

образом,  $X$  растет медленнее, чем по диффузионному закону, и сопротивление разряда по парам для открытой системы меньше, чем для закрытой.

Рассмотрим вопрос о том, когда плазму можно считать достаточно плотной и для остывания ее пользоваться результатами п. 1, а когда — п. 2, для чего, как уже говорилось, следует сравнить сопротивление разряда по водородной плазме и по парам металла (сравнивая толщины осаждаемой плазмы, рассчитанные по формулам (1.11) и (2.5)). Определяющим будет режим, для которого толщина оказывается меньше, хотя, если эти величины не сильно отличаются, можно ожидать заметного влияния неучтенного режима (как, например, для случая на рис. 4), уменьшающего толщину осаждаемой плазмы. В любом из этих режимов, однако, если замагниченность плазмы достаточно велика, эффективная теплопроводность может заметно превышать классическую.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Векштейн Г. Е. Магнитотепловые процессы в плотной плазме // Вопросы теории плазмы/Под ред. Б. Б. Кадомцева.— М.: Энергоатомиздат, 1987.— Вып. 15.
2. Гаранин С. Ф. Разряд, возникающий при вытекании магнитного потока из плазмы в изолятор // ПМТФ.— 1987.— № 6.
3. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича.— М.: Атомиздат, 1963.— Вып. 1.
4. Epperlein E. M., Haines M. G. Plasma transport coefficients in a magnetic field by direct numerical solution of the Fokker — Planck equation // Phys. Fluids.— 1986.— V. 29, N 4.
5. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Наука, 1966.
6. Силин В. П. Введение в кинетическую теорию газов.— М.: Наука, 1971.
7. Гаранин С. Ф. Диффузия сильного магнитного поля в плотную плазму // ПМТФ.— 1985.— № 3.

г. Москва

Поступила 7/IX 1988 г.

УДК 621.65.03:621.59

Н. П. Авдеев, Г. И. Бумагин, А. Ф. Дудов, Р. К. Романовский

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕЗОНАНСА В ИОННО-КОНВЕКЦИОННОМ НАСОСЕ

В [1] описано наблюдавшееся авторами в эксперименте явление резонанса в ионно-конвекционном насосе (ИКН) с пульсирующим напряжением: при определенном соотношении между частотой пульсации, скоростью нейтрального компонента и длиной зоны переноса (см. формулу (3) в [1]) наблюдается резкое увеличение перепада давлений в ступени ИКН. В настоящей работе построена математическая модель этого явления.

**1. Описание модели.** Рассмотрим нестационарное гидравлическое приближение \* системы уравнений ЭГД для ступени ИКН

$$(1.1) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{F} \frac{\partial}{\partial x} \left[ F_i \frac{E^2}{2} \right] - \frac{\partial p}{\partial x} - \xi \frac{\rho v^2}{2d},$$

$$\frac{\partial (F_i E)}{\partial x} = \frac{F_i q}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad F_i E = \frac{\partial (F_i U)}{\partial x}, \quad \frac{\partial (F_i q)}{\partial t} + \frac{\partial (F_i j)}{\partial x} = 0, \quad j = qv + qbE$$

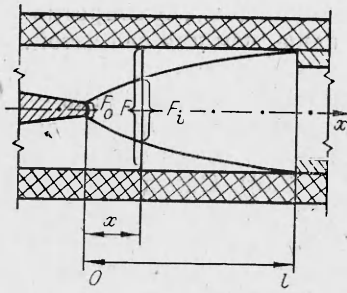
при краевых условиях

$$(1.2) \quad U|_{x=0} = 0, \quad U|_{x=l} = U_0(t);$$

$$(1.3) \quad I|_{x=0} = I_0(t), \quad \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{x=0} = 0;$$

$$(1.4) \quad U_0(t) = A \left| \sin \frac{\omega t}{2} \right|, \quad I_0(t) = \begin{cases} k_0 U_0 (U_0 - U^*), & U_0 \geq U^*, \\ 0, & U_0 \leq U^*. \end{cases}$$

\* Уравнения (1.1) выводятся из уравнений ЭГД для элемента канала и обычных допущений гидравлики аналогично [2, гл. 1, 3, § 2.2].



Р и с. 1

Здесь  $A, \omega$  — амплитуда и частота пульсации питающего напряжения;  $l$  — длина зоны переноса;  $F, d$  — площадь и диаметр поперечного сечения канала;  $F_i = F_i(x, t)$  — площадь поперечного сечения зоны объемного заряда в ступени ИКН (рис. 1);  $v, p$  — средние по сечению скорость и давление для нейтрального компонента;  $\rho$  — плотность;  $v_*$  — характерная скорость;  $\xi$  — коэффициент гидравлических потерь;  $E, U, q, j, I$  — средние по сечению  $F_i$  электрическая напряженность, потенциал, плотность зарядов, плотность

тока проводимости и полного тока;  $\epsilon_0, \epsilon$  — электрическая постоянная и диэлектрическая проницаемость;  $b$  — коэффициент подвижности ионов;  $U^*$  — напряжение зажигания короны. Эмпирическая формула (1.4) для  $I_0(t)$ , включая вычисление константы  $k_0$ , обсуждается в [2, 4]. В системе (1.1) учтено, что  $F_i = \text{const}$ .

Примем следующие предположения.

1. Пульсация питающего напряжения «не успевает» влиять на скорость нейтрального компонента:  $\partial v / \partial t \ll 1$ . Отсюда с учетом первого уравнения (1.1) вытекает

$$(1.5) \quad v = \text{const}.$$

2. Вследствие пульсации ионы движутся вдоль зоны переноса порциями (см. [1]) со скоростью порядка (1.5). Формализуя это допущение, получим  $q(x, t)$ , или, что равносильно, частота электрической релаксации

$$(1.6) \quad \beta(x, t) = bq / \epsilon \epsilon_0$$

(см. [5]) периодична по обоим аргументам с периодами

$$(1.7) \quad T = 2\pi\omega^{-1}, \quad X = vT.$$

3. Значения  $F_i$  при  $x = 0, x = l$  стабильны:

$$(1.8) \quad F_i|_{x=0} = F_0 \approx 2\pi r_0, \quad F_i|_{x=l} = F$$

( $r_0$  — радиус кривизны коронирующего острия). Второе равенство (1.8) выполняется при скоростях нейтрального компонента  $v \leq 10$  м/с, характерных для реальных конструкций ИКН.

4. Вне зоны объемного заряда  $E \ll 1$  (это согласуется с принятой в работе квазиодномерной моделью (1.1) ступени ИКН; см. [3, с. 72, 142]).

2. **Электрический резонанс в ступени ИКН.** Вводя в (1.1) величины  $\widehat{E} = F_i E$  и аналогично  $\widehat{U}, \widehat{q}, \widehat{j}$  (представляющие собой с учетом обозначений п. 1 и допущения (1.4) интегралы от соответствующих электрических величин по поперечному сечению канала) и учитывая (1.6), получим

$$(2.1) \quad \frac{\partial \widehat{E}}{\partial x} = \frac{1}{\epsilon \epsilon_0} \widehat{q} \frac{\partial \widehat{q}}{\partial t} + \frac{\partial \widehat{j}}{\partial x} = 0, \quad \widehat{E} = -\frac{\partial \widehat{U}}{\partial x}, \quad \widehat{j} = v \widehat{q} + \epsilon \epsilon_0 \beta \widehat{E}.$$

В силу (1.2), (1.8)

$$(2.2) \quad \widehat{U}|_{x=0} = 0, \quad \widehat{U}|_{x=l} = \widehat{U}_0(t) = F U_0(t).$$

Покажем, что при достаточно большой частоте пульсации ( $\omega \gg 1$ ) интеграл  $\widehat{U}(x, t)$  приближенно удовлетворяет уравнению

$$(2.3) \quad \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial x^2} + \bar{\beta} \frac{\partial \widehat{U}}{\partial t} - v \bar{\beta} \frac{\partial \widehat{U}}{\partial x} = \frac{v}{\epsilon \epsilon_0} F_0 \bar{I}_0,$$

где  $\bar{\beta}, \bar{I}_0$  — средние по периодам (1.7) значения функций (1.4), (1.6):

$$(2.4) \quad \bar{\beta} = \frac{1}{XT} \int_0^X \int_0^T \beta(x, t) dx dt, \quad \bar{I}_0 = \frac{1}{T} \int_0^T I_0(t) dt.$$

Из двух первых уравнений (2.1) вытекает

$$(2.5) \quad (\partial/\partial x)(\varepsilon\varepsilon_0\partial\widehat{E}/\partial t + \widehat{j}) = 0.$$

Так как выражение в скобках есть  $\widehat{I} = F_1 I$ , то из (1.8), (2.5) и первого краевого условия (1.3) имеем  $\varepsilon\varepsilon_0\partial\widehat{E}/\partial t + \widehat{j} = F_0 I_0(t)$  или с учетом последнего и первого уравнений (2.1)

$$(2.6) \quad \frac{\partial\widehat{E}}{\partial t} + v\frac{\partial\widehat{E}}{\partial x} + \beta(x, t)\widehat{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} I_0(t).$$

Используя периодичность  $\beta$ ,  $I_0$  с периодами (1.7) и применяя к (2.6) принцип усреднения для гиперболических уравнений [6, 7], находим, что при достаточно большой  $\omega$  решения (2.6) близки равномерно по  $x, t$  к решениям усредненного уравнения

$$(2.7) \quad \frac{\partial\widehat{E}}{\partial t} + v\frac{\partial\widehat{E}}{\partial x} + \bar{\beta}\widehat{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} F_0\bar{I}_0$$

( $\bar{\beta}$ ,  $\bar{I}_0$  — константы (2.4)). Выполняя последовательно в (2.7) дифференцирование по  $t$ , интегрирование по  $x$  на  $[0, l]$  с учетом третьего уравнения (2.1) и второго краевого условия (1.3) и учитывая вытекающее из (2.1), (2.7) равенство

$$\frac{\partial\widehat{E}}{\partial t} = v\frac{\partial^2\widehat{U}}{\partial t^2} - \bar{\beta}\frac{\partial\widehat{U}}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} F_0\bar{I}_0,$$

получим (2.3).

Рассмотрим краевую задачу (2.2), (2.3). Замена  $\widehat{U} \rightarrow u$

$$(2.8) \quad \widehat{U} = u \exp\left(-\frac{\bar{\beta}x}{v}\right) + \frac{x}{l}\widehat{U}_0$$

приводит ее к стандартному виду

$$(2.9) \quad Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bar{\beta} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\bar{\beta}^2}{4} u = f(x, t), \quad u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,$$

где

$$(2.10) \quad f(x, t) = \exp\left(\frac{\bar{\beta}x}{2v}\right) \left[ -\frac{x}{l} (\widehat{U}'_0 + \bar{\beta}\widehat{U}'_0) + \frac{v\bar{\beta}}{l} \widehat{U}_0 + \frac{v}{\varepsilon\varepsilon_0} F_0\bar{I}_0 \right].$$

Заметим, что последнее слагаемое в квадратных скобках в (2.10) с учетом формул (1.4), (1.8), (2.2) и малости  $r_0, k_0$  (см. [2, 4]) мало по сравнению с остальными и что ввиду наличия в уравнении (2.9) «трения»  $\bar{\beta}\partial u/\partial t$  все решения однородной краевой задачи  $Lu = 0, u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0$  экспоненциально убывают при  $t \rightarrow +\infty$ , поэтому достаточно вычислить установившееся решение краевой задачи (2.9).

Отбрасывая в (2.10) малое слагаемое  $(v/\varepsilon\varepsilon_0)F_0\bar{I}_0$ , заменяя  $\widehat{U}_0(t)$  старшей гармоникой и представляя затем  $f(x, t)$  и решение (2.9) при фиксированном  $t$  рядами по синусам на  $[0, l]$ , после несложных вычислений (см. аналогично [8, с. 136]) найдем

$$(2.11) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \omega t + b_n \sin \omega t + \frac{r_n}{\omega_n^2} \right) \sin \frac{\pi n x}{l},$$

где

$$(2.12) \quad \omega_n = \sqrt{\left(\frac{n v \pi}{l}\right)^2 + \frac{\bar{\beta}^2}{4}} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$(2.13) \quad a_n = \frac{c_n(\omega_n^2 - \omega^2) - d_n \bar{\beta} \omega}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \bar{\beta}^2 \omega^2}, \quad b_n = \frac{c_n \bar{\beta} \omega + d_n(\omega_n^2 - \omega^2)}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \bar{\beta}^2 \omega^2};$$

$$(2.14) \quad c_n = -\frac{2r_n}{3} + \frac{\omega}{\beta} d_n, \quad r_n = \frac{4AF\bar{\beta}}{l} \frac{1 - e^{\lambda(-1)^n}}{\lambda^2 + \pi^2 n^2},$$

$$d_n = \frac{8AF\bar{\beta}\omega_n}{3} \left[ \frac{e^{\lambda(-1)^n}}{\lambda^2 + \pi^2 n^2} + \frac{\lambda [1 - e^{\lambda(-1)^n}]}{(\lambda^2 + \pi^2 n^2)^2} \right], \quad \bar{\beta} l = \frac{\beta l}{2v}.$$

Отметим, что ряд (2.11) сходится абсолютно и равномерно по  $x \in [0, l]$ ,  $t \in (-\infty, +\infty)$ . Из (2.13) видно, что амплитуда  $n$ -й гармоники в (2.11) дается формулой

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_r^2} = \frac{\sqrt{c_r^2 + d_n^2}}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}}$$

и, следовательно, достигает максимума при  $\omega_n = \omega$ . Таким образом,  $n$ -я гармоника в (2.11) резонирует на  $n$ -ю частоту (2.12).

Рассмотрим главный резонанс  $\omega_1 = \omega$ :

$$(2.15) \quad \sqrt{\left(\frac{v\pi}{l}\right)^2 + \frac{\bar{\beta}^2}{4}} = \omega.$$

В частном случае  $\bar{\beta}/\omega \ll 1$  имеем  $v\pi/l = \omega$ , что совпадает (с учетом  $\omega = 2\pi f$ ) с полученным в эксперименте резонансным соотношением (3) из [1]. Таким образом, формула (2.15) уточняет экспериментальную резонансную формулу из [1] при условии, когда частота электрической релаксации (1.6) соизмерима с частотой пульсации питающего напряжения, формула (2.12) дает высшие резонансные частоты.

**3. Вычисление  $\Delta p_{\text{ср}}$ . Сопоставление с экспериментом.** Интегрируя второе равенство (1.1) по  $[0, l]$ , с учетом (1.5), (1.8) находим

$$\Delta p = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2F} [FE^2(l, t) - F_0E^2(0, t)] - \frac{\xi_0 v^2 l}{2d}$$

( $\Delta p = p(l, t) - p(0, t)$ ). Ввиду малости  $r_0$  в (1.8)  $F_0 \ll 1$  и можно приближенно при-

нять  $\Delta p = (\varepsilon\varepsilon_0/2)E^2(l, t) - \xi_0 v^2 l/2d$ , откуда

$$(3.1) \quad \Delta p_{\text{ср}} = (\varepsilon\varepsilon_0/2)(E^2)_{\text{ср}} - \xi_0 v^2 l/2d$$

( $\Delta p_{\text{ср}}$ ,  $(E^2)_{\text{ср}}$  — средние значения  $\Delta p$ ,  $E^2(l, t)$  на периоде  $[0, T]$ ).

Простые вычисления с учетом  $E(l, t) = F^{-1}\bar{E}(l, t)$ , третьей формулы (2.1), формул (2.11), (3.1) дают

$$(3.2) \quad \Delta p_{\text{ср}}(l) = (\varepsilon\varepsilon_0/2)D(l) - \xi_0 v^2 l/2d,$$

где

$$(3.3) \quad D = \frac{44A^2}{9\pi^2 l^2} + \frac{4A\pi}{3Fl} (A - 3R) e^{-\lambda} + \frac{\pi^2}{F^2 l^2} \left( \frac{A^2 + B^2}{2} + R^2 \right) e^{-2\lambda},$$

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n, \quad R = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{r_n}{\omega_n^2},$$

$a_n$ ,  $b_n$ ,  $r_n$ ,  $\omega_n$ ,  $\lambda$  находятся из (2.12)–(2.14). Ряды (3.3) абсолютно сходятся.

На рис. 2 сопоставлены вычисления  $\Delta p_{\text{ср}}(l)$  по формуле (3.2) с экспериментом при входной частоте пульсации  $f = 100$  Гц для кремнеорганической жидкости с  $\rho = 850$  кг/м<sup>3</sup>,  $\varepsilon = 2,4$  (сплошная линия — расчет,

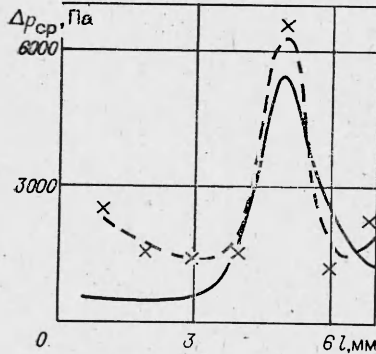


Рис. 2

штриховая — эксперимент). Принято  $v \approx 1$  м/с (из эксперимента),  $\xi \ll 1$  (нулевой расход),  $n = 10$  в (3.3). Теоретическая и экспериментальная кривые построены при  $\bar{\sigma} \approx 5 \cdot 10^{-9}$  1/(Ом·м), поэтому с учетом (1.6)  $\beta = \bar{\sigma}/\epsilon\epsilon_0 \approx 200$  Гц.

Качественная теоретическая картина резонанса совпадает с экспериментальной. Относительная погрешность формулы (3.1) в районе резонанса для рассмотренных случаев не превышает 20 %.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бумагин Г. И., Авдеев Н. П., Дудов А. Ф., Борисов В. А. Исследование ступени понно-конвекционного насоса с питанием короны пульсирующим напряжением // Энергетика. — 1984. — № 11.
2. Ватажин А. В., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. — М.: Наука, 1970.
3. Рубашов И. Б., Бортников Ю. С. Электрогазодинамика. — М.: Атомиздат, 1974.
4. Капцов Н. А. Электроника. — М.: Гостехиздат, 1956.
5. Остроумов Г. А. Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. — М.: Наука, 1979.
6. Митропольский Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике. — Киев: Наук. думка, 1974.
7. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. — М.: Мир, 1984.
8. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высш. шк., 1970.

г. Омск

Поступила 15/1 1988 г.,  
в окончательном варианте — 9/IX 1988 г.

УДК 533.539

С. В. Жлуктов, И. А. Соколова, Г. А. Тирский

### ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЯЗКОСТИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ЧАСТИЧНО ДИССОЦИИРОВАННОГО И ИОНИЗОВАННОГО ВОЗДУХА

При решении задач физико-химической гидродинамики, в частности задач сверхзвуковой аэродинамики и теплообмена, простой и достаточно точный расчет коэффициентов переноса (коэффициентов вязкости и теплопроводности для смесей газов и плазмы) в широком диапазоне температур и давлений приобретает практически важное значение. Дело в том, что формулы строгой кинетической теории газов для коэффициентов переноса [1—3], выведенные в асимптотическом пределе малых чисел Кнудсена, несмотря на существенное их упрощение, полученное в [2], остаются достаточно сложными для решения конкретных гидродинамических задач. Эти формулы представляются в виде отношения определителей порядка  $N\xi$ , где  $N$  — число компонентов смеси,  $\xi$  — число приближений (число членов в разложении искомых коэффициентов переноса по полиномам Сонина [2]). Это приводит к тому, что при решении, например, задач обтекания расчет коэффициентов переноса с использованием этих формул занимает большую часть времени, чем время численного решения самих дифференциальных уравнений [4]. Поэтому практически все расчеты коэффициентов переноса в задачах течения многокомпонентных смесей газов и плазмы проводятся с использованием различных приближенных формул. Расчеты только одних коэффициентов переноса по строгим формулам кинетической теории газов в первых отличных от нуля приближениях [1] при постоянных заданных концентрациях элементов без решения каких-либо задач в [5] были проведены для вязкости и теплопроводности  $H_2$ —He смеси (атмосфера Юпитера), в [6] — для вязкости и теплопроводности воздуха (атмосфера Земли), в [7] — для вязкости  $CO_2$ — $N_2$  смеси (атмосфера Венеры). В [8] впервые вычислены все равновесные коэффициенты переноса для частично диссоциированного и ионизованного воздуха по формулам [2, 9] до четвертого приближения включительно.

Вычисление коэффициентов переноса по точным формулам кинетической теории газов связано с необходимостью знания интегралов столкновений между различными компонентами смеси. Каждое взаимодействие требует знания потенциальной функции взаимодействия. И для  $N$ -компонентной смеси потребуется  $(1/2)N(N+1)$  потенциальных функций. Имеющийся разброс данных по потенциалам взаимодействия частиц [10, 11] в области развитой ионизации приводит к неопределенности в значении эффективного равновесного коэффициента теплопроводности до 30 %, неопределенность в