

Интегрируя (28), получим

$$\Phi_{y < h} - \Phi_0 = \frac{Q}{\pi h H} \sum_i \left[ i - \frac{\rho_0}{h \mu_i} \operatorname{sh} \frac{\mu_i (1-h)}{\rho_0} \operatorname{sh} \frac{\mu_i h}{\rho_0} \operatorname{csch} \frac{\mu_i}{\rho_0} \right] \frac{J_0^2(\omega \mu_i)}{\mu_i^2 J_1^2(\mu_i)} \quad (31)$$

Формулы (28), (29), (31) пригодны для расчета притока жидкости к несовершенному по величине вскрытия кольцу радиусом  $R < R_0$ , в частности и при  $R = r_c$ , где  $r_c$  — радиус скважины. Однако при  $r_c \approx 0.1$  м и  $R_0 \approx 100$  м,  $\omega \approx 0.001$  и с достаточной степенью точности можно будет принять  $J_0(\omega \mu_k) = 1$  для достаточно больших значений  $k$ , до которых ведется вычисление ряда и принять, что потенциал на стенке скважины  $\Phi_c^\circ$  будет (из формулы (21))

$$\Phi_c - \Phi_0 = \mp \frac{Q}{2\pi h H} \left\{ \ln \rho_c + 2 \sum_i \frac{\operatorname{ch}(\mu_i y / \rho_0) \operatorname{sh}[\mu_i (1-h) / \rho_0]}{\mu_i^2 \operatorname{sh}(\mu_i / \rho_0) J_1^2(\mu_i)} \right\} \quad (32)$$

или после усреднения

$$\Phi_c^\circ - \Phi_0 = + \frac{Q}{2\pi h H} [\ln \rho_c + \psi], \quad \psi(\rho_0, h) = \frac{2\rho_0}{h} \sum_i \frac{\operatorname{sh}(\mu_i h / \rho_0) \operatorname{sh}[\mu_i (1-h) / \rho_0]}{\mu_i^3 \operatorname{sh}(\mu_i / \rho_0) J_1^2(\mu_i)} \quad (33)$$

Графики функции  $\psi(\rho_0, h)$  показаны на фиг. 2.

Автор признателен И. А. Чарному за совместное обсуждение статьи.

Поступила 30 X 1961

#### ЛИТЕРАТУРА

1. M u s k a t M. Potential Distributions in Large Cylindrical Disks With Partially Penetrating Electrodes. Physics, may 1932, vol. 2
2. М а с к е т М. Течение однородных жидкостей в пористой среде (пер. с англ.). Гостехиздат, 1949.
3. П о л у б а р и н о в а - К о ч и н а П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
4. С н е д д о н К. Преобразования Фурье. ИИЛ, 1955.
5. И в а н е н к о Д. и С о к о л о в А. Классическая теория поля. М., 1951.
6. Ч а р н ы й И. А. Основы подземной гидравлики. М., Гостехиздат, 1956.
7. Я н к е и Э м д е. Таблицы функций. Физматгиз, 1959.
8. Т р а н т е р К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике (пер. с англ.). М., Гостехиздат, 1956.

#### РАСЧЕТ НА ЭЛЕКТРОННОЙ СЧЕТНОЙ МАШИНЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ КОНТУРА НЕФТЕНОСНОСТИ, БЛИЗКОГО К ОКРУЖНОСТИ

**В. В. Скворцов**

(Казань)

Пусть некоторое сложное функциональное уравнение заменяется «приближенным» и в аналитическом виде находится его решение. Пусть, далее, оценка погрешности такой замены оказывается затруднительной, а решение приближенного уравнения обладает физически неочевидными свойствами. Тогда для проверки поведения решения исходного уравнения можно решить его численно на счетной машине и сравнить свойства полученных таким образом двух приближенных решений.

Ниже такой анализ проводится на примере решения одной задачи из теории фильтрации. Дается гидродинамическое истолкование полученных результатов.

Прослеживание за перемещением к одиночной скважине границы раздела нефти и воды — контура нефтеносности  $\Gamma$  — сводится [1] к решению задачи Коши для интегрально-дифференциального уравнения

$$f(\theta, t) f_t(\theta, t) - \frac{\lambda}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(v, t) f_t(v, t) \times \left( \lambda = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right) \\ \times \frac{f^2(\theta, t) - f(\theta, t) f(v, t) \cos(\theta - v) - f_0(\theta, t) f(v, t) \sin(\theta - v)}{f^2(\theta, t) - 2f(\theta, t) f(v, t) \cos(\theta - v) + f^2(v, t)} dv = \frac{\lambda - 1}{2} \quad (1)$$

Здесь  $f(\theta, t)$  — расстояние от скважины до точки контура  $\Gamma$ , измеренное в момент  $t$  в направлении  $\theta$ , а  $f_t$  и  $f_0$  — производные по аргументам, указанным индексами:

$\mu_1$  и  $\mu_2$  — вязкости воды и нефти;  $\nu$  — переменная интегрирования. При выводе уравнения (1) предполагалось, что нефтяной пласт однороден и простирается неограниченно, течение в нем плоское, подчиняется линейному закону фильтрации, жидкости несжимаемы, на скважине задан постоянный дебит.

Численное решение поставленной задачи выполняется следующим образом [1,2,3]. Для каждого значения  $t$  решается интегральное уравнение, из которого находится  $f_t$ . Затем путем решения дифференциального уравнения любым шаговым методом находится значение  $f$  для следующего момента времени. При расчетах на электронной цифровой вычислительной машине «Стрела» решение интегрального уравнения выполнялось методом итераций, причем за нулевое приближение брались значения  $f_t$  для предыдущего значения  $t$  (явный метод). Однако этот метод нельзя применить в момент  $t = 0$ . В этом случае систему линейных уравнений, к которой сводится интегральное уравнение, приходится решать методом Гаусса (неявный метод). В случае, когда контур  $\Gamma$  близок к окружности, в центре которой находится скважина, можно получить простую приближенную формулу для подсчета  $f_t(\theta, 0)$ .

Пусть на  $f$  налагается начальное условие

$$f(\theta, 0) = R[1 - \gamma F(\theta)] \quad (2)$$

Здесь

$$F(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad |F(\theta)| \leq 1, \quad \gamma \leq 1 \quad (3)$$

Введем обозначение  $v(\theta) = 2f(\theta, 0) f_t(\theta, 0)$ .

Подставим выражение (2) в уравнение (1). Затем разложим ядро уравнения (1) в ряд по  $\gamma$  и оборвем этот ряд на первой степени  $\gamma$ . Решая полученное интегральное уравнение методом последовательных приближений можно найти, что в первом приближении

$$v(\theta) = \left[ -1 + \gamma \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \cos n\theta + b_n n \sin n\theta \right] \quad (4)$$

Если существует производная от ряда, сопряженного с рядом (3), то выражение (4) с учетом (2) дает приближенное выражение для  $f_t(\theta, 0)$ , точность которого возрастает с уменьшением  $\gamma$ .

Пусть при  $\theta = 0$  значение  $f$  экстремально, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n n = 0$$

Если, кроме того,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^2 = 0$$

то в точке  $\theta = 0$  будет наблюдаться также экстремум величины  $f_t$ . Характер этого экстремума будет зависеть от знака суммы

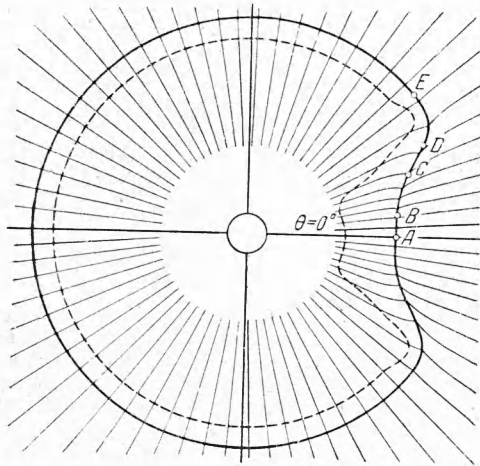
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (n^2 - \lambda n^3)$$

существование которой предполагается.

Отсюда следует, что при  $\lambda \neq 0$  в зависимости от формы начального контура  $\Gamma$  в точке контура, наиболее удаленной от скважины, скорость  $f_t$  может иметь максимум, а в точке, наиболее близкой к скважине, — минимум. Этот не вполне очевидный факт может быть истолкован физически путем рассмотрения излома линий тока на контуре  $\Gamma$ .

На фиг. 1 схематически изображена картина трубок тока, сходящихся к центральной скважине, для случая  $\lambda < 0$ , когда начальный контур имеет местное (в районе  $-40 < \theta < 40^\circ$ ) отклонение от окружности. Из этой фигуры замечаем следующее.

- 1) Трубки тока сужаются по мере приближения к скважине.
- 2) Линии тока сгущаются на участке  $AC$ , где контур ближе подходит к скважине и тем самым снижает гидродинамическое сопротивление в этом районе.



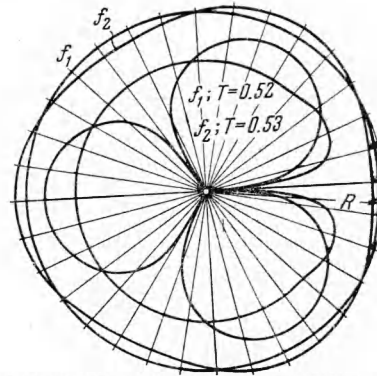
Фиг. 1

3) Касательные (по отношению к контуру), составляющие скорости воды и нефти, а также их разность возрастают на участках, где контур наиболее сильно отличается от дуги окружности с центром в скважине (участок  $CD$  на фиг. 1). Вследствие этого здесь же наблюдаются наибольшее искривление и излом линий тока. Но тогда наибольшее местное сгущение линий тока придется на участок  $BC$  контура, а разрежение — на участок  $DE$ .

Первые два фактора увеличивают радиальную составляющую скорости фильтрации  $f_t$  в направлении языкообразования ( $AC$ ), так как  $f_t$  обратно пропорциональна поперечному сечению трубки тока в районе контура. Однако в зависимости от  $\lambda$  и формы контура вследствие третьего фактора максимальное и минимальное значения  $|f_t|$  из точек  $\theta = 0$  и  $180^\circ$  могут сместиться, соответственно в районы  $BC$  и  $DE$ . На фиг. 1 пунктиром отмечен возможный годограф векторов  $f_t$ .

Заметим, что из сказанного не следует, что вода в скважину может прорваться по направлению  $\theta \neq 0^\circ$ , так как рассматривается распределение скоростей лишь в момент  $t = 0$ .

На машине «Стрела» была выполнена серия расчетов перемещения контура при нескольких различных  $F, \lambda < \gamma < 0.1$ . Величины  $v(\theta)$ , подсчитанные по формуле (4) и из системы линейных уравнений, отличались не более чем на 1.6%. На фиг. 2 для примера показаны начальные и конечные (в момент прорыва воды в скважину) положения контура в двух случаях. Здесь



Фиг. 2

$$f_1 = R_1(1 - \gamma_1 F_1), \quad f_2 = R_2(1 - \gamma_2 F_2)$$

$$\gamma_1 = 0.0297, \quad \gamma_2 = 0.0625, \quad F_2 = \cos 3\theta, \quad \lambda = -1$$

$$F_1(\theta) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{4\theta}{\pi}\right)^2 - 8\left(\frac{4\theta}{\pi}\right)^3 - 3\left(\frac{4\theta}{\pi}\right)^4 & \text{при } -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq 0 \\ 1 - 6\left(\frac{4\theta}{\pi}\right)^2 + 8\left(\frac{4\theta}{\pi}\right)^3 - 3\left(\frac{4\theta}{\pi}\right)^4 & \text{при } 0 < \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{при } \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{7}{4}\pi \end{cases}$$

В последнем случае контур напоминает по внешнему виду изображенный на фиг. 1, при этом

$$v_1(\theta) = -1 + \gamma\lambda \frac{3072}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \left( 2 + \cos n \frac{\pi}{4} - \frac{12}{n\pi} \sin n \frac{\pi}{4} \right) \cos n\theta$$

с быстросходящимся рядом в правой части.

Форма контура, определяемая функцией  $F_1$ , такова, что максимальная скорость в момент  $t = 0$  достигается в точке  $\theta = 0^\circ$ , где контур ближе всего подходит к скважине. Однако минимальная скорость достигается в точках  $\theta \approx \pm 33^\circ$ , т. е. не там, где контур наиболее удален от скважины (фиг. 2). Расчет на машине явным и неявным методами показал, что при любых  $t$  величина  $|f_t|$  достигает относительного максимума при  $\theta = 0^\circ$  и  $180^\circ$ , а минимума при  $\theta \approx \pm 33^\circ$ . Эти результаты вполне согласуются с приведенными выше выводами. Для случая, когда контур задан в виде  $f_2$ , прорыв воды, как и следовало ожидать, наступает одновременно по трем направлениям. Относительное время прорыва воды в скважину  $T$  в обоих рассмотренных случаях почти одно и то же, что объясняется близостью формы начальных контуров в районе  $\theta = 0^\circ$ . Относительное время  $T$  выбрано так, что при  $\lambda = 0$  оно равно единице.

Лучи, по которым выполнялось численное интегрирование уравнения (1), отмечены на фиг. 3.

Поступила 22 XII 1961

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Д а н и л о в В. Л. Интегриродифференциальные уравнения движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Изв. Казан. филиала АН СССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1957, вып. 11, стр. 99—134.
2. Д а н и л о в В. Л., С к в о р ц о в В. В. Решение одной задачи о стягивании контура нефтеносности с учетом различия вязкостей нефти и воды. Изв. Казан. филиала АН СССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1959, вып. 13, стр. 37—48.