

ЛИТЕРАТУРА

1. Альварес-Суарес В. А., Рязанцев Ю. С. О термокапиллярном движении, вызванном локальным нагревом жидкости импульсом ультрафиолетового излучения // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1986.— № 6.
2. Вальциферов Ю. В., Рязанцев Ю. С., Шевцова В. М. Термокапиллярная конвекция в слое жидкости при локальном нагреве // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1987.— № 5.
3. Ostrach S. Low-gravity fluid flows // Annual Rev. Fluid Mech.— Palo Alto, Calif., 1982.— V. 14.
4. Боровский И. Б., Гродецкий Д. Д. и др. Массоперенос при обработке поверхности металлов оплавлением непрерывным лазерным излучением // ДАН СССР.— 1982.— Т. 263, № 3.
5. Раstopов С. Ф., Суходольский А. Т. Применение лазерно-индуцированного эффекта Марангони для записи дифракционных решеток // Квант. электроника.— 1987.— Т. 14, № 8.
6. Безуглый Б. А., Майоров В. С. Роль поверхностных сил при формировании изображения на тонких жидких пленках // Журн. науч. и прикл. фото- и кинематографии.— 1981.— Т. 26, вып. 6.
7. Винаров А. Ю., Кафаров В. В. и др. Голографическое исследование межфазной турбулентности и переноса кислорода в биологических средах // ДАН.— 1985.— Т. 284, № 4.
8. Ostrach S., Pradhau A. Surface-tension induced convection at reduced gravity // AIAA J.— 1978.— V. 16, N 5.
9. Альварес-Суарес В. А., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. Закономерности окрашивания фотохромных растворов, используемых в экспериментальной гидродинамике // ПМТФ.— 1987.— № 1.
10. Юречко В. Н., Рязанцев Ю. С. и др. Исследование гидродинамических характеристик потоков жидкости методом фотохромной визуализации.— М., 1985.— (Препр./ ИПМ АН СССР; № 263).
11. Михеев М. А. Основы теплопередачи.— М.: Энергоиздат, 1956.
12. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1978.

г. Москва

Поступила 23/III 1988 г.,
в окончательном варианте — 21/XII 1988 г.

УДК 532.51

О. Ю. Цвелодуб

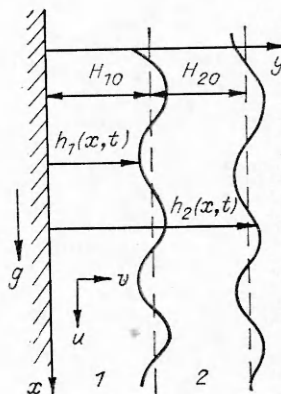
ОБ ЭВОЛЮЦИОННОМ УРАВНЕНИИ НА ВОЗМУЩЕНИЯ В ДВУСЛОЙНОМ ПЛЕНОЧНОМ ТЕЧЕНИИ

Рассмотрим совместное движение двух пленок несмешивающихся между собой жидкостей, стекающих под действием силы тяжести. Подобное течение встречается в некоторых типах экстракционного оборудования. Принятая система координат показана на рисунке. Пленка, граничащая с твердой стенкой, в дальнейшем будет называться первой, а имеющая свободную границу, — второй. Относящиеся к ним величины помечены индексами 1 и 2 соответственно.

При любых расходах жидкостей уравнения, описывающие движение такой системы, допускают решение с плоскими межфазной и свободной границами. Для него профили продольной скорости равны

$$(1) \quad U_{10} = \frac{g}{2\nu_1} [2(H_{10} + H_{20}\rho_2/\rho_1)y - y^2],$$

$$U_{20} = \frac{g}{2\nu_2} [2H_{10}H_{20}(\mu_2/\mu_1 - 1) + H_{10}^2(\nu_2/\nu_1 - 1) + 2(H_{10} + H_{20})y - y^2].$$



Здесь ν_i и μ_i — кинематический и динамический коэффициенты вязкости; ρ_i — плотность и H_{i0} — толщина пленки жидкости.

Однако уже при самых малых расходах течение (1) вследствие неустойчивости может стать волновым. Используя в качестве масштабов характерные значения величин, относящихся к первой пленке, в частности толщину H_{10} и среднерасходную скорость U_0 при безволновом течении с данным расходом q_0 , запишем для этого случая уравнения движения в безразмерном виде (знак обезразмеривания опускаем)

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} &= \left(-\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{g}{g} \right) / \text{Fr} + \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) / \text{Re}, \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y} &= -\frac{\partial p_1}{\partial y} / \text{Fr} + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right) / \text{Re}, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} &= \left(-\frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{g}{g} \right) / \rho \text{Fr} + \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) \nu / \text{Re}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} &= -\frac{\partial p_2}{\partial y} / \rho \text{Fr} + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right) \nu / \text{Re}, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Динамические граничные условия на твердой ($y = 0$), межфазной ($y = h_1(x, t)$) и свободной ($y = h_2(x, t)$) границах можно записать аналогично [1]:

$$(3) \quad \begin{aligned} \text{при } y = 0 \quad u_1 = v_1 = 0; \\ \text{при } y = h_1(x, t) \quad u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \\ -(p_1 - \text{We}/R_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} + \left(2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \text{Fr}/\text{Re} = \\ = -p_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \left(2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \mu \text{Fr}/\text{Re}, \\ p_1 - \text{We}/R_1 + \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \frac{\partial h_1}{\partial x} - 2 \frac{\partial v_1}{\partial y} \right] \text{Fr}/\text{Re} = \\ = p_2 + \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \frac{\partial h_1}{\partial x} - 2 \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] \mu \text{Fr}/\text{Re}; \end{aligned}$$

при $y = h_2(x, t)$

$$\begin{aligned} -(p_2 - \sigma \text{We}/R_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} + \left(2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \mu \text{Fr}/\text{Re} = -p_0 \frac{\partial h_2}{\partial x}, \\ p_2 - \sigma \text{We}/R_2 + \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \frac{\partial h_2}{\partial x} - 2 \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] \mu \text{Fr}/\text{Re} = p_0, \end{aligned}$$

где $\frac{1}{R_1} = -\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} / \left(1 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \right)^2 \right)^{3/2}$; $\frac{1}{R_2} = -\frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} / \left(1 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial x} \right)^2 \right)^{3/2}$;

$$\text{Re} = q_0/\nu_1; \quad \text{Fr} = q_0^2/gH_{10}^3; \quad \text{We} = \sigma_1/\rho_1 g H_{10}^2.$$

На межфазной и свободной границах справедливы кинематические условия

$$(4) \quad \begin{aligned} \partial h_1/\partial t + u_1 \partial h_1/\partial x &= v_1 \quad \text{при } y = h_1; \\ \partial h_2/\partial t + u_2 \partial h_2/\partial x &= v_2 \quad \text{при } y = h_2. \end{aligned}$$

Здесь Re — число Рейнольдса; Fr — число Фрула; We — число Вебера; $\rho = \rho_2/\rho_1$, $\sigma = \sigma_2/\sigma_1$, $\nu = \nu_2/\nu_1$, $\mu = \mu_2/\mu_1$ — относительные плотность

и коэффициенты поверхностного натяжения, кинематической и динамической вязкости.

Используя (1), нетрудно показать, что при произведенном выборе масштабов для обезразмеривания выполняется соотношение

$$\text{Fr} / \text{Re} = 1/3 + \rho h/2 = 1/a.$$

Ограничиваясь рассмотрением длинноволновых возмущений, ищем решение системы (2) с условиями (3)—(4) в виде рядов по параметру малости $\varepsilon = H_{10}/\lambda$ (λ — характерный и продольный размер возмущений). Для этого, следуя [1], введем новые переменные

$$x' = \varepsilon x, \quad y' = y, \quad \tau_n = \varepsilon^n t, \quad n = 1, 2, \dots$$

и функции

$$\begin{aligned} u_1 &= U_{10} + \varepsilon u_1', \quad v_1 = \varepsilon^2 v_1', \quad u_2 = U_{20} + \varepsilon u_2', \quad v_2 = \varepsilon^2 v_2', \\ p_1 &= \varepsilon p_1', \quad p_2 = \varepsilon p_2', \quad h_1 = 1 + \varepsilon h_1', \quad h_2 = h + \varepsilon h_2' \\ & \quad (h = 1 + H_{20}/H_{10}). \end{aligned}$$

Пренебрегая членами порядка ε^2 и выше и перенося граничные условия для поверхностей раздела и свободной на их невозмущенные уровни, для $u_1', v_1', u_2', v_2', p_1', p_2', h_1', h_2'$ приходим к системе (штрихи опускаем)

$$\begin{aligned} (5) \quad \varepsilon \left(\frac{\partial u_1}{\partial \tau_1} + U_{10} \frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1 \frac{dU_{10}}{dy} \right) &= - \frac{\varepsilon}{\text{Fr}} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}, \\ - \frac{1}{\text{Fr}} \frac{\partial p_1}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} &= 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \\ \varepsilon \left(\frac{\partial u_2}{\partial \tau_1} + U_{20} \frac{\partial u_2}{\partial x} + v_2 \frac{dU_{20}}{dy} \right) &= - \frac{\varepsilon}{\rho \text{Fr}} \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\nu}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}, \\ - \frac{1}{\rho \text{Fr}} \frac{\partial p_2}{\partial y} + \frac{\varepsilon \nu}{\text{Re}} \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} (6) \quad \text{при } y = 0 \quad u_1 = v_1 = 0; \\ \text{при } y = 1 \\ \left(\varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{dU_{10}}{dy} \right) h_1 + u_1 &= \left(\varepsilon \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{dU_{20}}{dy} \right) h_1 + u_2, \quad v_1 = v_2, \\ \left(\frac{d^2 U_{10}}{dy^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) h_1 + \frac{\partial u_1}{\partial y} &= \mu \left[\left(\frac{d^2 U_{20}}{dy^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) h_1 + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right], \\ p_1 + \varepsilon \frac{\partial p_1}{\partial y} h_1 + \text{We} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} - 2\varepsilon \frac{\text{Fr}}{\text{Re}} \frac{\partial v_1}{\partial y} &= p_2 - 2\varepsilon \frac{\mu \text{Fr}}{\text{Re}} \frac{\partial v_2}{\partial y}; \\ \text{при } y = h \\ \frac{d^2 U_{20}}{dy^2} h_2 + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} h_2 &= 0, \\ p_2 + \varepsilon \frac{\partial p_2}{\partial y} h_2 + \text{We} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} - 2\varepsilon \frac{\mu \text{Fr}}{\text{Re}} \frac{\partial v_2}{\partial y} &= p_0. \end{aligned}$$

Кинематические условия (4) принимают вид

$$\begin{aligned} (7) \quad \frac{\partial h_1}{\partial \tau_1} + \varepsilon \frac{\partial h_1}{\partial \tau_2} + U_{10} \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{dU_{10}}{dy} \varepsilon h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} + \varepsilon u_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} &= v_1 + \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial y} h_1 \quad \text{при } y=1, \\ \frac{\partial h_2}{\partial \tau_1} + \varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \tau_2} + U_{20} \frac{\partial h_2}{\partial x} + \varepsilon u_2 \frac{\partial h_2}{\partial x} &= v_2 + \varepsilon \frac{\partial v_2}{\partial y} h_2 \quad \text{при } y=h. \end{aligned}$$

В (6) оставлены члены более высокого порядка по ε , так как для тонких пленок многих жидкостей значения We обычно велики. Поэтому будем полагать, что выполняются соотношения

$$We \varepsilon^2 \sim 1, \quad We \varepsilon^2 \sigma \sim 1.$$

Представляя решение системы (5) в виде рядов по

$$\begin{matrix} u_i \\ v_i \\ p_i \\ h_i \end{matrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \begin{pmatrix} u_{ik} \\ v_{ik} \\ p_{ik} \\ h_{ik} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2,$$

и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , из уравнений для нулевого порядка получим

$$(8) \quad u_{10} = r_1 y, \quad v_{10} = -\frac{\partial r_1}{\partial x} \frac{y^2}{2}, \quad u_{20} = r_2 y + r_3, \quad v_{20} = -\frac{\partial r_2}{\partial x} \frac{y^2}{2} - \frac{\partial r_3}{\partial x} y - r_4.$$

Явный вид функций r_i дан в приложении.

Подставляя (8) в (7), приходим к системе, в первом приближении описывающей поведение возмущений в двуслойном пленочном течении:

$$(9) \quad \frac{\partial h_{10}}{\partial \tau_1} + a_1 \frac{\partial h_{10}}{\partial x} + b_1 \frac{\partial h_{20}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial h_{20}}{\partial \tau_1} + a_2 \frac{\partial h_{20}}{\partial x} + b_2 \frac{\partial h_{10}}{\partial x} = 0.$$

$$\text{Здесь } a_1 = U_{10}(1) + \frac{1}{2} \left(\mu \frac{d^2 U_{20}(1)}{dy^2} - \frac{d^2 U_{10}(1)}{dy^2} \right); \quad b_1 = -\frac{\mu}{2} \frac{d^2 U_{20}(h)}{dy^2};$$

$$a_2 = U_{20}(h) + \frac{d^2 U_{20}(h)}{dy^2} [(\mu - 1)/2 + (1 - \mu)h - h^2/2];$$

$$b_2 = \left(\frac{dU_{10}(1)}{dy} - \frac{dU_{20}(1)}{dy} \right) (h - 1) + \left(\mu \frac{d^2 U_{20}(1)}{dy^2} - \frac{d^2 U_{10}(1)}{dy^2} \right) \left(h - \frac{1}{2} \right).$$

Общее решение системы (9) легко выписывается:

$$h_{10} = H_{11}(\xi_1) + H_{12}(\xi_2), \quad h_{20} = H_{21}(\xi_1) + H_{22}(\xi_2), \quad \xi_1 = x - c_1 \tau_1, \quad \xi_2 = x - c_2 \tau_1$$

$$(c_{1,2} = [a_1 + a_2 \pm ((a_1 - a_2)^2 + 4b_1 b_2)^{1/2}]/2).$$

Ясно, что у (9) имеются решения в виде стационарно бегущих волн с фазовой скоростью c_1 или c_2 .

Из (5) для следующего порядка по ε имеем

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_{10}}{\partial \tau_1} + U_{10} \frac{\partial u_{10}}{\partial x} + v_{10} \frac{dU_{10}}{dy} - \frac{1}{Fr} \frac{\partial p_{10}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_{11}}{\partial y^2}, \\ - \frac{1}{Fr} \frac{\partial p_{11}}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_{10}}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial u_{11}}{\partial x} + \frac{\partial v_{11}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u_{20}}{\partial \tau_1} + U_{20} \frac{\partial u_{20}}{\partial x} + v_{20} \frac{dU_{20}}{dy} - \frac{1}{\rho Fr} \frac{\partial r_{20}}{\partial x} + \frac{\nu}{Re} \frac{\partial^2 u_{21}}{\partial y^2}, \\ - \frac{1}{\rho Fr} \frac{\partial p_{21}}{\partial y} + \frac{\nu}{Re} \frac{\partial^2 v_{20}}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial u_{21}}{\partial x} + \frac{\partial v_{21}}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Решение системы (10), удовлетворяющее вытекающим из (6) граничным условиям

$$\text{при } y = 0 \quad u_{11} = v_{11} = 0;$$

$$\text{при } y = 1$$

$$\frac{\partial u_{11}}{\partial y} h_{10} + \frac{dU_{10}}{dy} h_{11} + u_{11} = \frac{\partial u_{21}}{\partial y} h_{10} + \frac{dU_{20}}{dy} h_{11} + u_{21},$$

$$v_{11} = v_{21}, \quad \frac{d^2 U_{10}}{dy^2} h_{11} + \frac{\partial u_{11}}{\partial y} = \mu \left(\frac{d^2 U_{20}}{dy^2} h_{11} + \frac{\partial u_{21}}{\partial y} \right),$$

$$p_{11} + \frac{\partial p_{10}}{\partial y} h_{10} + \text{We}\varepsilon^2 \frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^2} - \frac{2\text{Fr}}{\text{Re}} \frac{\partial v_{10}}{\partial y} = p_{21} - \frac{2\mu\text{Fr}}{\text{Re}} \frac{\partial v_{20}}{\partial y},$$

при $y = h$

$$\frac{d^2 U_{20}}{dy^2} h_{21} + \frac{\partial u_{21}}{\partial y} = 0, \quad p_{21} + \frac{\partial p_{20}}{\partial y} h_{20} + \text{We}\sigma\varepsilon^2 \frac{\partial^2 h_{21}}{\partial x^2} - 2 \frac{\mu\text{Fr}}{\text{Re}} \frac{\partial v_{20}}{\partial y} = 0,$$

легко находится, но в силу громоздкости здесь не приводится. Подставляя его в получающиеся из кинематических условий (7) для данного порядка по ε соотношения

$$\frac{\partial h_{10}}{\partial \tau_2} + \frac{\partial h_{11}}{\partial \tau_1} + U_{10} \frac{\partial h_{11}}{\partial x} + \frac{dU_{10}}{dy} h_{10} \frac{\partial h_{10}}{\partial x} + u_{10} \frac{\partial h_{10}}{\partial x} = v_{11} + \frac{\partial v_{10}}{\partial y} h_{10} \quad \text{при } y = 1,$$

$$\frac{\partial h_{20}}{\partial \tau_2} + \frac{\partial h_{21}}{\partial \tau_1} + U_{20} \frac{\partial h_{21}}{\partial x} + u_{20} \frac{\partial h_{20}}{\partial x} = v_{21} + \frac{\partial v_{20}}{\partial y} h_{20} \quad \text{при } y = h,$$

после несложных, но очень громоздких выкладок приходим к системе уравнений

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{\partial h_{11}}{\partial \tau_1} + a_1 \frac{\partial h_{11}}{\partial x} + b_1 \frac{\partial h_{21}}{\partial x} &= f_1(h_{10}, h_{20}), \\ \frac{\partial h_{21}}{\partial \tau_1} + a_2 \frac{\partial h_{21}}{\partial x} + b_2 \frac{\partial h_{11}}{\partial x} &= f_2(h_{10}, h_{20}) \end{aligned}$$

(f_1 и f_2 — функции от h_{10} и h_{20} , и их явный вид дан в приложении).

Для существования решения неоднородной системы (11) необходимо, чтобы функции f_1 и f_2 удовлетворяли определенным условиям разрешимости [2], которые, в свою очередь, зависят от того, какие решения (11) и соответствующей однородной системы (9) рассматриваются. В дальнейшем будем интересоваться только стационарно бегущими в первом приближении (т. е. зависящими от переменных x и τ_1 в сочетании ξ_1 или ξ_2) периодическими или уединенными волнами. В этом случае условие разрешимости системы (11) требует, чтобы f_1 и f_2 удовлетворяли соотношению

$$(12) \quad b_2 f_1 - (a_1 - c_i) f_2 = 0.$$

Исключая в (12) H_{2i} , с помощью следующей из (9) для стационарно бегущей волны связи

$$(13) \quad H_{2i} = \frac{c_i - a_1}{b_1} H_{1i}$$

приходим к одному уравнению для H_{1i} :

$$(14) \quad \frac{\partial H_{1i}}{\partial \tau_2} + A H_{1i} \frac{\partial H_{1i}}{\partial \xi_i} + \text{Re} B \frac{\partial^2 H_{1i}}{\partial \xi_i^2} + \text{We} N \frac{\partial^4 H_{1i}}{\partial \xi_i^4} = 0.$$

Коэффициенты A , $\text{Re}B$, $\text{We}N$ даны в приложении.

С помощью замены

$$(15) \quad \begin{aligned} \xi_i &= (\text{We}|N|/\text{Re}|B|)^{1/2} \xi, & H_{1i} &= H(\text{Re}|B|)^{3/2}/(A(\text{We}|N|)^{1/2}), \\ \tau_2 &= \tau \text{We}|N|/(\text{Re}|B|)^2 \end{aligned}$$

уравнение (14) преобразуется к виду

$$(16) \quad \frac{\partial H}{\partial \tau} + H \frac{\partial H}{\partial \xi} + \text{sgn} B \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \text{sgn} N \frac{\partial^4 H}{\partial \xi^4} = 0,$$

т. е. в зависимости от знаков коэффициентов фактически имеем четыре разных уравнения:

$$(17) \quad \frac{\partial H}{\partial \tau} + H \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial \xi^4} = 0;$$

$$(18) \quad \frac{\partial H}{\partial \tau} + H \frac{\partial H}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^4 H}{\partial \xi^4} = 0;$$

$$(19) \quad \frac{\partial H}{\partial \tau} + H \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^4 H}{\partial \xi^4} = 0;$$

$$(20) \quad \frac{\partial H}{\partial \tau} + H \frac{\partial H}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^4 H}{\partial \xi^4} = 0.$$

Уравнение (17) часто встречается при моделировании нелинейного поведения возмущений в активных средах. В частности, для $Re \sim 1$ к нему приходят при рассмотрении волн на поверхности одной свободно стекающей пленки жидкости [1]. Для данного течения знаки коэффициентов A , B и N зависят от конкретных значений параметров ν , σ , ρ и h , а также от того, какая из двух стационарных по первому приближению волн рассматривается. Кроме того, как ясно из (15), во всех четырех случаях $H_{1i} \sim -H$, если $A < 0$.

Если об уравнении (17) известно, что оно имеет периодические и солитонные решения в виде стационарно бегущих волн (см., например, [1, 3—6]) $H = H(\xi - \sigma\tau)$, то у (18), (19) такие решения отсутствуют. Действительно, легко показать, что для любого периодического по ξ (с длиной волны $-\lambda$) решения уравнения (16) справедливо соотношение

$$(21) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^\lambda H^2 d\xi = \int_0^\lambda \left[\operatorname{sgn} B \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \right)^2 - \operatorname{sgn} N \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2} \right)^2 \right] d\xi.$$

Так как для стационарно бегущей волны левая часть выражения (21) равна нулю, ясно, что для уравнений (18), (19) оно может быть выполнено, только если $H = 0$.

Из (21) следует, что у уравнения (18) любое периодическое по ξ решение будет со временем затухать, а у (19) — неограниченно нарастать.

Уравнение (20) формально эквивалентно (16), так как сводится к нему с помощью замены

$$(22) \quad \tau \rightarrow -\tau, \quad H \rightarrow -H.$$

Поэтому у (20) тоже есть решения в виде стационарно бегущих волн. Но если среди таких периодических решений уравнения (17) существуют, как показано, например, в [1, 6], устойчивые ко всем плоским бесконечно малым возмущениям, а среди неустойчивых много решений, у которых только одна или две моды нарастающие, то все стационарно бегущие решения уравнения (20) сильно неустойчивы. Для них нарастающими будут, как ясно из (22), все (если для соответствующих волновых чисел решения уравнения (17) устойчивы) или почти все такие возмущения.

Из сказанного ясно, что исходное течение (1) наиболее устойчиво к малым, но конечным двумерным возмущениям тогда, когда оно имеет параметры, при которых для любого из двух стационарно бегущих решений системы (9) коэффициенты A , B и N таковы, что (14) для них приводится к уравнению (18). В этом случае возмущения затухают со временем.

Если к (18) сводится описание эволюции только одной из волн (13), а для другой имеет место уравнение (17), то на поверхностях раздела будет наблюдаться достаточно развитая волновая картина.

Если хотя бы для одной из волн (13) уравнение (14) может быть сведено к уравнению (20), значит, волновая картина будет сильно неустойчива и в результате неустойчиво и исходное течение (1).

Ситуация наиболее неустойчива, если параметры течения (1) таковы, что для какой-нибудь из волн (13) приходим к уравнению (19). В этом случае возмущения быстро разовьются до амплитуд, при которых дальнейшее рассмотрение в рамках данного приближения будет неправомерно.

Приведенные рассуждения не являются строгими, так как они основаны на анализе только некоторого класса возмущений — тех, которые

удовлетворяют соотношению (13). Для исследования устойчивости течения (1) относительно всех возможных двумерных возмущений нужно брать общее решение системы (9) и для него выводить из (11) соответствующую систему второго приближения. Однако такое рассмотрение выходит за рамки данной работы.

Несмотря на ограниченность настоящего подхода, результаты, вытекающие из анализа уравнения (14), можно использовать, по крайней мере как оценочные.

При изучении совместного течения пленок конкретных жидкостей коэффициенты в (14) будут функциями только их относительной толщины. Поэтому, подбирая соответствующим образом толщины этих пленок, их режимом течения в определенных пределах можно управлять.

Так, например, расчеты показывают, что для системы вода — бензол для одной из волн (13) при всех значениях h из диапазона $[0,5 \leq h \leq 5]$ уравнение (14) приводится к (20). Для второй волны при $0,5 \leq h \leq 3,5$ имеет место уравнение (17), а при $h > 3,5$ (14) сводится к (18). С учетом приведенных выше оговорок можно ожидать, что в последнем случае такая двуслойная пленка будет более устойчива к возмущениям, чем в первом.

Противоположным примером может служить бензольно-водная пленка. У нее при значениях относительной толщины $h \geq 2,8$ эволюция одной из волн описывается уравнением (19), т. е. здесь нелинейные эффекты не останавливают рост возмущений, и такая пленка, по-видимому, будет быстро разрушаться.

Если первой пленкой служит оливковое масло, а второй — вода, то для всех h из исследованного интервала для одной из волн справедливо уравнение (18), а для второй — (17). При этом на интервале $[0,5 \leq h \leq 1,1]$ для последней волны $A < 0$. Нетрудно показать, что тогда на границе раздела пленок возможны любопытные волновые профили.

Действительно, как известно [3, 5, 6], уравнение (17) имеет семейства периодических стационарно бегущих решений, переходящих в пределе при стремлении волнового числа α к нулю в солитонные решения. У этих солитонов $|H_{\min}| > |H_{\max}|$, поэтому их можно назвать солитонами-вмятинами [6]. Передний фронт у них монотонный, а на заднем есть затухающие осцилляции. Так как для рассматриваемых толщин $A < 0$, то из (14), (17) и (15) следует, что, когда волновое число α достаточно мало, возможны периодические режимы, у которых профили имеют вид возвышений стационарно бегущих «положительных» солитонов-возвышений. У них будут монотонный передний и осциллирующий задний фронты. Эта ситуация противоположна случаю свободно стекающей одиночной пленки, где в силу положительности всех коэффициентов исходного уравнения типа (14) такие профили в принципе невозможны. Там у «положительных» солитонов осцилляции всегда находятся на переднем фронте [3, 5, 6].

Выражаю благодарность академику В. Е. Накорякову за постановку задачи.

Приложение

$$\begin{aligned} r_1 &= a [(1 - \rho) h_{10} + h_{20}/v], \quad r_2 = ah_{20}/v, \\ r_3 &= a [\rho(h - 2) + 1 - (1 - h)/v] h_{10} + (\mu - 1) h_{20}/v, \\ r_4 &= \frac{1}{2} \left[-\frac{\partial r_3}{\partial x} + \frac{a}{v} (1 - h)(1 - \mu) \frac{\partial h_{10}}{\partial x} \right], \\ f_1 &= -\frac{\partial h_{1c}}{\partial \tau_2} + a [\rho(3 - h) - 2] h_{10} \frac{\partial h_{10}}{\partial x} + B_1 \frac{\partial^2 h_{10}}{\partial x^2} + D_1 \frac{\partial^2 h_{10}}{\partial x \partial \tau_1} - \\ &- \frac{aWe}{3} \frac{\partial^4 h_{10}}{\partial x^4} - \rho a \frac{\partial}{\partial x} (h_{10} h_{20}) + B_{12} \frac{\partial^2 h_{20}}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 h_{20}}{\partial x \partial \tau} - \frac{aWe\sigma}{6} (3h - i) \frac{\partial^4 h_{20}}{\partial x^4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2 = & -\frac{\partial h_{20}}{\partial \tau_2} + \frac{2a}{v} [1 - h - \mu] h_{20} \frac{\partial h_{20}}{\partial x} + B_2 \frac{\partial^2 h_{20}}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 h_{20}}{\partial x \partial \tau_1} + N_2 \frac{\partial^4 h_{20}}{\partial x^4} + \\
& + \frac{z}{v} [2(h-1)(\mu-1) + v - \mu] \frac{\partial}{\partial x} (h_{10} h_{20}) + 2a(\rho-1) h_{10} \frac{\partial h_{10}}{\partial x} - \\
& - \frac{aWe\sigma}{6} (3h-1) \frac{\partial^2 h_{10}}{\partial x^2} + B_{21} \frac{\partial^2 h_{10}}{\partial x^2} + D_{21} \frac{\partial^2 h_{10}}{\partial x \partial \tau}, \\
B_1 = & \operatorname{Re} a^2 \left\{ \frac{3(1-\rho)}{40} (1 + \rho(h-1)) + \frac{c}{12v^3} [(\mu(h-2) + 1 + v - h) \times \right. \\
& \times [3(h-1)(v-1 + 2(h-1)(1-\mu)) + h^3 - 1] + \frac{z}{2} (\mu(2h-3) + v + \\
& \left. + 2(1-h)(1-h)^2) \right\}, \\
D_1 = & \operatorname{Re} a \left[\frac{5(1-\rho)}{24} + \frac{1-h}{2\mu} (\mu(h-2) + v + 1 - h) \right], \\
B_{12} = & \operatorname{Re} a^2 \rho \left\{ \frac{3}{40} (1 + \rho(h-1)) + \frac{1}{v^2} [(v-1 + 2(h-1)(1-\mu))(h-1) \times \right. \\
& \left. \times (h-1 + 2\mu)/8 + (h^3 - 1)(h + \mu - 1)/12 - (\mu-1)(h-1)^2/8] \right\}, \\
D_{12} = & \operatorname{Re} a \rho \left[\frac{5}{24} + \frac{(h-1)(h-1 + 2\mu)}{4v} \right], \\
N_2 = & \frac{aWe\sigma}{6\mu} ((1-3\mu)h^2 + (6h^2 - 9h + 2)(1-\mu)), \\
B_2 = & \operatorname{Re} a^2 \left\{ \rho(1 + \rho(h-1)) \left(\frac{h}{8} - \frac{1}{20} \right) + \frac{1}{2v^3} [(v-1 + 2(h-1)(1-\mu)) \times \right. \\
& \left. \times (S_1 + (\mu-1)S_3) + 2hS_2 + (\mu-1)(S_1 + (2-h)S_3)] \right\}, \\
D_2 = & \operatorname{Re} a \left[\rho \left(\frac{5}{24} - \frac{h-1}{3} \right) + (S_1 + S_3(\mu-1))/v^2 \right], \\
B_{21} = & \operatorname{Re} a^2 \left\{ (1-\rho)(1 + \rho(h-1)) \left(\frac{h}{8} - \frac{1}{20} \right) + \frac{1}{2v^3} [(v-1 + 2(h-1) \times \right. \\
& \left. \times (1-\mu))S_3 + 2S_2] (\mu(h-2) + v + 1 - h) - (hS_3 - S_1)(\mu(3-2h) - \right. \\
& \left. - v - 2(1-h)) \right\}, \\
D_{21} = & \operatorname{Re} a \left\{ \left(\frac{5}{24} - \frac{h-1}{3} \right) (1-\rho) + \frac{1}{v^2} (\mu(h-2) + v + 1 - h) S_3 \right\}, \\
S_1 = & \frac{1-h^2}{24} + \mu \frac{h^2-1}{4} + \frac{(h^2-1)h^2}{4} + (1-h) \left(\mu \frac{1-h^2}{2} - \frac{1}{6} + \frac{h^2}{2} \right), \\
S_2 = & \frac{1-h^5}{120} + \mu \frac{h^3-1}{12} + \frac{(h^2-1)h^3}{12} + (1-h) \left(\mu \frac{1-h^2}{2} - \frac{1}{24} + \frac{h^3}{6} \right), \\
S_3 = & \frac{1-h^3}{6} + \mu \frac{h-1}{2} + \frac{h^2-1}{2} h + (1-h) \left(\mu(1-h) - \frac{1}{2} + h \right), \\
P = & (2c_i - a_1 - a_2)/(a_2 - c_i), \quad P_1 = (c_i - a_1)/(c_i - a_2), \\
A = & \{ \rho(3-h) - 2(a_1 - c_i)(\rho-1)/b_2 - 2\rho(c_i - a_1)/b_1 - 2 + 2P_1 \times \\
& \times (2(h-1)(\mu-1) + v - \mu + (c_i - a_1)(1-h-\mu)/v) \} a/P, \\
\operatorname{Re} B = & \{ E_1 - c_i D_1 + (B_{12} - c_i D_{12})(c_i - a_1)/b_1 + P_1(B_2 - c_i D_2) - \\
& - (a_1 - c_i)(B_{21} - c_i D_{21})/b_2 \} / P, \\
\operatorname{We} N = & -\{ aWe(2 + \sigma(3h-1)(c_i - a_1)(1/b_1 + 1/b_2))/6 - P_1 N_2 \} / P.
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1974. — № 3.
2. Найфэ А. Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984.

3. Цвелодуб О. Ю. Стационарные бегущие волны на пленке, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1980. — № 4.
4. Демехин Е. А. Ветвление решения задачи о стационарных бегущих волнах в слое вязкой жидкости на наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1983. — № 3.
5. Демехин Е. А., Шкадов В. Я. О солитонах в диссипативных средах // Гидродинамика и теплообмен течений жидкости со свободными поверхностями: Сб. науч. тр. — Новосибирск: ИТ СО АН СССР. — 1985.
6. Трифонов Ю. Я., Цвелодуб О. Ю. О стационарно бегущих решениях эволюционного уравнения для возмущений в активно-диссипативной среде. — Новосибирск, 1988. — (Препр./ИТ СО АН СССР; 188—88).

г. Новосибирск

Поступила 25/VII 1988 г.,
в окончательном варианте — 28/II 1989 г.

УДК 532.5

О. С. Рыжов, И. В. Савенков

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ ТРАНСЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ ВНЕШНЕГО ПОТОКА

Концепция свободного взаимодействия пограничного слоя [1—3] оказалась весьма плодотворной в различных областях механики жидкости и газа [4, 5], в том числе в теории гидродинамической устойчивости [6, 7]. Она описывает структуру волн Толлмина — Шлихтинга в пределе больших чисел Рейнольдса и позволяет решить ряд новых задач о восприимчивости вязкого пристеночного подслоя по отношению к трехмерным возмущениям, генерируемым локализованным в пространстве источником [8, 9].

Как известно, однако, теория свободного взаимодействия в своем классическом виде предсказывает устойчивость прямых волн, распространяющихся в направлении набегающего потока, при условии, что его скорость сверхзвуковая. С другой стороны, предложенные к настоящему времени уравнения для трансзвукового диапазона скоростей оказались неприменимыми к решению задач об устойчивости вязких течений, хотя возникновение отрыва с их помощью устанавливается правильно [10]. Очевидно, требуется дополнительный анализ исходной системы уравнений Навье — Стокса в указанном диапазоне с целью сохранить члены, определяющие потерю устойчивости пограничного слоя. Такой анализ излагается ниже.

1. Уравнения движения. Рассмотрим обтекание плоской пластинки равномерным потоком сжимаемого газа со скоростью U_∞^* , мало отличающейся от скорости a_∞^* распространения звуковых волн. Допустим, что на расстоянии L^* от ее передней кромки имеется локальная неоднородность (шероховатость), течение в окрестности которой соответствует режиму свободного взаимодействия [1—3]. Пусть ν_∞^* — кинематическая вязкость газа. Введем число Рейнольдса $R = U_\infty^* L^* / \nu_\infty^* \rightarrow \infty$ и выразим через него малый параметр $\varepsilon = R^{-1/8}$. Положим $\delta = (M_\infty^2 - 1) / K_\infty'$, $K_\infty' = \text{const}$ и в дальнейшем считаем δ вторым малым параметром, фиксируя тем самым околосвуковой характер набегающего потока с числом Маха M_∞ , близким к 1. Задача состоит в установлении такой связи между ε и δ , при которой получающиеся в результате приближенные уравнения были способны описать устойчивость пограничного слоя и развитие в нем самовозбуждающихся колебаний.

В режиме свободного взаимодействия время t^* и пространственные координаты x^* , y^* нормируются следующим образом [1—3]:

$$(1.1) \quad t^* = (L^*/U_\infty^*) \varepsilon^2 \delta^{-1/4} \beta^{-1} t', \\ x^* = L^* (1 + \varepsilon^3 \delta^{-3/8} x'), \quad y^* = L^* \varepsilon^5 \delta^{-1/8} y',$$

где дополнительный параметр β определяется масштабом частоты, а компоненты u^* , v^* и давление p^* раскладываются в асимптотические последовательности

$$(1.2) \quad u^* = U_\infty^* [\varepsilon \delta^{-1/8} u'(t', x', y') + \dots], \\ v^* = U_\infty^* [\varepsilon^3 \delta^{1/8} v'(t', x', y') + \dots], \quad p^* = p_\infty^* + \rho_\infty^* U_\infty^{*2} [\varepsilon^2 \delta^{-1/4} p'(t', x', y') + \dots].$$

© 1990 Рыжов О. С., Савенков И. В.

5 ПМТФ № 2, 1990 г.

65