

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАЖИГАНИЯ КОНДЕНСИРОВАННОГО ВЕЩЕСТВА

В. Н. Вилунов, А. Б. Ворожцов, И. Г. Боровской, А. А. Шелупанов

(Томск)

Закономерности зажигания, когда основная роль отводится реакциям в твердой фазе (твердофазная модель зажигания), хорошо изучены [1]. Вследствие ошибок в определении физико-химических свойств к-вещества, изменения в пределах соответствующих допусков свойств материалов и технологических параметров при изготовлении к-веществ действительная величина времени зажигания и характер процесса отличаются от расчетных. Отличия эти невелики и носят вероятностный характер. Поэтому расчетные данные, полученные при определении характеристик процесса зажигания к-вещества только при учете номинальных условий, можно рассматривать лишь как предварительные результаты. Окончательному суждению должен предшествовать статистический анализ чувствительности, при котором получают сведения о рассеянии времени зажигания относительно номинального значения, т. е. оценка решения в зависимости от вариаций входных параметров.

1. Уравнение распространения тепла для твердофазной модели зажигания имеет следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{Qz}{c\rho} \exp\left(-\frac{E_A}{RT}\right), \quad x > 0, t > 0, \quad (1)$$

где T — температура; κ — температуропроводность; Q — тепловой эффект реакции конденсированной фазы; z — предэкспонент; ρ — плотность; c — удельная теплоемкость; E_A — энергия активации; t — время; x — декартова координата. Уравнение решается при начальных и краевых условиях:

$$\begin{aligned} T(x, 0) &= T_n, \quad x \geq 0, \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \alpha (T_g - T(0, t)), \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow \infty} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

λ — теплопроводность; T_g — температура поджигающей среды; α — коэффициент теплоотдачи газового потока. Момент воспламенения t_* фиксируется при выполнении следующих условий:

- а) $\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} < \frac{Qz}{c\rho} \exp\left(-\frac{E_A}{RT(0, t)}\right)$, т. е. ведущая роль в общем тепловом балансе к-системы переходит к тепловыделению;
- б) $T(0, t) > T_*$ (T_* — максимально возможная температура поджигающей среды).

Второе условие соответствует приближению температуры $T(0, t)$ к асимптотическому решению уравнения (1) и учитывает период индукции зажигания [1]. Для численной реализации уравнения (1) с граничными условиями (2) используется специальная конечно-разностная схема с меняющейся в зависимости от условий прогресса расчетной сеткой [2]. Данная схема предназначена для решения широкого класса задач, моделирующих быстропротекающие физические процессы, в число которых входит и задача зажигания конденсированных систем.

2. Предположим, что все входные данные — случайные числа, т. е. изменение исходных характеристик к-вещества по толщине пластины и во времени не учитывается. Для определения разбросов времени зажигания и анализа чувствительности, позволяющего определить степень влияния исходных параметров на решение, применяется дельта-метод [3]. Время зажигания есть функция системы внутренних и внешних параметров x_i ($i = 1, 2, \dots, M$) с известными математическими ожиданиями $E(x_i)$ и среднеквадратическими отклонениями $\sigma_x^2(x_i)$.

Δx_i	$\Delta t_3(\lambda)$	$\Delta t_3(z/\rho)$	$\Delta t_3(E_A/R)$	$\Delta t_3(T_H)$
1	1,7	4,8	4,3	1,7
2	3,4	9,4	8,8	3,3
3	5,1	13,7	13,4	4,9
-1	-1,7	-5,1	-4,2	-1,7
-2	-3,4	-10,5	-8,3	-3,4
-3	-5,0	-16,2	-12,3	-5,1

Метод получения моментов относительно математического ожидания времени зажигания основан на разложении в ряд Тейлора многомерной функции $t_3 = t_3(x_1, x_2, \dots, x_M)$ в окрестности точки пространства параметров $[E(x_1), E(x_2), \dots, E(x_M)]$.

После ряда преобразований, ограничиваясь при

этом разложением до членов второго порядка, получаем выражения для моментов системы с учетом того факта, что случайные параметры компонентов системы коррелированы:

$$\begin{aligned} \mu_1(t_3) &= E(t_3) = t_3[E(x_1), E(x_2), \dots, E(x_M)] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \left(\frac{\partial^2 t_3}{\partial x_i^2} \right) \sigma_x^2(x_i) + \sum_{i < j} \sum_j \left(\frac{\partial^2 t_3}{\partial x_i \partial x_j} \right) E\{[x_i - E(x_i)][x_j - E(x_j)]\}, \\ \mu_2(t_3) &= \sigma_x^2(t_3) = \sum_{i=1}^M \left(\frac{\partial t_3}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_x^2(x_i) + 2 \sum_{i < j} \sum_j \left(\frac{\partial t_3}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial t_3}{\partial x_j} \right) E\{[x_i - E(x_i)][x_j - \\ &- E(x_j)]\} + \sum_{i=1}^M \left(\frac{\partial t_3}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial^2 t_3}{\partial x_i^2} \right) \mu_3(x_i) + \sum_{i \neq j} \sum_j \left(\frac{\partial t_3}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial^2 t_3}{\partial x_j^2} \right) E\{[x_i - E(x_i)] \times \\ &\times [x_j - E(x_j)]^2\} + 2 \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial t_3}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial^2 t_3}{\partial x_i \partial x_j} \right) E\{[x_i - E(x_i)][x_j - E(x_j)]\} + \\ &+ 2 \sum_{i \neq j \neq s} \sum_j \sum_s \left(\frac{\partial t_3}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial^2 t_3}{\partial x_i \partial x_s} \right) E\{[x_i - E(x_i)][x_j - E(x_j)][x_s - E(x_s)]\}. \end{aligned}$$

Для определения совокупности производных по набору параметров x_i , число которых равно M , достаточно сделать $2M + 1$ расчетов задачи зажигания к-вещества; один расчет проводится при значениях аргументов x_i , равных их математическим ожиданиям, остальные $2M$ расчетов — при смещенном на заданную величину $\pm \Delta x_i$ от математического ожидания каждого из аргументов последовательно. Задача определения статистических характеристик зажигания сводится к нахождению первых моментов. Предельные отклонения времени зажигания к-вещества определяются как $\pm 3\sigma_x^2(t_3)$ с вероятностью $P = 0,99730$.

3. Вычисление частных производных от искомого решения по параметрам модели — функций чувствительности — предоставляет дополнительную информацию о модели. Использование этих функций дает возможность провести качественный анализ модели с позиций выяснения роли различных физических факторов. При номинальных значениях входных параметров [1, 4]: $\kappa = 1 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $Q/c = 200$ К, $\lambda = 0,235$ Вт/мК, $E_A/R = 17\,680$ К, $T_H = 300$ К, $z/\rho = 3,5 \cdot 10^{14}$ 1/с номинальное значение времени зажигания конденсированного вещества $t_3 = 0,023593$ с.

Параметрические расчеты на ЭВМ БЭСМ-6 показали, что основной вклад в появление разбросов времени зажигания вносят отклонения физико-химических характеристик λ , E_A/R , z/ρ и начальной температуры к-вещества T_H . Количественные результаты представлены в таблице, где каждому варьируемому параметру соответствует отклонение времени зажигания, выраженное в процентах номинального t_3 . Например, $\Delta t_3(\lambda)$ означает отклонение времени зажигания при вариациях параметра λ , когда остальным параметрам присвоены номинальные значения.

Статистический анализ показывает, что нелинейность уравнения (1) и варьирование соответствующих параметров, входящих в него, приводят к неравномерному относительно математического ожидания отклонению разбросов времени зажигания и расширяют диапазон возможных предельных времен зажигания.

Ниже представлены отклонения максимального $\Delta t_{3 \max}$ и минимального времени зажигания $\Delta t_{3 \min}$, выраженные в процентах номинального t_3 :

$\Sigma \Delta x_i$	$\Delta t_3 \max$	$\Delta t_3 \min$
± 1	7,1	-7,0
± 2	14,2	-14,0
± 3	21,3	-20,9

Видно, что интервал вероятного времени зажигания при учете возможных отклонений всех параметров шире соответствующего интервала, образованного максимальным и минимальным временами зажигания при варьировании одного из параметров при номинальных значениях остальных (см. таблицу).

Результаты исследования чувствительности времени зажигания к величине разбросов коэффициента теплоотдачи и температуры поджигающей среды (чувствительность к параметрам граничных условий):

Δx_i	$\Delta t_3 (\alpha)$	$\Delta t_3 (T_g)$
1	1,7	2,3
2	3,3	4,6
3	4,9	6,5
-1	-1,7	-2,4
-2	-3,5	-4,9
-3	-5,3	-7,5

Отклонения $\Delta t_{3 \max} = 13,5\%$, $\Delta t_{3 \min} = 13,2\%$ (нелинейность в граничных условиях приводит также к расширению диапазона разбросов t_3).

Таким образом, в настоящей работе представлены результаты статистического анализа зажигания к-вещества. Определены предельные величины разбросов времени зажигания, возникающих вследствие вариаций физико-химических параметров к-вещества, начальной температуры и граничных условий. Отмечено, что нелинейность задачи обуславливает расширение диапазона вероятного времени зажигания по сравнению с соответствующим диапазоном, образованным $\Delta t_{3 \max}$ и $\Delta t_{3 \min}$ при отклонении отдельных входных параметров, вызывающих наибольшее отклонение выходной характеристики — t_3 . Разработанная методика статистического анализа позволяет получать числовые характеристики закона распределения времени зажигания к-вещества.

ЛИТЕРАТУРА

1. Виллопов В. Н. Теория зажигания конденсированных веществ.— Новосибирск: Наука, 1984.
2. Боровской И. Г., Бондарчук С. С., Козлов Е. А. и др. ФГВ, 1986, 22, 3, 14.
3. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах.— М.: Мир, 1969.
4. Новожилов Б. В. Нестационарное горение твердых ракетных топлив.— М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 11/VII 1986,
после доработки — 10/IX 1986