

МЕДЛЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ГРАНУЛИРОВАННОГО СЛОЯ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Ю. А. Березин, Л. А. Сподарева

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Изучена форма свободной поверхности слоя гранулированного материала, движущегося по наклонной плоскости, на основе модели неньютоновской жидкости с нелинейной связью между тензором напряжений и скоростью сдвига течения. При малых, но конечных возвышениях свободной поверхности исходные уравнения сведены к квазилинейному уравнению Бюргерса. Для случая произвольных возвышений представлены результаты численного решения.

Гранулированные среды, состоящие из большого числа твердых частиц, широко представлены в природных явлениях и в практической деятельности людей: лавины, песчаные бури, грязевые сели, порошковая металлургия, химическая технология, хранение, транспортировка зерна. Поэтому исследование характера гранулированных течений имеет важное значение и для фундаментальной науки, и для практического применения. Считается общепринятым, что такие материалы можно достаточно хорошо моделировать с помощью понятий и методов механики сплошных сред. Обычно выделяются два различных или предельных режима течений в таких средах: *квазистатический*, соответствующий большим плотностям и малым скоростям сдвига, и *инерционный*, отвечающий меньшим плотностям и большим скоростям сдвига. В первом режиме все гранулы находятся в постоянном тесном контакте с ближайшими соседями, их движение определяется кулоновским трением. Во втором режиме между гранулами всегда в среднем есть зазоры, взаимодействие обусловлено неупругими соударениями. Описание инерционного режима основывается, как правило, на законах сохранения массы, импульса и иногда энергии хаотического движения гранул (см., например, [1]).

Тщательные и хорошо документированные эксперименты [2] показали, что в инерционных гранулированных сдвиговых течениях напряжение сдвига пропорционально квадрату скорости сдвига, в отличие от обычной вязкой (ньютоновской) жидкости, где эта связь линейна. Поэтому целесообразно рассматривать гранулированные материалы как неньютоновскую жидкость (среду) с нелинейной связью между тензором напряжений и скоростью сдвига течения.

Рассмотрим слой гранулированного материала со свободной поверхностью, движущийся по шероховатой плоскости. Изучение такого двумерного течения проведем в рамках модели неньютоновской жидкости. Направив ось x вдоль, а ось y поперек наклонной плоскости, запишем исходные уравнения в виде

$$\begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \alpha + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \\ \rho \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos \alpha + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Сделаем следующие предположения:

- 1) продольный масштаб L_0 значительно больше поперечного H_0 , т. е. $\varepsilon = H_0/L_0 \ll 1$;
- 2) поперечная скорость v существенно меньше продольной u , т. е. $v \ll u$, но $\partial v/\partial y \sim \partial u/\partial x$;
- 3) течение медленное, что справедливо для некоторых природных гранулированных течений, сползающих по наклонной плоскости, например лавин и ледников, и ускорением dv/dt можно пренебречь [3];
- 4) $\partial \sigma_{xx}/\partial x \ll \partial \tau_{xy}/\partial y$ в первом уравнении;
- 5) $\partial \tau_{yx}/\partial x, \partial \sigma_{yy}/\partial y \ll \partial p/\partial y, \rho g \cos \alpha$ во втором уравнении;
- 6) напряжение сдвига $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ пропорционально $|\partial u/\partial y|^{n-1} \partial u/\partial y$.

Степень $n = 2$ соответствует гранулированной среде в инерционном режиме, как в опытах [2], $n = 1/2$ — псевдопластической среде, а $n = 1$ — ньютоновской вязкой жидкости.

С учетом этих предположений система (1) примет вид

$$\rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial x} = g \sin \alpha + \nu_n \partial \left(\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{n-1} \frac{\partial u}{\partial y} \right) / \partial y, \quad \rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial y} = -g \cos \alpha, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Здесь ν_n — коэффициент кинематической вязкости, соответствующий индексу модели n .

Система (2) должна быть дополнена граничными условиями, которые зададим в виде

$$u = v = 0 \quad \text{на дне слоя} \quad (y = 0); \quad (3)$$

$$p = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad H_t + u H_x = v \quad \text{на свободной поверхности} \quad (y = H(x, t)). \quad (4)$$

Так как напряжение сдвига τ_{xy} пропорционально $(\partial u/\partial y)^n$, то равенство нулю этого напряжения сдвига на свободной поверхности эквивалентно условию $\partial u/\partial y = 0$ при $y = H(x, t)$.

Согласно второму уравнению системы (2), давление является гидростатическим: $p = \rho g(H - y) \cos \alpha$, откуда $p_x/\rho = g H_x \cos \alpha$. Подставляя последнее выражение в первое уравнение системы (2) и интегрируя с граничными условиями $\partial u/\partial y = 0$ при $y = H(x, t)$ и $u = 0$ при $y = 0$, получим профиль продольной скорости

$$u = n(n+1)^{-1} A^{1/n} B^{1/n} (H^{1+1/n} - (H-y)^{1+1/n}),$$

где $A = g \cos \alpha / \nu_n$; $B = \operatorname{tg} \alpha - H_x$. Для областей течения с $H_x > 0$ этот анализ при четных n справедлив, когда $H_x < \operatorname{tg} \alpha$. Вблизи нижнего основания слоя ($y = 0$) профиль продольной скорости является линейной функцией поперечной координаты: $u = A^{1/n} B^{1/n} H^{1/n} y$. Используя далее уравнение непрерывности с граничным условием $v = 0$ при $y = 0$, получим профиль поперечной скорости

$$v = (n+1)^{-1} A^{1/n} B^{1/n} \{ (B^{-1} H^{1+1/n} H_{xx} - (n+1) H^{1/n} H_x) y + n(H^{1+1/n} - (H-y)^{1+1/n}) H_x - n(2n+1)^{-1} B^{-1} (H^{2+1/n} - (H-y)^{2+1/n}) H_{xx} \}.$$

Теперь подстановка значений продольной и поперечной компонент скорости, вычисленных на свободной поверхности ($y = H(x, t)$), в кинематическое граничное условие дает искомое уравнение для формы свободной поверхности рассматриваемого гранулированного слоя:

$$H_t + A^{1/n} B^{1/n} H^{1+1/n} H_x = (2n+1)^{-1} A^{1/n} B^{1/n-1} H^{2+1/n} H_{xx}. \quad (5)$$

Перейдем к безразмерным переменным, для чего введем масштабы длины L_0 , толщины H_0 и времени $t_0 = (\nu_n/gH_0)^{1/n}$ (H_0 — невозмущенная толщина слоя). Тогда уравнение (5) можно записать в виде

$$H_t + \varepsilon (\cos \alpha)^{1/n} (\operatorname{tg} \alpha - \varepsilon H_x)^{1/n} H^{1+1/n} H_x = \varepsilon^2 (2n+1)^{-1} (\sin \alpha)^{1/n} \operatorname{ctg} \alpha H^{2+1/n} H_{xx}. \quad (6)$$

Изменение формы свободной поверхности происходит за счет нелинейного конвективного переноса и нелинейной диффузии.

В случае малых, но конечных возвышений свободной поверхности над невозмущенным уровнем $H = 1 + h$ ($h \ll 1$) уравнение (6) примет вид

$$h_t + \varepsilon(\sin \alpha)^{1/n}(1 + (n+1)n^{-1}h)h_x = \varepsilon^2(2n+1)^{-1}(\sin \alpha)^{1/n} \operatorname{ctg} \alpha h_{xx}.$$

Это уравнение можно записать в более простой форме, если перейти в систему координат, движущуюся с постоянной скоростью $c = \varepsilon(\sin \alpha)^{1/n}$, а именно

$$h_t + ah h_x = bh_{xx}, \quad a = \varepsilon(\sin \alpha)^{1/n}n^{-1}(n+1), \quad b = \varepsilon^2(2n+1)^{-1}(\sin \alpha)^{1/n} \operatorname{ctg} \alpha. \quad (7)$$

Уравнение (7) представляет собой хорошо известное квазилинейное уравнение Бюргерса, содержащее квадратичную нелинейность и вязкость с постоянным коэффициентом. При $b \rightarrow 0$ решение уравнения (7) демонстрирует увеличение крутизны фронта возмущения с образованием разрыва за конечный промежуток времени. Когда коэффициент вязкости не равен нулю, увеличение крутизны фронта компенсируется размазывающим влиянием диффузии, пропорциональной h_{xx} , что приводит к образованию ударной волны с постоянной шириной $\Delta \approx b/U$, где $U = (a/2)(h_{-\infty} + h_{\infty})$ — скорость волны.

Для анализа эволюции формы свободной поверхности было проведено численное решение уравнения (6) по явной разностной схеме с односторонними разностями для конвективного переноса (в целях устойчивости) и центральными разностями для диффузии. Схема

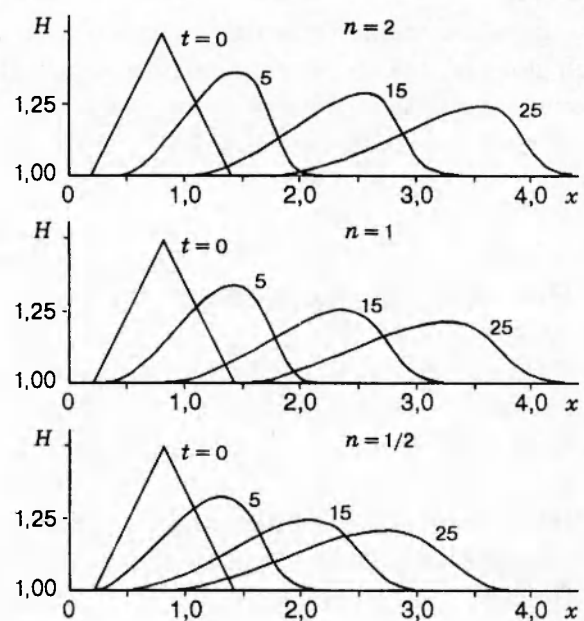
$$H_t + F(H)H_x = G(H)H_{xx},$$

$$H_i^{m+1} = H_i^m - \frac{\delta t}{\delta x} F_i^m (H_i^m - H_{i-1}^m) + \frac{\delta t}{\delta x^2} G_i^m (H_{i+1}^m - 2H_i^m + H_{i-1}^m)$$

является монотонной, имеет погрешность аппроксимации $O(\delta t, \delta x)$ и, следовательно, обладает численной диффузией. Но, поскольку задача одномерная, можно было брать настолько мелкие шаги по времени и координате, что численная диффузия оказывалась пренебрежимо малой.

Расчетная область составляла четыре единицы ($x = 0 \div 4$). Начальное возмущение свободной поверхности задавалось для простоты в виде равнобедренного треугольника высоты H_1 и с такой шириной, чтобы выполнялось указанное ранее условие $H_x < \operatorname{tg} \alpha$.

На рисунке представлены профили свободной поверхности гранулированного слоя ($n = 2$) в моменты времени $t = 5t_0, 15t_0, 25t_0$ после внезапного освобождения начального треугольника с высотой $H_1 = 0,5H_0$. Угол наклонной плоскости с линией горизонта равен 45° , отношение поперечного и продольного масштабов $\varepsilon = 0,1$. Видно, что с течением времени формируется волна сжатия с почти постоянной шириной фронта, движущаяся с почти постоянной скоростью. Скорость волны вычисляется по передвижению точки с максимальной крутизной профиля $|H_x|$.



t/t_0	H_{\max}	x_*	H_{\max}	x_*	H_{\max}	x_*
	$n = 2, U = 0,11$		$n = 1, U = 0,095$		$n = 1/2, U = 0,08$	
5	1,36	1,44	1,34	1,39	1,32	1,31
15	1,28	2,53	1,25	2,35	1,24	2,09
25	1,24	3,55	1,21	3,26	1,20	2,78

В таблице для $n = 2$ и скорости волны $U = 0,11$ приведены положение и значения максимального возвышения свободной поверхности в различные моменты времени. Ширина фронта волны, которая обусловлена конкуренцией процессов нелинейности и диффузии, прямо пропорциональна диффузии и обратно пропорциональна амплитуде волны. В безразмерных переменных она равна $\approx 0,44$, в размерных $\approx 4,4H_0$. Чтобы выяснить тенденцию изменения характера течения в зависимости от модели среды, т. е. от n , были проведены также расчеты, соответствующие вязкой ньютоновской жидкости ($n = 1$) и псевдопластической среде ($n = 1/2$) с теми же значениями шагов по времени δt и координате δx , аспектного отношения ε и амплитуды начального возвышения H_1 .

Профили свободной поверхности представлены на рисунке, а координаты и максимальные значения возвышений — в таблице для $n = 1, U = 0,095$ и $n = 1/2, U = 0,08$. В уравнении (6) коэффициент диффузии, т. е. коэффициент перед H_{xx} , пропорционален $(\sin \alpha)^{1/n}(2n + 1)^{-1}H^{2+1/n}$. Если сравнить значения этих коэффициентов для разных значений n , то оказывается, что при $n = 2$ диффузия минимальна, а при $n = 1/2$ максимальна. Поэтому при $t/t_0 \leq 25$ для $n = 2$ взаимовлияния нелинейности и диффузии успевают скомпенсировать друг друга и образуется профиль постоянной ширины, а для $n = 1/2$ ширина профиля не устанавливается, увеличиваясь от $\Delta = 0,44$ при $t = 15t_0$ до $\Delta = 0,58$ при $t = 25t_0$.

В заключение отметим, что, поскольку инерционными слагаемыми пренебрегалось, был изучен квазистационарный случай. Интересно рассмотреть устойчивость таких решений, например, по аналогии с тем, как это делалось для ньютоновской жидкости (см. [4, 5] и библиографию к ним).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hutter K., Rajagopal K. R. On flows of granular materials // Continuum Mech. Thermodyn. 1994. V. 6. P. 81–139.
2. Bagnold R. A. Experiments on a gravity free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear // Proc. Roy. Soc. London. 1954. V. A225. P. 49–63.
3. Hutter K. Time-dependent surface elevation of an ice slope // J. Glaciology. 1980. V. 25, N 92. P. 247–266.
4. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р. Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1983.
5. Berezin Yu. A. Modeling Nonlinear Wave Processes. Utrecht: VNU Science Press, 1987.

Поступила в редакцию 26/VII 1996 г.