internal waves of permanent form in fluids of great depth // J. Fluid Mech.— 1967.— V. 29, pt 3.
4. Ono H. Algebraic solitary waves in stratified fluid // J. Phys. Soc. Japan.— 1975.— V. 39, N 4.
5. Smith F. T., Burggraf O. R. On the development of large-sized short-scaled disturbances in boundary layers // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.— 1985.— V. 399, N 1816.
6. Нейланд В. Я. Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений // Тр. ЦАГИ.— 1974.— Вып. 1529.
7. Stewartson K. Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies // Advances in Appl. Mech.— 1974.— V. 14.
8. Рубан А. И., Сычев В. В. Асимптотическая теория отрыва ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости // Усп. механики.— 1979.— Т. 2, вып. 4.
9. Smith F. T., Duck P. W. Separation of jets or thermal boundary layers from a wall // Quart. J. Mech. Appl. Math.— 1977.— V. 30, pt 2.

10. Рыжов О. С. Неустойчивость распространяющейся вдоль стенки струи вязкой жидкости // ПМТФ.— 1982.— № 2.
11. Нейланд В. Я. К асимптотической теории присоединения сверхзвукового потока // Тр. ЦАГИ.— 1975.— Вып. 1650.
12. Крапивский П. Л., Нейланд В. Я. Отрыв пограничного слоя от подвижной поверхности тела в сверхзвуковом потоке газа // Учен. зап. ЦАГИ.— 1982.— Т. 13, № 3.
13. Липатов И. И., Нейланд В. Я. К теории нестационарного отрыва и взаимодействия пограничного слоя со сверхзвуковым потоком газа // Учен. зап. ЦАГИ.— 1987.— Т. 18, № 1.
14. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи.— М.: Мир, 1987.
15. Rizzetta D. R., Burggraf O. R., Jenson R. Triple-deck solutions for viscous supersonic and hypersonic flow past corners // J. Fluid Mech.— 1978.— V. 89, pt 3.
16. Казаков В. А. Сильно неявный попеременно-треугольный метод для решения задач асимптотической теории пограничного слоя // ЖВММФ.— 1985.— Т. 25, № 9.

Поступила 16/XII 1987 г.

УДК 532,526.5

### ИЗМЕРЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНОСТИ В СЖИМАЕМЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ В ОКРЕСТНОСТИ ОТРЫВНЫХ ЗОН

А. А. Желтоводов, В. А. Лебига, В. Н. Яковлев

(Новосибирск)

Отличающиеся большим многообразием отрывные течения широко распространены в природе и практике [1]. Предсказание их свойств до настоящего времени относится к числу наиболее сложных задач механики жидкости и газа. Особые трудности возникают при анализе турбулентного отрыва, что обусловлено отсутствием строгой теоретической основы. Проводимые теоретические исследования в основном связаны с развитием моделей идеальной жидкости и газа, интегральных методов теории струй и следов, а также совершенствованием численных методов решения осредненных уравнений Навье — Стокса с привлечением полуэмпирических моделей турбулентности [2]. Развитие отмеченных направлений в значительной степени определяется информативностью экспериментальных исследований, результаты которых используются как для построения физических моделей отрывных течений, так и для обоснования замыкающих соотношений. В связи с этим существенным требованием, предъявляемым к современным экспериментам, является их комплексный характер [3].

Основные трудности, возникающие при экспериментальном изучении сжимаемых отрывных течений, связаны с измерениями характеристик турбулентности в пограничных слоях. Проведение таких исследований возможно на основе использования лазерно-доплеровских измерителей скорости или термоанемометрической аппаратуры. Наряду с известными достоинствами и недостатками каждого метода применение термоанемометрии привлекает возможностью измерения пульсаций как газодинамических, так и термодинамических параметров. Наличие в сверхзвуковом потоке высокочастотных пульсаций давления, плотности, температуры и скорости определяет соответствующие требования к термоанемометрической аппаратуре и методике измерений. Возможность изменения в широком диапазоне температуры проволочного датчика  $T_w$  при неизменном частотном диапазоне, необходимая для разделения пульсаций массового расхода  $\langle \rho u \rangle$  и температуры торможения  $\langle T_0 \rangle$ , определяет основное преимущество термоанемометра постоянного тока (ТПТ) по сравнению с термоанемометром постоянного сопротивления (ТПС) [4]. Важным достоинством является также возможность в ТПТ измерения собственных шумов прибора.

Для исследования характеристик турбулентности в условиях безотрывного и отрывного течения при числе Маха  $M = 2,95$  и Рейнольдса  $Re_1 = 28 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1}$  использовался разработанный в ИТПМ СО АН СССР термоанемометр постоянного тока ТПТ-3. Рабочий частотный диапазон прибора от 10 Гц до 200 кГц. Основные измерения выполнялись при давлении торможения потока  $p_0 = 3,4 \cdot 10^4 \text{ Па}$  и температуре торможения  $T_0 = 296(\pm 3) \text{ К}$  в условиях адиабатической поверхности модели. Чувствительным элементом датчиков, изготовленных по технологии [5], была вольфрамовая нить диаметром  $d = 6 \text{ мкм}$  и длиной  $l = 1,2-1,5 \text{ мм}$ . С целью уменьшения влияния тензoeffекта предварительно создавался прогиб нити, относительная величина которого составляла 0,2—0,25 [6].

Основы методики измерения характеристик турбулентности в сверхзвуковых потоках с помощью ТПТ изложены в [4]. В связи с определен-