

РЕКОНСТРУКТИВНАЯ ТОМОГРАФИЯ ПРИ СЛАБОЙ ОПТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ

Интегральная фотоупругость [1] занимается задачей определения напряженно-го состояния тела при помощи сквозного просвечивания. В этом смысле интегральную фотоупругость можно истолковать как оптическую томографию тензорного поля [2].

При слабой оптической анизотропии [2] в результате просвечивания вдоль луча можно измерить два интеграла от компонент тензора напряжений σ_{ij} . Возникает задача использования максимальной информации, содержащейся в этих лучевых интегралах, и нахождения напряженного состояния тела по ним. Частичный ответ на эти вопросы и соответствующая библиография содержится в [1—4].

С технической точки зрения наиболее удобно проводить просвечивание в параллельных плоскостях ($z = \text{const}$). Именно для таких измерений указывается способ определения σ_{zz} , а для линейно деформируемого тела выделяется класс напряженных состояний, позволяющих вычислить все компоненты тензора напряжений по $\sigma_{zz}(x, y, z)$.

1. В цилиндрическом теле со свободной боковой поверхностью введем ортогональную систему координат. В качестве оси z примем ось, проходящую через центр тяжести сечения S , а в качестве осей x и y — оси инерции сечения.

Компоненты тензора напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия

$$(1.1) \quad \sigma_{ij,i} = 0 \quad (i, j = x, y, z)$$

и граничным условиям на контуре Γ — свободной боковой поверхности

$$(1.2) \quad \sigma_{xi}n_x + \sigma_{yi}n_y = 0.$$

Запишем условие равновесия элемента $S(m, \theta)$ толщиной Δz в направлении оси z с помощью лучевого интеграла (см. рисунок):

$$(1.3) \quad H(m, \theta, z) = \int \sigma_{iz}m_i dl = - \int \sigma_{xz}dy - \sigma_{yz}dx.$$

Здесь m_i — компоненты единичного вектора, нормального к лучу l ; $m_x = \cos \theta$; $m_y = \sin \theta$; m — расстояние от начала координат до прямой l . Разность сил на верхней и нижней поверхностях элемента уравновешивается касательной силой на боковой плоскости ($z_0 \in [z, z + \Delta z]$)

$$\Delta z H(m, \theta, z) = \int_m^{m_1} \int [\sigma_{zz}(m', z + \Delta z) - \sigma_{zz}(m', z)] dl dm'.$$

Деля обе части на Δz и переходя к пределу при $\Delta z \rightarrow 0$, приводим условие равновесия к дифференциальной форме

$$H(m, \theta, z) = \int_m^{m_1} \int \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz}(m', l, z) dl dm'$$

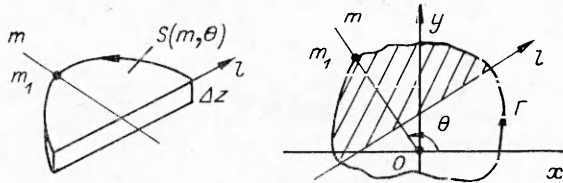
и, дифференцируя по m , — к форме преобразования Радона

$$\frac{\partial}{\partial m} H(m, \theta, z) = - \int \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz}(m, l, z) dl.$$

Таким образом, нахождение $\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz}$ из лучевого интеграла H сводится к стандартной процедуре обращения преобразования Радона [5].

Представим σ_{xz} , σ_{yz} как двумерные векторы на плоскости в виде суммы двумерного градиента и ротора с потенциалами F и G :

$$(1.4) \quad \sigma_{xz} = - \frac{\partial}{\partial x} F + \frac{\partial}{\partial y} G, \quad \sigma_{yz} = - \frac{\partial}{\partial y} F - \frac{\partial}{\partial x} G.$$



Введем координату t , направленную против часовой стрелки вдоль контура Γ . Граничные условия (1.2) относительно σ_{iz} с учетом (1.4) преобразуются так: $\frac{\partial}{\partial t} G - \frac{\partial}{\partial n} F = 0$ на

Γ . Подставим (1.4) в уравнение равновесия $\sigma_{iz,i} = 0$ и запишем F в виде суммы $F = F_+ + F_0$, так что

$$(1.5) \quad \Delta_+ F = \Delta_+ F_+ = \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz}, \quad \frac{\partial}{\partial n} F_+ = 0 \text{ на } \Gamma, \quad \Delta_+ F_0 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial n} F_0 = \frac{\partial}{\partial i} G \text{ на } \Gamma \left(\Delta_+ F = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) F \right).$$

Если нормальное вращение отсутствует ($G = 0$), то функция F_+ , следовательно, и σ_{xz} , σ_{yz} восстанавливаются из решения уравнения Пуассона (1.5), иначе решение F_+ определяет только частично потенциальную составляющую этих напряжений.

Интересно отметить, что значение H довольно просто выражается через F_+ . Действительно, представим интеграл H как контурный, замыкая контур отрезком дуги кривой Γ . Подстановка (1.4) в (1.3) с учетом вышесказанного и соотношений (1.5) приводит H к виду

$$H(m, \theta, z) = \int \frac{\partial}{\partial x} F_+ dy - \frac{\partial}{\partial y} F_+ dx = \int \frac{\partial}{\partial m} F_+ dl.$$

Последнее выражение также можно принять за разрешающее при построении рабочего алгоритма.

2. Займемся редукцией другого лучевого интеграла (A) [2]:

$A(m, \theta, z) = \int m_i m_j \sigma_{ij} - \sigma_{zz} dl$. Предварительно выведем формулу, связывающую $P(m, \theta)$ — проекцию главного вектора силы сечения $S(m, \theta)$ на направление m (см. рисунок), с интегралами A , H :

$$(2.1) \quad P(m, \theta) = \iint \sigma_{iz} m_i dx dy.$$

Для этого проинтегрируем по $S(m, \theta)$ уравнения равновесия, свернутые с вектором m_i :

$$(2.2) \quad \iint m_i \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{iz} dx dy = - \iint m_i \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{ix} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{iy} \right) dx dy = \\ = - \int m_i m_j \sigma_{ij} dl = \frac{\partial}{\partial z} P(m, \theta, z).$$

В (2.2) учитывалось, что боковая поверхность свободна от нагрузок.

В (2.1) интегрирование будем вести по перемещим l , m (m_1 — значение m на контуре Γ):

$$(2.3) \quad P(m, \theta, z) = \int \int_{S(m, \theta)} \sigma_{iz} m_i dl dm = \int_{m_1}^m H(m_0, \theta, z) dm_0.$$

Подстановкой (2.3) выражение (2.2) преобразуется:

$$(2.4) \quad \int \sigma_{zz} dl = - \int_{m_1}^m \frac{\partial}{\partial z} H(m_0, \theta, z) dm_0 - A(m, \theta, z).$$

Таким образом, согласно (2.4), восстановление σ_{zz} по A , H сводится к хорошо разработанной процедуре — обращению преобразования Радона [5]. Формула (2.2) и соответственно (2.4) имеют простой физический смысл — условие равновесия бесконечно тонкого элемента $S(m, \theta)$ (см. рисунок).

Из всего сказанного следует, что по результатам просвечивания в параллельных плоскостях $z = \text{const}$ определяются только компоненты σ_{zz} и производная по z . Ниже разбирается частный случай постановки задачи, позволяющей по этим значениям найти остальные компоненты.

3. Предположим дополнительно, что выполняется закон Гука и нормальное вращение отсутствует ($G = 0$). Следовательно, в объеме кроме σ_{zz} восстанавливаются σ_{xz} , σ_{yz} . Допустим, что эти компоненты известны на двух сечениях z_1 , z_2 . Тогда на поверхности отсекаемого объема полностью заданы нагрузки, и напряжения внутри объема находятся из решения второй основной краевой задачи теории упругости [6]. Уменьшая $\Delta z = (z_2 - z_1)$ (высоту отсекаемой части), сводим задачу к плоской, т. е. все напряжения определяем послойно. Это существенно облегчает вычисления. Задача формулируется в напряжениях, на боковой поверхности выполняются условия (1.2). Считаем известным σ_{zz} и соответственно F из решения уравнения Пуассона (1.5).

Для нахождения инварианта $\sigma = \Sigma \sigma_{ii}$ подставим (1.4) в два уравнения совместности

$$(1 + \nu)\Delta\sigma_{iz} + \sigma_{,iz} = 0, \quad i = x, y,$$

и преобразуем эти уравнения:

$$(3.1) \quad \frac{\partial^2}{\partial z \partial i} \left[\frac{\partial}{\partial z} F + \sigma_{zz} - \frac{1}{1 + \nu} \sigma \right] = 0, \quad i = x, y.$$

Здесь использовалось равенство, учитывающее (1.5):

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \Delta_+ F = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial z} F + \sigma_{zz} \right].$$

Значение инварианта σ как общее решение уравнений совместности (3.1) можно представить суммой частного и общего решений при $\sigma_{zz} = F = 0$. Частное решение получаем, приравняв выражения в скобках к нулю, а учитывая третье уравнение совместности $\Delta\sigma_{zz} + \sigma_{,zz} = 0$, приводим дополнительные члены общего решения к виду $I_0(x, y) + I_1 z$.

В случае плоской деформации $\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^+(x, y)$ зависит только от x, y , потенциал $F = 0$, выражение инварианта переходит в известное [6] и тем самым определяет $I_0(x, y)$, при этом $I_1 = 0$.

Окончательно решение

$$\sigma = (1 + \nu) \left[\sigma_{zz} - \sigma_{zz}^+ + \frac{\partial F}{\partial z} \right] + \frac{1}{\nu} \left[(1 + \nu) \sigma_{zz}^+ - (a_0 + a_1 x + a_2 y) \right]$$

выражается через F — значение, обращающееся в нуль при $\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^+$; a_0, a_1, a_2 — постоянные, задающие однородную деформацию по z и «чистый» изгиб.

Компоненты σ_{xx}, σ_{yy} находим из двух уравнений равновесия (1.1) при $j = x, y$. Подставляя в них $\sigma_{xx} = \sigma - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}$ и исключая σ_{xy} , получим уравнение относительно σ_{yy} :

$$\Delta_+ \sigma_{yy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sigma - \sigma_{zz} - \frac{\partial F}{\partial z} \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right).$$

Граничные условия (1.2) для компоненты σ_{yy} такой заменой приводятся к уравнению $\sigma_{yy} - (\sigma - \sigma_{zz}) n_x^2$.

Решение уравнений (1.1) относительно σ_{xy} можно представить криволинейным интегралом

$$(3.2) \quad \sigma_{xy} = - \int \frac{\partial}{\partial x} \left[\sigma_{xx} - \frac{\partial F}{\partial z} \right] dy + \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma_{yy} - \frac{\partial F}{\partial z} \right] dx + \sigma_{xy}^0.$$

Здесь σ_{xy}^0 выбирается на контуре и удовлетворяет граничным условиям (1.4). Выбираем за начальную точку интегрирования в (3.2) точку на контуре Γ , где $n_y = 0$, так, чтобы $\sigma_{xy}^0 = 0$.

Из построения видно, что напряжение в плоскости фактически задается значением $\sigma_{zz}(x, y)$ в ней и двумя первыми производными по z от этой функции.

Первая производная по z от σ_{zz} определяет σ_{zx} , σ_{zy} , а комбинация σ_{zz} и ее второй производной по z — остальные компоненты напряжения. На данные две функции накладывается ограничение: на контуре Γ интеграл (3.2) должен обращаться в нуль. Такое условие является следствием предположения о том, что напряженное состояние не содержит нормального вращения ($G = 0$) и может быть использовано в конкретном алгоритме реконструкции для уменьшения ошибок исходных измерений.

Задачи в такой постановке до сих пор решались только для осесимметричного напряженного состояния [4, 7]. Напряженное состояние, не содержащее нормального вращения, существенно шире и содержит осесимметричное состояние как частный случай.

В заключение автор считает своей приятной обязанностью выразить благодарность Х. К. Абену за предложенную тему, а также постоянное доброжелательное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абен Х. К. Интегральная фотоупругость. — Таллинн: Валгус, 1975.
2. Абен Х. К., Иднурм С. И., Иозенсон Ю. И., Келл К.-Ю. Э. Случай слабой оптической анизотропии в оптической томографии тензорного поля // Оптическая томография. — Таллинн: АН ЭССР, 1988.
3. Шарафутдинов В. А. Формула обращения лучевого преобразования симметричных тензорных полей // Там же.
4. Doyle I. F., Danyluk H. T. Integrated photoelasticity for axisymmetric problems // Exper. Mech. — 1978. — V. 18, N 6.
5. Censor V. Finite series-expansion reconstruction methods // Proc. IEEE. — 1983. — V. 71, N 3.
6. Новацкий В. Теория упругости. — М.: Мир, 1975.
7. Чумак А. В. К решению осесимметричных задач теории упругости // Применение новейших математических методов и вычислительной техники в решении инженерных задач. — 1975. — Т. 12, вып. 7.

г. Таллинн

Поступила 2/VIII 1989 г.

УДК 539.375.5

С. П. Киселев

О ДИНАМИЧЕСКОМ ПИКЕ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ ВЫСОКОСКОРОСТНОМ РАЗРУШЕНИИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Дано объяснение динамическому пику пластичности [1]. Показано, что этот эффект связан с резким ухудшением пластических свойств металла при скорости деформации $\dot{\epsilon} \sim 10^5 \text{ с}^{-1}$.

В [1—4] исследовалось разрушение цилиндрических металлических оболочек, расширяющихся под действием продуктов детонации, при высоких скоростях деформации $\dot{\epsilon} > 10^4 \text{ с}^{-1}$. При этом было обнаружено, что высокоскоростное разрушение обладает рядом особенностей, к которым относится наличие масштабного эффекта и динамического пика пластичности.

Объяснение этих особенностей будем искать в рамках описания разрушения как двухстадийного процесса [2]. Первая стадия состоит в накоплении повреждений при пластическом течении. На второй стадии путем распространения трещин происходит разделение оболочки на части за счет запасенной упругой энергии.

Разделим процесс накопления повреждений на два этапа. Предположим, что на первом этапе происходит накопление точечных дефектов,