СКВАЖИНЫ В ПРОИЗВОЛЬНОМ ЧИСЛЕ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ НАПОРНЫХ ГОРИЗОНТОВ

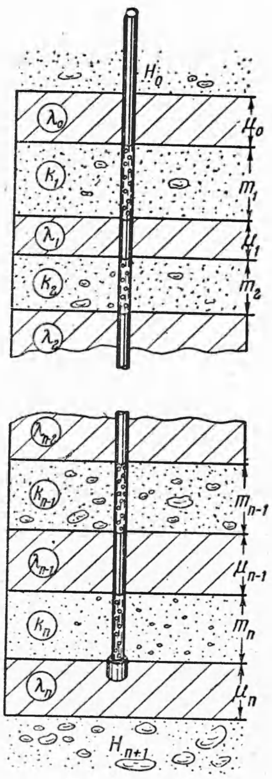
В. Н. Эмих

(*Новосибирск*)

Работы А. Н. Мятиева [1–3] и Н. К. Гиринского [4] положили начало широкому исследованию фильтрации в слоистых грунтах при помощи гидравлической теории. П. Я. Полубариновa-Кочина рассмотрела [5] задачу о фильтрации в трех взаимосвязанных горизонтах.

Фильтрацию в двух пластах исследовала Т. И. Матвеенко [6]. Решение этих задач для осесимметричной фильтрации выражается посредством функции Бесселя нулевого порядка чисто мнимого аргумента. Ниже исследуются некоторые общие вопросы, относящиеся к произвольному случаю n взаимосвязанных пластов.

Пусть скважина эксплуатирует n напорных горизонтов, сообщающихся между собой через слабопроницаемые прослойки (фигура). В нулевом и $(n+1)$-м горизонтах напоры H_0 и H_{n+1} считаем постоянными. Примем ось скважины за полярную ось. При установившейся фильтрации напоры h_i в водоносных горизонтах удовлетворяют следующей системе уравнений:



$$
\begin{gathered}
\beta_1 \Delta h_1 - (\gamma_0 + \gamma_1) h_1 + \gamma_1 h_2 = -\gamma_0 H_0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\beta_i \Delta h_i + \gamma_{i-1} h_{i-1} - (\gamma_{i-1} + \gamma_i) h_i + \gamma_i h_{i+1} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\beta_n \Delta h_n + \gamma_{n-1} h_{n-1} - (\gamma_{n-1} + \gamma_n) h_n = -\gamma_n H_{n+1}
\end{gathered}
\qquad (1)
$$

Здесь

$$\beta_i = k_i m_i, \qquad \gamma_i = \lambda_i / \mu_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Если положить $\Delta h_i = 0$ (скважина не работает), то (1) превратится в систему алгебраических уравнений первого порядка. Ниже будет показано, что определитель этой системы отличен от нуля и, следовательно, из системы (2) при $\Delta h_i = 0$ однозначно определяется частное решение

$$h_i^{(1)} = H_i = \mathrm{const}$$

отвечающее статическому состоянию пластов. Подставив это решение в i-е уравнение системы (1), получим

$$H_{i+1} - H_i = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} (H_i - H_{i-1})$$

Отсюда видно, что статические напоры изменяются от пласта к пласту монотонно.

Общее решение $h_i^{(2)}$ однородной системы, соответствующей системе (1), будем искать в виде

$$h_i^{(2)} = C_i K_0 (\omega r) + D_i I_0 (\omega r)$$

где $I_0 (\omega r)$ и $K_0 (\omega r)$ — функции Бесселя первого и второго рода мнимого аргумента нулевого порядка.

Если потребовать ограниченности $h_i^{(2)}$ при $r \to \infty$, то следует положить $D_i = 0$ (так как $\lim I_0(\omega r) = \infty$ при $r \to \infty$). Подставляя $h_i^{(2)}$ в однородную систему, соответствующую (1), и учитывая, что $\Delta h_i = C_i \omega^2 K_0(\omega r)$, получим после сокращения на $K_0(\omega r)$

$$\gamma_{i-1} C_{i-1} + (\beta_i \omega^2 - \gamma_{i-1} - \gamma_i) C_i + \gamma_i C_{i+1} = 0 \qquad (2)$$
$$(i = 1, \ldots, n, \; C_0 = C_{n+1} = 0)$$

Для существования нетривиального решения C_i системы (2) должен равняться нулю ее определитель. Это дает для ω^2 следующее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \beta_1\omega^2-\gamma_0-\gamma_1 & \gamma_1 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \beta_2\omega^2-\gamma_1-\gamma_2 & 0 \ldots 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots \gamma_{n-2} & \beta_{n-1}\omega^2-\gamma_{n-2}-\gamma_{n-1} & \gamma_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & \gamma_{n-1} & \beta_n\omega^2-\gamma_{n-1}-\gamma_n \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Обозначим определитель-полином, стоящий в левой части уравнения (3), через $\varphi_n(t)$. Разлагая его по элементам последнего столбца, получим рекуррентное соотношение

$$\varphi_n(t) = (\beta_n t - \gamma_{n-1} - \gamma_n)\,\varphi_{n-1}(t) - \gamma_{n-1}^2 \varphi_{n-2}(t) \qquad (\varphi_0(t) \equiv 1) \qquad (4)$$

Теорема. Уравнение (3) имеет n простых положительных корней.

При доказательстве используем следующие свойства последовательности полиномов $\varphi_k(t)$ $(k = n, n-1, \ldots, 1, 0)$, предварительно убедившись в их справедливости.

1°. Соседние полиномы системы $\{\varphi_k(t)\}$ не имеют общих корней.

В самом деле, если бы α было общим корнем каких-либо соседних полиномов φ_k и φ_{k-1}, то α, как видно из (4), было бы также корнем полиномов $\varphi_{k-2}, \ldots, \varphi_2, \varphi_1$. В равенстве (4) положим $n = 2$, $t = \alpha$. Тогда $\gamma_1 = 0$, что неверно.

2°. Последний полином $\varphi_0(t)$ системы $\{\varphi_k(t)\}$ не имеет действительных корней. Это свойство очевидно: $\varphi_0(t) \equiv 1$.

3°. Если $\varphi_k(\alpha) = 0$ $(k < n)$, то $\varphi_{k+1}(\alpha)$ и $\varphi_{k-1}(\alpha)$ разных знаков.

Свойства пп. 1°—3° характеризуют последовательность Штурма ([7], § 43), для которой, кроме них, является обязательным следующее условие.

4°. При переходе через действительный корень полинома $\varphi_n(t)$ произведение $\varphi_n(t)\,\varphi_{n-1}(t)$ меняет знак с минуса на плюс.

Непосредственно проверить это свойство для $\{\varphi_k(t)\}$ не удается, так как нельзя исходить из существования действительных корней $\varphi_n(t)$: это как раз предстоит доказать.

Опираясь на соотношение (4), можно показать методом полной математической индукции, что

$$\varphi_k(0) = (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \prod_{l=0}^{k} \frac{\gamma_l}{\gamma_i} \qquad (5)$$

Теперь видно, что при $\Delta h_i = 0$ определитель Δ_0 системы (1) отличен от нуля, ибо $\Delta_0 = \varphi_n(0)$.

Так как все $\gamma_k > 0$, то согласно (5) число перемен знаков в системе $\{\varphi_k(t)\}$ при $t = 0$ равно n, начиная же с некоторого t все $\varphi_k(t) > 0$, так как коэффициенты при их старших членах $\beta_1, \ldots, \beta_k > 0$. Итак, при изменении t от 0 до ∞ число перемен знаков в системе $\{\varphi_k(t)\}$ уменьшается от h до 0.

Известно [7], что при переходе через корень одного из промежуточных полиномов системы Штурма происходит только перераспределение знаков в системе, но число перемен знаков не изменяется. При доказательстве этого факта используются только свойства пп. 1° — 3° системы Штурма, а так как ими обладает и наша система $\{\varphi_n(t)\}$, то для нее отмеченное обстоятельство также имеет место.

Уменьшение числа перемен знаков в системе $\{\varphi_k(t)\}$ может произойти только при переходе через корень полинома $\varphi_n(t)$, а значит, все корни полинома положительны.

Наконец, согласно свойству п. 1°, переход через корень полинома $\varphi_n(t)$ может сопровождаться только одной потерей перемен знаков в системе $\{\varphi_k(t)\}$, то все корни полинома $\varphi_n(t)$ простые. Теорема доказана.

Теперь можно также убедиться в справедливости свойства п. 4° для системы $\{\varphi_k(t)\}$.

Для каждого корня ω_k^2 уравнения (3) ранг матрицы системы (2) равен $n - 1$, ибо по свойству п. 1° $\varphi_{n-1}(\omega_k^2) \neq 0$. Следовательно, для каждого ω_k система (2) имеет решение $\{C_{1k}, C_{2k}, \ldots, C_{nk}\}$, определяемое с точностью до постоянной.

Можно, например, выразить все постоянные $C_{2k}, \ldots, C_{nk}$ через C_{1k}

$$C_{ik} = \alpha_{ik} C_{1k} \qquad (i = 1, \ldots, n, \ \alpha_{1k} = 1)$$

Тогда общее решение системы (1), ограниченное на ∞, можно представить так:

$$h_i = H_i + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} C_{1k} K_0(\omega_k r) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

Постоянные C_{1k} определятся заданием условий на стенке скважины в каждом пласте.

Для системы m скважин решение определится сложением решений вида (6)

$$h_i = H_i + \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} C_{1k}^{l} K_0(\omega_k r_l) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

Здесь r_l — расстояние от рассматриваемой точки до оси l-й скважины.

Если l-я скважина не эксплуатирует i-й горизонт, то h_i не должна иметь особенности при $r_l = 0$.

Записывая асимптотическое представление h_i при малых r_l

$$h_i \sim -\ln r_l \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} C_{1k}^{l}$$

видим, что в этом случае должно выполняться условие

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} C_{1k}^{l} = 0$$

Остановимся на случае изолированной системы взаимосвязанных горизонтов: $\gamma_0 = \gamma_n = 0$. Система (1) имеет в этом случае при $\Delta h_i = 0$ частное решение $h_i^{(1)} = H$, т. е. в статическом состоянии во всех пластах устанавливается одинаковый напор.

Из (5) видно, что $\varphi_n(0) = 0$, т. е. уравнение (3) имеет в этом случае нулевой корень (можно показать, что он простой). Пусть это будет ω_n. Корню $\omega_n = 0$ отвечает частное решение $\ln r$. Теперь уже h_i неограниченно растет с r. Наряду с функциями $K_0(\omega_k r)$ следует ввести в общее решение также функции $I_0(\omega_k r)$.

Для одной скважины имеем

$$h_i = H + C \ln r + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{ik}[C_{1k}K_0(\omega_k r) + D_{1k}I_0(\omega_k r)] \quad (i = 1, \ldots, n) \quad (\alpha_{1k} = 1)$$

Решение следует рассматривать в ограниченной области и, кроме условий на стенке скважины, задать еще n условий для определения $2n$ постоянных H, C, C_{1k} и D_{1k} ($k = 1, \ldots, n-1$).

В случае совершенной скважины в одном изолированном пласте (схема Дюпюи) имеем [8]

$$h = H + C \ln r$$

Для определения констант C и H задаются два условия: на стенке скважины и на контуре питания.

Автор благодарит П. Я. Полубаринову-Кочину за обсуждение задачи.

Институт гидродинамики СО АН СССР Поступила 25 V 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Мятиев А. Н. Действие колодца в напорном басссейне подземных вод. Изв. Туркм. ф-л АН СССР, 1946, № 3.
2. Мятиев А. Н. Напорный комплекс подземных вод и колодцы. Изв. АН СССР, ОТН, 1947, № 9.
3. Мятиев А. Н. Задача о колодцах в горизонте грунтовых вод. Изв. АН СССР, ОТН, 1948, № 3.
4. Гиринский Н. К. Некоторые вопросы динамики подземных вод. Гидрогеология и инженерная геология. Сб. статей, 1947, № 9.
5. Полубаринова-Кочина П. Я. К гидравлической теории колодцев в многослойной среде. ПММ, 1947, т. XI, вып. 3.
6. Матвеенко Т. И. Задача о фильтрации в колодец из одного и двух пластов. Инж. сб., т. XIV, 1953.
7. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
8. Эмих В. Н. О взамодействии скважин в слоистых пластах. ПМТФ, 1961, № 6.