

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ
ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

А. А. Дородницын

(Москва)

В теории ламинарного пограничного слоя получили распространение методы решения, которые можно назвать «грубо приближенными», так как они позволяют найти решение, в какой-то мере близкое к точному (правильнее было бы сказать, «похожее» на точное), но по существу не содержат в себе алгоритма, который позволял бы с любой точностью приблизиться к истинному решению.

Сюда относятся все методы, основанные на использовании интегрального соотношения Кармана. Среди «точных» методов можно отметить лишь методы разложения в ряды, однако они не нашли практического применения вследствие очень медленной сходимости (если она вообще имеет место) и сложности вычисления членов ряда достаточно высокого номера. Вследствие этого метод разложения в ряды позволяет практически найти решение лишь в малой окрестности начала пограничного слоя (передней кромки).

Быстродействующие электронные вычислительные машины позволяют «не бояться» громоздкости вычислений и поэтому возникает вполне реальная задача разработки такого метода расчета пограничного слоя, который позволял бы с любой степенью точности находить решение уравнений пограничного слоя для произвольно заданного конкретного случая, используя стандартную программу на быстродействующей вычислительной машине.

Ниже предлагается такой метод расчета. Для наглядности он излагается для случая несжимаемой жидкости. Для сжимаемого газа общий подход остается таким же, но формулы становятся, разумеется, более сложными.

§ 1. Преобразование уравнений ламинарного пограничного слоя для несжимаемой жидкости. Исходную систему уравнений пограничного слоя

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = UU' + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$u = v = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad u = U \quad \text{при } y = \infty$$

сначала преобразуем к «стандартным» граничным условиям и к «стандартному» типу особенностей в начале пограничного слоя.

Для этого введем новые искомые функции и новые независимые переменные

$$\bar{u} = \frac{u}{U}, \quad \bar{v} = \frac{v}{U\sqrt{\nu}}, \quad \xi = \int_0^x U dx, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \int_0^y U dy = \frac{Uy}{\sqrt{\nu}} \quad (1.2)$$

Тогда элементарные преобразования системы (1.1) приводят к следующим уравнениям

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \left(\bar{v} + \frac{\dot{U}}{U} \eta \bar{u} \right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} = \frac{\dot{U}}{U} (1 - \bar{u}^2) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2}, \quad \left(\dot{U} = \frac{dU}{d\xi} = \frac{U'}{U} \right) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\bar{v} + \frac{\dot{U}}{U} \eta \bar{u} \right) = 0 \quad (1.4)$$

Вводя обозначение

$$w = \bar{v} + \frac{\dot{U}}{U} \eta \bar{u} \quad (1.5)$$

Запишем уравнения (1.3), (1.4) в более простом виде

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + w \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} = \frac{\dot{U}}{U} (1 - \bar{u}^2) + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0 \quad (1.6)$$

Граничные условия примут «стандартизованный» вид

$$\bar{u} = w = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \quad \bar{u} = 1 \quad \text{при } \eta = \infty \quad (1.7)$$

Рассмотрим теперь, как ведут себя решения в начале пограничного слоя. Известно, что когда разложение U начинается с cx^m , то разложение функции \bar{u} в ряд начинается с члена

$$\bar{u} = f_0(yx^{1/2(m-1)}) + \dots$$

Отсюда, переходя к координатам ξ и η , будем иметь

$$\xi \sim \frac{c}{m+1} x^{m+1}, \quad \eta \sim \frac{c}{\sqrt{v}} x^m y$$

то есть

$$x \sim \left(\frac{m+1}{c}\right)^{\frac{1}{m+1}} \xi^{\frac{1}{m+1}}, \quad y \sim \frac{\sqrt{v}}{c} \eta x^{-m} \sim \text{const } \eta \xi^{-\frac{m}{m+1}}, \quad yx^{\frac{m-1}{2}} \sim \text{const } \frac{\eta}{\sqrt{\xi}}$$

Следовательно,

$$\bar{u} \sim f_0\left(\text{const } \frac{\eta}{\sqrt{\xi}}\right) = \varphi_0\left(\frac{\eta}{\sqrt{\xi}}\right)$$

при любых показателях степени m . В этом смысле «стандартизованной» называется особенность в начале пограничного слоя.

Для всех точных решений типа $U = cx^m$ решение системы (1.6) всегда найдется подстановкой

$$\bar{u} = \varphi\left(\frac{\eta}{\sqrt{2\xi}}\right) \quad (1.8)$$

при этом для φ получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' + \frac{2m}{1+m}(1 - \varphi'^2) = 0, \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'(\infty) = 1 \quad (1.9)$$

Заметим, что для точных решений напряжение трения на стенке (τ_0) выражается формулой

$$\tau_0 = \rho \sqrt{v} U^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = \rho U^2 \sqrt{v} \frac{\varphi''(0)}{\sqrt{2\xi}} \quad (1.10)$$

В дальнейшем, для простоты письма, черту над u опускаем, т. е. под u будем понимать безразмерную скорость.

§ 2. Интегральные соотношения. Аналогом интегрального соотношения Кармана для системы (1.6) будет следующее

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^\infty u(1-u) d\eta + \frac{\dot{U}}{U} \int_0^\infty (1-u^2) d\eta = \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} \quad (2.1)$$

оно получится, если из второго уравнения (1.6), умноженного на $(1-u)$, вычесть первое уравнение (1.6) и после этого проинтегрировать полученную разность по η от 0 до ∞ .

Получим теперь для системы (1.6) интегральные соотношения общего вида, аналогично тому, как это обычно делают для непреобразованной системы (1.1). Умножим второе уравнение (1.6) на произвольную функцию $f(u)$, такую только, чтобы она достаточно быстро стремилась к нулю при $\eta \rightarrow \infty$ (например, $f(u) = 1-u$), а первое уравнение (1.6) на $f'(u)$ и сложим их, тогда будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial \xi} u f(u) + \frac{\partial}{\partial \eta} w f(u) = \frac{\dot{U}}{U} f'(u) (1-u^2) + f'(u) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \quad (2.2)$$

Проинтегрировав это уравнение по η , получим (2.3)

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^{\infty} u f(u) d\eta = \frac{\dot{U}}{U} \int_0^{\infty} (1 - u^2) f'(u) d\eta - f'(0) \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} - \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 f''(u) d\eta$$

Введем обозначения

$$\theta = \frac{1}{\partial u / \partial \eta}, \quad \theta_0 = \left(\frac{1}{\partial u / \partial \eta}\right)_{\eta=0} \quad (2.4)$$

Тогда интегральное соотношение (2.3) можно записать в виде

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^1 \theta u f(u) du = \frac{\dot{U}}{U} \int_0^1 \theta (1 - u^2) f'(u) du - \frac{f'(0)}{\theta_0} - \int_0^1 \frac{f''(u)}{\theta} du \quad (2.5)$$

В частности, уравнение (2.1), для которого $f(u) = 1 - u$, примет вид

$$\frac{d}{d\xi} \int_0^1 \theta u (1 - u) du + \frac{\dot{U}}{U} \int_0^1 \theta (1 - u^2) du = \frac{1}{\theta_0} \quad (2.6)$$

§ 3. Численный метод решения. Изложим идею метода в применении к системе достаточно общего вида. Пусть задана система уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x} P_i(x, y; u_1, \dots, u_n) + \frac{\partial}{\partial y} Q_i(x, y; u_1, \dots, u_n) = F_i(x, y; u_1, \dots, u_n) \quad (3.1)$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

относительно неизвестных функций u_1, \dots, u_n , решение которой необходимо найти в прямоугольной области $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ (при этом a может обращаться в $-\infty$, а b — в $+\infty$) при заданных граничных условиях. Относительно граничных условий мы здесь лишь потребуем, чтобы общее число условий на сторонах $y = c$ и $y = d$ прямоугольника было равно n (то есть числу искомых функций).

Умножая уравнение (3.1) на некоторую функцию $f(y)$, получим интегральные соотношения, которые и будут являться исходными соотношениями предлагаемого метода

$$\frac{d}{dx} \int_c^d P_i f(y) dy + Q_{i,d} f(d) - Q_{i,c} f(c) - \int_c^d Q_i f'(y) dy = \int_c^d F_i f(y) dy \quad (3.2)$$

($Q_{i,d} = Q_i$ при $y = d$ и аналогично $Q_{i,c}$).

Заметим, что функция $f(y)$ может иметь конечное число разрывов первого рода, в этом случае в (3.2) следует заменить

$$\int_c^d Q_i f'(y) dy \quad \text{на} \quad \int_c^d Q_i df(y)$$

Отметим, что соотношение (3.2) легко обобщается на случай, когда нижняя и верхняя границы области криволинейны, например, если верхняя граница криволинейна $y = \delta(x)$, будем иметь (3.3)

$$\frac{d}{dx} \int_c^{\delta} P_i f(y) dy - \delta' f(\delta) P_{i,\delta} + f(\delta) Q_{i,\delta} - f(c) Q_{i,c} - \int_c^{\delta} Q_i f'(y) dy = \int_c^{\delta} F_i f(y) dy$$

Выберем теперь систему групп функций $f(y)$

$$\{[f_{1,1}(y)], [f_{2,1}(y), f_{2,2}(y)], \dots, [f_{k,1}(y), f_{k,2}(y), \dots, f_{k,k}(y)], \dots\} \quad (3.4)$$

такую, что в k -ой группе содержится k линейно-независимых функций (функции из различных групп могут совпадать).

Далее, в k -ом приближении, разобьем всю область на k полос и представим функции P_i, Q_i, F_i с помощью некоторого интерполяционного выражения через их значения на границах полос $y = y_v$ ($v = 0, 1, 2, \dots, k$)

$$P_i[x, y; u_1(x, y), \dots, u_n(x, y)] \approx \sum_{v=0}^{v=k} P_{i,v} \Psi_v(y)$$

$$P_{i,v} = P_i[x, y_v; u_{1,v}, \dots, u_{n,v}], \quad u_{\alpha,v} = u_\alpha(x, y_v) \quad (3.5)$$

Здесь $\Psi_v(y)$ — интерполяционный многочлен, конкретный вид которого зависит от выбора интерполяционных формул (разумеется, он может содержать не только степени y , но и любые трансцендентные функции).

Если теперь составить интегральные соотношения (3.2) для каждой функции $f_{k,m}$ из k -ой группы и подставить вместо функций P_i, Q_i, F_i их интерполяционные выражения (3.5), то получим систему kn обыкновенных дифференциальных уравнений для $n(k+1)$ неизвестных функций $u_{\alpha,v}$, причем n граничных условий на границах $y = y_0 = c$ и $y = y_k = d$ замыкают эту систему.

В случае криволинейной границы $y = \delta(x)$, если сама граница неизвестна, должно быть $(n+1)$ граничное условие.

Приведем некоторые частные формы изложенного здесь метода.

Взяв δ -функции Дирака в качестве функций $f_{k,m}$

$$f_{k,m}(y) = \delta(y - y_m)$$

получим известный «метод прямых», в котором производные по y заменены конечно-разностным выражением, основанным на выбранных интерполяционных формулах (3.5). Взяв для $f_{k,m}$ «ступенчатые функции»

$$f_{k,m}(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y < y_{m-1} \\ 1 & \text{при } y_{m-1} < y < y_m \\ 0 & \text{при } y > y_m \end{cases}$$

получим обычный метод интегральных соотношений.

Сравнивая с этой точки зрения метод прямых и метод интегральных соотношений, можно сказать, что в методе интегральных соотношений интерполяционными выражениями представляются более «сглаженные» функционалы исходных функций P_i, Q_i, F_i , чем в методе прямых.

Когда речь идет о небольшом номере приближения, чему соответствует небольшое число узлов интерполяции для представления величины, то «гладкость» представляемой величины может играть весьма существенную роль для точности приближения. Этим, по-видимому, объясняется то, что применение метода интегральных соотношений к ряду задач газовой динамики в работах П. И. Чушкина [1, 2], О. М. Белоцерковского [3, 4] и др. давало нередко неожиданно высокую точность уже при очень малом (2—3) числе полос (то есть во 2-м—3-м приближении, по нашей терминологии).

В изложенном «обобщенном» методе интегральных соотношений получаем свободу в выборе степени сглаживания функций, поэтому можно ожидать, что «удачный» выбор функций $f_{k,m}$ позволит получать достаточную точность при небольшом номере приближения, а для практических расчетов это как раз весьма важно, так как повышение номера приближения, особенно для краевых задач, приводит к весьма значительному увеличению трудоемкости расчетов.

В этом отношении подходы «математика-теоретика» и «математика-практика» к приближенным методам существенно различны. Если математик-теоретик интересуется законом стремления к нулю погрешности метода при неограниченном возрастании номера приближения, то для практика интерес представляет точность при относительно малом номере приближения.

Разумеется, нельзя дать рецепта, как выбирать систему функций, чтобы она была «удачной». «Удачный» выбор зависит во многом от того, насколько мы представляем заранее характер поведения искомых функций; может оказаться, что при разработке метода решения определенного класса задач будет полезно проверить различные варианты метода с тем, чтобы при составлении стандартных программ остановиться на лучшем из них.

§ 4. Применение «обобщенного» метода интегральных соотношений к решению задач ламинарного пограничного слоя. В § 2 было введено обобщенное интегральное соотношение (2.5) для уравнений ламинарного пограничного слоя. Остается теперь лишь выбрать конкретные интерполяционные формулы и конкретную систему функций $f_{k,m}$. Остановимся здесь на одном из возможных вариантов метода. Отметим, что в любом варианте должны учитываться особенности искомой функции θ , именно $\theta \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow 1$. При этом для пограничного слоя при внешнем обтекании известно, что

$$\theta = o\left(\frac{1}{1-u}\right) \quad \text{при } u \rightarrow 1$$

Учитывая это, применим следующую форму представления для θ в k -ом приближении

$$\theta = \frac{1}{1-u^k} (a_0 + a_1 u + \dots + a_{k-1} \cdot u^{k-1}) \quad (4.1)$$

Коэффициенты a_m выбираем так, чтобы при $u = m/k = u_m$ ($m=0, 1, \dots, k-1$) выражение (4.1) совпадало тождественно с соответствующим значением θ_m . Аналогично принимаем

$$\frac{1}{\theta} = (1-u) (b_0 + b_1 u + \dots + b_{k-1} u^{k-1}) \quad (4.2)$$

В качестве функций f_{km} выбираем систему степеней

$$f_{km}(y) = (1-u)^m \quad (4.3)$$

тем самым обеспечивается сходимость всех интегралов в интегральных соотношениях (2.5).

Приведем окончательный вид аппроксимирующих выражений и систем уравнений для первых четырех приближений. Отметим, что эти системы являются «универсальными» — единственный коэффициент, связанный с конкретным заданием расчетного случая, это коэффициент \dot{U}/U .

Система первого приближения. Аппроксимирующие выражения

$$\theta = \frac{\theta_0}{1-u}, \quad \frac{1}{\theta} = \frac{1}{\theta_0} (1-u) \quad (4.4)$$

Дифференциальные уравнения (точка — дифференцирование по ξ)

$$\dot{\theta}_0 + 3 \frac{\dot{U}}{U} \theta_0 = \frac{2}{\theta_0} \quad (4.5)$$

Система второго приближения. Аппроксимирующие выражения

$$\theta = \frac{1}{1-u} [\theta_0 (1-2u) + \theta_1 u]; \quad \frac{1}{\theta} = (1-u) \left[\frac{1}{\theta_0} (1-2u) + \frac{1}{\theta_1} 4u \right] \quad (4.6)$$

Дифференциальные уравнения

$$\dot{\theta}_0 + \frac{\dot{U}}{U} (9\theta_0 + 7\theta_1) = \frac{34}{\theta_0} - \frac{32}{\theta_1}, \quad \dot{\theta}_1 + \frac{\dot{U}}{U} (4\theta_0 + 6\theta_1) = \frac{20}{\theta_0} - \frac{16}{\theta_1} \quad (4.7)$$

Система третьего приближения. Аппроксимирующие выражения

$$\theta = \frac{1}{1-u} \left[\theta_0 \left(1 - \frac{9}{2}u + \frac{9}{2}u^2\right) + \theta_1 (4u - 6u^2) + \theta_2 \frac{1}{2} (-u + 3u^2) \right] \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{\theta} = (1-u) \left[\frac{1}{\theta_0} \left(1 - \frac{9}{2}u + \frac{9}{2}u^2\right) + \frac{1}{\theta_1} \frac{9}{2} (2u - 3u^2) + \frac{1}{\theta_2} \frac{9}{2} (-u + 3u^2) \right]$$

Дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_0 + \frac{\dot{U}}{U} \left(\frac{67}{2} \theta_0 + 40\theta_1 - \frac{7}{2} \theta_2 \right) &= 225 \frac{1}{\theta_0} - 234 \frac{1}{\theta_1} + 9 \frac{1}{\theta_2} \\ \dot{\theta}_1 + \frac{\dot{U}}{U} \left(\frac{67}{12} \theta_0 + \frac{28}{3} \theta_1 + \frac{13}{12} \theta_2 \right) &= 39 \frac{1}{\theta_0} - \frac{51}{2} \frac{1}{\theta_1} - 12 \frac{1}{\theta_2} \\ \dot{\theta}_2 + \frac{\dot{U}}{U} \left(-\frac{83}{6} \theta_0 - \frac{52}{3} \theta_1 + \frac{31}{6} \theta_2 \right) &= -99 \frac{1}{\theta_0} + 120 \frac{1}{\theta_1} - 15 \frac{1}{\theta_2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Система четвертого приближения. Аппроксимирующие выражения

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1}{1-u} \left[\theta_0 \frac{1}{3} (3 - 22u + 48u^2 - 32u^3) + \theta_1 3(3u - 10u^2 + 8u^3) + \right. \\ &\quad \left. + \theta_2 (-3u + 16u^2 - 16u^3) + \theta_3 \frac{1}{3} (u - 6u^2 + 8u^3) \right] \quad (4.10) \\ \frac{1}{\theta} &= (1-u) \left[\frac{1}{\theta_0} \frac{1}{3} (3 - 22u + 48u^2 - 32u^3) + \frac{1}{\theta_1} \frac{16}{3} (3u - 10u^2 + 8u^3) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\theta_2} 4(-3u + 16u^2 - 16u^3) + \frac{1}{\theta_3} \frac{16}{3} (u - 6u^2 + 8u^3) \right] \end{aligned}$$

Дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_0 + \frac{\dot{U}}{U} (97\theta_0 + 129\theta_1 - 31\theta_2 + 3\theta_3) &= \\ &= 940 \frac{1}{\theta_0} - \frac{3424}{3} \frac{1}{\theta_1} + 280 \frac{1}{\theta_2} - 96 \frac{1}{\theta_3} \\ \dot{\theta}_1 + \frac{\dot{U}}{U} \left(\frac{137}{72} \theta_0 + \frac{175}{8} \theta_1 + \frac{43}{8} \theta_2 - \frac{23}{72} \theta_3 \right) &= \\ &= \frac{133}{6} \frac{1}{\theta_0} + \frac{244}{9} \frac{1}{\theta_1} - \frac{139}{3} \frac{1}{\theta_2} - 4 \frac{1}{\theta_3} \quad (4.11) \\ \dot{\theta}_2 + \frac{\dot{U}}{U} \left(-\frac{37}{2} \theta_0 - \frac{45}{2} \theta_1 + \frac{17}{2} \theta_2 + \frac{1}{2} \theta_3 \right) &= \\ &= -\frac{532}{3} \frac{1}{\theta_0} + \frac{688}{3} \frac{1}{\theta_1} - 52 \frac{1}{\theta_2} + \frac{16}{3} \frac{1}{\theta_3} \\ \dot{\theta}_3 + \frac{\dot{U}}{U} \left(\frac{177}{8} \theta_0 + \frac{195}{8} \theta_1 - \frac{149}{8} \theta_2 + \frac{41}{8} \theta_3 \right) &= \\ &= \frac{443}{2} \frac{1}{\theta_0} - \frac{1060}{3} \frac{1}{\theta_1} + 175 \frac{1}{\theta_2} - 36 \frac{1}{\theta_3} \end{aligned}$$

§ 5. Точные решения. Начальные условия для аппроксимирующих систем уравнений. Если

$$U = cx^m = c^{\frac{1}{m+1}} (m+1)^{\frac{m}{m+1}} \xi^{\frac{m}{m+1}} \quad (5.1)$$

$$\frac{\dot{U}}{U} = \frac{\beta}{2\xi} \quad \left(\beta = \frac{2m}{1+m} \right) \quad (5.2)$$

В этом случае аппроксимирующие системы имеют также точное решение вида

$$\theta_k = A_k \sqrt{\xi} \quad (5.3)$$

причем A_k находятся как решения соответствующих алгебраических систем, например, в первом приближении

$$A_0 (1 + 3\beta) = \frac{4}{A_0}$$

во втором приближении

$$(1 + 9\beta) A_0 + 7\beta A_1 = \frac{68}{A_0} - \frac{64}{A_1}, \quad 4\beta A_0 + (1 + 6\beta) A_1 = \frac{40}{A_0} - \frac{32}{A_1}$$

и аналогично для систем высших приближений. Величины A_k связаны с функцией φ точного дифференциального уравнения (1.9). В частности

$$\frac{1}{A_0} = \frac{\varphi''(0)}{\sqrt{2}} \quad (5.4)$$

Это позволяет оценить точность приближенных систем. Ниже в таблице приводится такое сравнение.

При произвольном законе скорости решения вида (5.3) дают начальные значения для величин θ_k , которые позволяют отойти от особой точки $\xi = 0$ и далее применять уже любые методы численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таблица величины $\frac{1}{A_0} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\frac{V \bar{\xi}}{\theta_0} \right)$

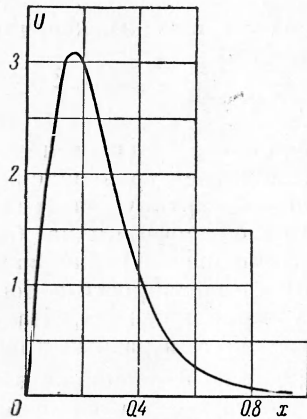
β	1-е пригл.	2-е пригл.	3-е пригл.	4-е пригл.	Точное решение
-0.19	0.32787	—	0.14252	отрыв	0.06060
-0.15	0.37081	отрыв при $\beta \approx -0.05$	0.18072	0.14999	0.15299
-0.10	0.41833		0.23246	0.22255	0.22576
0.00	0.50000		0.31692	0.33191	0.33206
0.50	0.79057	0.65628	0.65416	0.65586	0.65597
1.00	1.00000	0.87247	0.87056	0.87164	0.87157
1.50	1.17260	1.04538	1.04386	1.04470	1.04456
2.00	1.32288	1.19371	1.19252	1.19321	1.19304

§ 6. Характеристики пограничного слоя. Пример расчета. После определения величин θ_k элементарно определяются характеристики пограничного слоя $c_f, \delta^*, \delta^{**}$

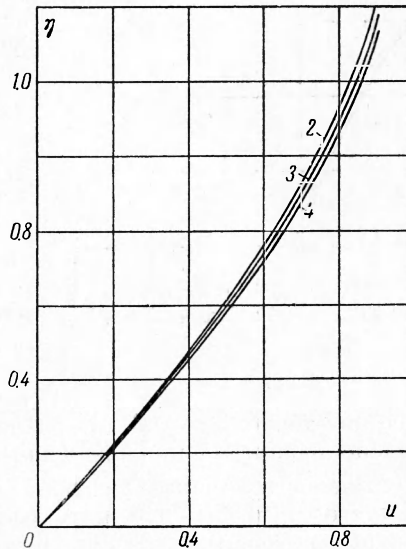
$$c_f = \frac{2\tau_0}{\rho U^2} = \frac{2\sqrt{v}}{\theta_0}$$

В рассматриваемых уравнениях θ и ξ — размерные величины. Если ввести безразмерные функции, взяв некоторую скорость U_0 за характерную скорость и некоторую длину l — за характерную длину (например, скорость невозмущенного потока и хорду обтекаемого профиля), то безразмерные функции выразятся следующим образом

$$\bar{\theta} = \frac{\theta}{\sqrt{U_0 l}}, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{U_0 l} \quad (6.1)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Очевидно, все системы уравнений (4.4, ..., 4.11) будут иметь тот же вид в переменных $\bar{\theta}$ и $\bar{\xi}$.

Через безразмерные величины местный коэффициент трения выразится следующим образом

$$c_f = 2 \sqrt{\frac{v}{U_0 l}} \frac{1}{\theta_0} = \frac{2}{\sqrt{R}} \frac{1}{\theta_0} \quad (R \text{ — число Рейнольдса}) \quad (6.2)$$

Выражения для δ^* и δ^{**} будут зависеть от номера приближения.

Общее выражение

$$\delta^* = \frac{l}{\sqrt{R}} \frac{1}{U} \int_0^1 \bar{\theta} (1-u) du, \quad \delta^{**} = \frac{l}{\sqrt{R}} \frac{1}{U} \int_0^1 \bar{\theta} u (1-u) du \quad (6.3)$$

представится в явном виде, если вместо $\bar{\theta}$ подставить аппроксимирующие выражения (4.4), (4.6), (4.8) или (4.10)

$$\frac{\delta^* \bar{U}}{l} \sqrt{R} \approx \theta_0 \approx \frac{1}{2} \theta_1 \approx \frac{1}{4} (\theta_0 + \theta_2) \approx \frac{1}{2} \theta_1 - \frac{1}{6} \theta_2 + \frac{1}{6} \theta_3 \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta^{**} \bar{U}}{l} \sqrt{R} &\approx \frac{1}{2} \theta_0 \approx \frac{1}{3} \theta_1 - \frac{1}{6} \theta_2 \approx \frac{1}{8} \theta_0 - \frac{1}{6} \theta_1 + \frac{5}{24} \theta_2 \approx \\ &\approx \frac{1}{90} (-7\theta_0 - 27\theta_1 - 18\theta_2 + 13\theta_3) \end{aligned} \quad (6.5)$$

для 1-го, 2-го, 3-го и 4-го приближений соответственно.

Следует обратить внимание, что формулы (6.4), (6.5) теряют смысл в точке отрыва, так как здесь θ_0 обращается в бесконечность. В точке отрыва аппроксимирующие выражения вида (4.1) должны быть заменены следующими

$$\theta = \frac{1}{(1-u)\sqrt{u}} (c_0 + c_1 u + \dots + c_{k-2} u^{k-2})$$

где коэффициенты c_m обеспечивают тождественное совпадение последнего выражения со значениями θ_m в точках $u = m/k$ ($m \neq 0, m \neq k$).

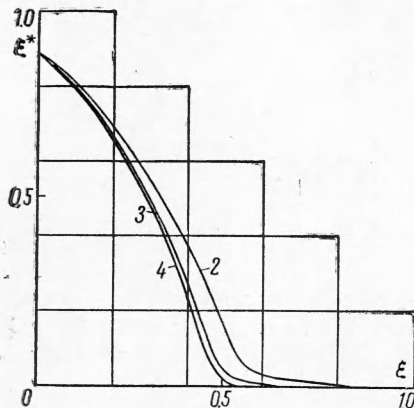
В заключение приведем пример расчета пограничного слоя в разных приближениях для случая

$$U = c \sqrt{\xi} (1 - \xi) \quad (6.6)$$

или в геометрических координатах

$$U = c \operatorname{sh} \frac{cx}{2} \operatorname{sech}^3 \frac{cx}{2} \quad (6.6a)$$

Качественно распределение скорости, даваемое уравнением (6.6a), напоминает картину распределения скорости по профилям на больших углах атаки (фиг. 1). На фиг. 2 приведен профиль скорости в пограничном слое в точке $\xi = 0.3$ в различных приближениях. На фиг. 3 представлено распределение коэффициента трения c_f в разных приближениях (приведена величина $\xi^* = \frac{1}{2} c_f \sqrt{R} \sqrt{\xi}$; при этом множитель $\sqrt{\xi}$ введен для того, чтобы избежать бесконечности в начале координат). Эти фигуры позволяют в известной мере судить о точности и быстроте сходимости метода.



Фиг. 3

ном слое в точке $\xi = 0.3$ в различных приближениях. На фиг. 3 представлено распределение коэффициента трения c_f в разных приближениях (приведена величина $\xi^* = \frac{1}{2} c_f \sqrt{R} \sqrt{\xi}$; при этом множитель $\sqrt{\xi}$ введен для того, чтобы избежать бесконечности в начале координат). Эти фигуры позволяют в известной мере судить о точности и быстроте сходимости метода.

Поступила 9 X 1960

ЛИТЕРАТУРА

1. Ч у ш к и н П. И. Обтекание эллипсов и эллипсоидов дозвуковым потоком газа. Сб. «Вычислительная математика», 1957, вып. 2, Изд. АН СССР.
2. Ч у ш к и н П. И. Расчет некоторых звуковых течений газа. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 3.
3. Б е л о ц е р к о в с к и й О. М. Обтекание симметричного профиля с отошедшей ударной волной. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 2.
4. Б е л о ц е р к о в с к и й О. М. О расчете обтекания осесимметричных тел с отошедшей ударной волной на электронной счетной машине. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 3.