

УДК 532.529

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАРНЫХ ВОЛН С КОМБИНИРОВАННЫМ РАЗРЫВОМ В ДВУХФАЗНЫХ СРЕДАХ. 1. РАВНОВЕСНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

А. А. Жилин, А. В. Федоров

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Изучается проблема взаимодействия ударных волн различного типа (полностью дисперсионных, замороженно-дисперсионных, дисперсионно-замороженных и замороженных двухфронтной конфигурации) с неподвижным комбинированным разрывом в смеси двух конденсированных материалов. Для математического описания используются уравнения механики гетерогенных сред в одномерном изотермическом приближении с учетом различия скоростей и давлений компонентов. В равновесном по скоростям и давлениям компонентов смеси приближении аналитически определены волновая конфигурация и параметры потока во всех равновесных состояниях за падающей, проходящей и отраженной ударными волнами.

Проблема взаимодействия ударных волн (УВ) с комбинированным разрывом (КР), разделяющим смесь с различными объемными концентрациями компонентов, представляет большой теоретический и практический интерес. В [1] предложена математическая модель для описания поведения смеси двух конденсированных материалов в двухскоростном двухтемпературном приближении механики гетерогенных сред с различными давлениями компонентов. В рамках односкоростных континуумов установлено существование двух типов УВ: дисперсионного (с монотонным профилем скорости) и замороженного (с разрывным профилем скорости). В [2, 3] для двухкомпонентной смеси в двухскоростном приближении механики гетерогенных сред с различными давлениями компонентов показана возможность существования УВ четырех типов: дисперсионного, замороженно-дисперсионного, дисперсионно-замороженного и замороженного с двухфронтной конфигурацией. В [4] численно исследована устойчивость УВ различного типа к конечным и инфинитезимальным возмущениям. В [5, 6] выполнено аналитическое и численное исследование механизма взаимодействия УВ всех типов с жесткой границей. В результате определены равновесные параметры смеси, устанавливающиеся после отражения падающей УВ от жесткой стенки, и показана возможность изменения типа УВ при отражении.

В данной работе изучается процесс взаимодействия падающей УВ с КР в случае, когда времена релаксации скоростей и давлений компонентов смеси близки к нулю (равновесное течение), а также в общем случае конечных времен релаксации.

**Физико-математическая постановка задачи.** Рассматривается смесь жидкости и твердых частиц, по которой справа налево распространяется УВ со скоростью  $D$ . В некоторый момент времени УВ доходит до КР, разделяющего области с различными объемными концентрациями частиц, и взаимодействует с ним. Требуется определить картину течения после взаимодействия падающей УВ с КР.

Для математического описания данного процесса в одномерном изотермическом приближении механики гетерогенной смеси конденсированных сред с различными давлениями и скоростями используются законы сохранения массы и количества движения для каждого

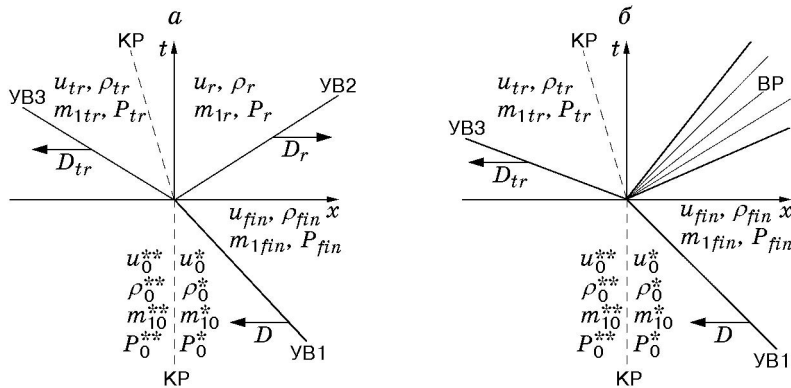


Рис. 1. Схема взаимодействия падающей УВ1 с КР:  
 а — отражение УВ2; б — отражение ВР

компонента смеси, дополненные уравнением  $m_2$ -переноса и уравнениями состояния:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 u_1}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 u_2}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \rho_1 u_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 u_1^2}{\partial x} &= -m_1 \frac{\partial P_1}{\partial x} + F_S, \\ \frac{\partial \rho_2 u_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 u_2^2}{\partial x} &= -m_2 \frac{\partial P_2}{\partial x} - (P_2 - P_1) \frac{\partial m_2}{\partial x} - F_S, & \frac{\partial m_2}{\partial t} + u_2 \frac{\partial m_2}{\partial x} &= R, \\ m_1 &= 1 - m_2, & P_1 &= \rho_1 / m_1 - 1, & P_2 &= a^2 (\rho_2 / m_2 - \bar{\rho}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\rho_i = m_i \rho_{ii}$ ,  $u_i$ ,  $P_i$ ,  $m_i$  — средняя плотность, скорость, давление, объемная концентрация  $i$ -го компонента смеси;  $F_S = m_1 \rho_2 (u_2 - u_1) / \tau_S$  — сила Стокса;  $\tau_S = 2\bar{\rho} / (9\mu_1)$  — время стоксовой релаксации скоростей;  $R = m_1 m_2 (P_2 - P_1) / \tau_{m_2}$  — функция, описывающая процесс переноса твердой фазы;  $\tau_{m_2} = 2\rho_{22,0} a_2 r / (\rho_{11,0} a_1^2) \approx 2\mu_2$  — время релаксации давлений компонентов смеси;  $\mu_i$  — динамическая вязкость  $i$ -го компонента;  $\rho_{ii}$  — истинная плотность  $i$ -го компонента;  $a_i$ ,  $\rho_{ii,0}$  — скорость звука и истинная плотность материала  $i$ -го компонента смеси. Индекс 1 соответствует параметрам легкого компонента (несущей фазы), индекс 2 — параметрам тяжелого компонента (дискретной фазы).

Обезразмеривание скоростей в (1) проводилось величиной  $a_1$ , плотностей —  $\rho_{11,0}$ , давления —  $a_1^2 \rho_{11,0}$ , времени  $t - t_0 = r/a_1$ ,  $\mu_i - a_1 \rho_{11,0} r$ , пространственной переменной  $x$  — радиусом твердых частиц  $r$ . Таким образом, при  $t = 0$  безразмерная скорость звука и истинная плотность легкого компонента равны единице, тяжелого —  $a = a_2/a_1$  и  $\bar{\rho} = \rho_{22,0}/\rho_{11,0}$  соответственно.

Для системы уравнений (1) начальные данные можно представить в виде

$$t = 0: \quad \varphi = \varphi^* \text{ при } x \geq x_0, \quad \varphi = \varphi^{**} \text{ при } x < x_0, \quad (2)$$

где вектор параметров потока, находящихся в начальном равновесном состоянии справа от КР, обозначен через  $\varphi^*$  (описывает течение в виде стационарной УВ какого-либо типа [3]), слева от КР — через  $\varphi^{**}$ ;  $x_0$  — координата границы КР. Требуется найти решение системы уравнений (1), (2) при  $t \geq 0$ .

**Расчет параметров потока в равновесном приближении.** Взаимодействие падающей УВ с КР в равновесном приближении описывается задачей о распаде произвольного разрыва в смеси двух сжимаемых газов. Волновая картина взаимодействия падающей УВ с КР показана на рис. 1.

Рис. 1, а соответствует случаю, когда падающая УВ1 (распространяющаяся со скоростью  $D$ ) после взаимодействия с КР распадается на отраженную УВ2 ( $D_r$ ) и проходящую (преломленную) УВ3 ( $D_{tr}$ ). Относительно границы КР проходящая УВ3 движется в том

же направлении, что и падающая УВ1, а отраженная УВ2 — в противоположном. До взаимодействия падающей УВ1 с КР покоящийся КР находится в точке  $x_0 = 0$ . Перед фронтом падающей УВ1 смесь находится в равновесном состоянии, параметры которого отмечаются нижним индексом 0. В области между фронтом падающей УВ1 и неподвижной границей КР смесь характеризуется начальными равновесными параметрами с верхним индексом “\*”, за КР — параметрами с индексом “\*\*”. В данном случае полагается  $m_{10}^{**} < m_{10}^*$ , т. е.  $\rho_0^{**} > \rho_0^*$  (так как  $\rho_0 = \bar{\rho} + m_{10}(1 - \bar{\rho})$ ). За падающей УВ1 формируется равновесное состояние, параметры которого отмечаются индексом *fin*. После взаимодействия падающей УВ1 с КР последний начинает двигаться за проходящей УВ3 со скоростью  $u_{\text{КР}}$ . На рис. 1,а его траектория показана штриховой линией. Отраженная УВ2 распространяется по смеси с параметрами, отмеченными индексом *fin*, за ее фронтом устанавливаются новые равновесные параметры, отмеченные индексом *r*. Проходящая УВ движется по смеси с параметрами, отмеченными верхним индексом “\*\*”, за ее фронтом устанавливаются равновесные параметры, отмеченные нижним индексом *tr*.

Таким образом, на основе предложенной волновой картины требуется определить скорость проходящей УВ3, отраженной УВ2 и КР, а также другие параметры потока, устанавливающиеся после взаимодействия падающей УВ1 с КР при заданных начальных параметрах (скорости падающей УВ1 и начальных объемных концентрациях перед КР и за ним).

Рис. 1,б соответствует случаю, когда падающая УВ1 после взаимодействия с КР распадается на проходящую УВ3 и веер волн разрежения (ВР), отраженный от границы КР и движущийся в противоположном направлении. При этом, как показано в [7], передний фронт ВР распространяется со скоростью, изменяющейся, вообще говоря, от равновесно-замороженной ( $C_{ef}$  в начальные моменты времени) до равновесной ( $C_e$  при больших временах), а задний — с постоянной скоростью, соответствующей скорости звука легкого компонента. Здесь  $m_{10}^{**} > m_{10}^*$ ,  $\rho_0^{**} < \rho_0^*$ .

Исследуем случай, представленный на рис. 1,а, когда падающая УВ1, взаимодействуя с КР, распадается на две УВ (отраженную и проходящую).

Для решения поставленной задачи используются законы сохранения массы и количества движения на падающей УВ1, отраженной УВ2 и преломленной УВ3, условия на КР до и после взаимодействия падающей УВ1 с КР, а также уравнения состояния, записанные для соответствующих равновесных состояний.

Условия на КР:

1) в начальном равновесном состоянии (до взаимодействия с УВ1)  $u_0^* = u_0^{**} = u_0 = 0$ ,  $P_0^* = P_0^{**} = P_0 = 0$ ;

2) в конечном равновесном состоянии (после взаимодействия с УВ1)  $u_{tr} = u_r = u_{\text{КР}}$ ,  $P_{tr} = P_r = P_{\text{КР}}$ .

Условия на УВ:

1) на падающей УВ1

$$\rho_0^*(u_0^* - D) = \rho_{fin}(u_{fin} - D), \quad P_0^* + \rho_0^*(u_0^* - D)^2 = P_{fin} + \rho_{fin}(u_{fin} - D)^2;$$

2) на отраженной УВ2

$$\rho_{fin}(u_{fin} - D_r) = \rho_r(u_r - D_r), \quad P_{fin} + \rho_{fin}(u_{fin} - D_r)^2 = P_r + \rho_r(u_r - D_r)^2;$$

3) на преломленной (проходящей) УВ3

$$\rho_0^{**}(u_0^{**} - D_{tr}) = \rho_{tr}(u_{tr} - D_{tr}), \quad P_0^{**} + \rho_0^{**}(u_0^{**} - D_{tr})^2 = P_{tr} + \rho_{tr}(u_{tr} - D_{tr})^2.$$

Здесь  $P^* = (C_{ef}^*)^2 \rho + m_2^* C - 1$ ;  $P^{**} = (C_{ef}^{**})^2 \rho + m_2^{**} C - 1$ ;  $(C_{ef}^*)^2 = \xi_1^* + a^2 \xi_2^*$ ;  $m_2^* = 1 - m_1^*$ ;  $m_2^{**} = 1 - m_1^{**}$ ;  $m_1^* = (C + \rho(C_{ef}^*)^2 - \sqrt{(C + \rho(C_{ef}^*)^2)^2 - 4C\rho\xi_1^*}) / (2C)$ ;  $(C_{ef}^{**})^2 = \xi_1^{**} + a^2 \xi_2^{**}$ ;  $m_1^{**} = (C + \rho(C_{ef}^{**})^2 - \sqrt{(C + \rho(C_{ef}^{**})^2)^2 - 4C\rho\xi_1^{**}}) / (2C)$ .

Введем следующие обозначения:  $u_0^* - D = U_0^*$ ,  $u_0^{**} - D_{tr} = U_0^{**}$ ,  $u_r - D_r = U_r$ ,  $u_{fin} - D = U_{fin}$ ,  $u_{tr} - D_{tr} = U_{tr}$ ,  $u_{fin} - D_r = U_{fin}^r$ .

Так как по смеси с параметрами  $\rho_0^*$ ,  $U_0^*$ ,  $m_{10}^*$ ,  $P_0^*$  справа налево движется УВ1 со скоростью  $D$ , то за ее фронтом смесь переходит в новое равновесное состояние с параметрами  $\rho_{fin}$ ,  $U_{fin}$ ,  $m_{1fin}$ ,  $P_{fin}$ , которые находятся из условий на падающей УВ1. Из закона сохранения массы имеем  $\rho_{fin} = \rho_0^* U_0^* / U_{fin}$ , из закона сохранения импульса определяем  $P_{fin} = \rho_0^* U_0^* (U_0^* - U_{fin})$ . Используя уравнение состояния  $P_{fin} = (C_{ef}^*)^2 \rho_{fin} + m_{2fin}^* C - 1$  и выражение для объемной концентрации тяжелого компонента, полученное из условия равенства давлений компонентов в конечном равновесном состоянии за падающей УВ ( $P_{1fin} = P_{2fin}$ ), в виде

$$m_{2fin}^* = [C - \rho_{fin} (C_{ef}^*)^2 + \sqrt{(C + \rho_{fin} (C_{ef}^*)^2)^2 - 4C \rho_{fin} \xi_1^*}] / (2C),$$

найдем кубическое уравнение для определения  $U_{fin}$

$$\begin{aligned} & (\rho_0^* U_0^*)^2 U_{fin}^3 - \rho_0^* U_0^* U_{fin}^2 (2 - C + 2\rho_0^* (U_0^*)^2) + \\ & + U_{fin} [1 - C + \rho_0^* (U_0^*)^2 (2 - C) + (\rho_0^* U_0^* C_{ef}^*)^2 + (\rho_0^*)^2 (U_0^*)^4] + \\ & + \rho_0^* U_0^* (C \xi_1^* - (C_{ef}^*)^2 - \rho_0^* (U_0^*)^2 (C_{ef}^*)^2) = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение распадается на два:

$$U_{fin} - U_0^* = 0, \quad (\rho_0^* U_0^*)^2 U_{fin}^2 - \rho_0^* U_0^* U_{fin} (2 - C + \rho_0^* (U_0^*)^2) + 1 - C + (\rho_0^* C_{ef}^* U_0^*)^2 = 0.$$

Таким образом, решения имеют вид

$$U_{fin} = U_0^*, \quad U_{fin}^\pm = \frac{2 - C + \rho_0^* (U_0^*)^2 \pm \sqrt{(C - \rho_0^* (U_0^*)^2)^2 + 4\rho_0^* (U_0^*)^2 (1 - \rho_0^* (C_{ef}^*)^2)}}{2\rho_0^* U_0^*}.$$

Исходя из физических условий задачи в дальнейшем используется значение  $U_{fin} = U_{fin}^-$ . По найденному значению  $U_{fin}$  определяем  $\rho_{fin}$  и  $P_{fin}$ , а затем значения  $m_{2fin}$  и  $m_{1fin}$ . В дальнейшем величины  $\rho_{fin}$ ,  $U_{fin}$ ,  $m_{1fin}$ ,  $P_{fin}$  считаются известными.

Из условий на отраженной УВ2 находим зависимости  $\rho_r$  и  $P_r$  от  $U_r$  и  $D_r$ , а из условий на проходящей УВ3 выражаем  $\rho_{tr}$  и  $P_{tr}$  через  $U_{tr}$  и  $D_{tr}$ . В итоге получается следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} P_r &= P_{fin} + \rho_{fin} U_{fin}^r (U_{fin}^r - U_r), & P_{tr} &= \rho_0^{**} U_0^{**} (U_0^{**} - U_{tr}), \\ U_r + D_r &= U_{tr} + D_{tr} = u_{КР}, & P_r &= P_{tr} = P_{КР}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для замыкания привлекаются уравнения состояния.

Рассмотрим второе уравнение системы (3). Подставляя в него  $P_{tr}$  из уравнения состояния, получим кубическое уравнение для определения  $U_{tr}$

$$\begin{aligned} & (\rho_0^{**} U_0^{**})^2 U_{tr}^3 - \rho_0^{**} U_0^{**} U_{tr}^2 (2 - C + 2\rho_0^{**} (U_0^{**})^2) + \\ & + U_{tr} [1 - C + \rho_0^{**} (U_0^{**})^2 (2 - C) + (\rho_0^{**} U_0^{**} C_{ef}^{**})^2 + (\rho_0^{**})^2 (U_0^{**})^4] + \\ & + \rho_0^{**} U_0^{**} (C \xi_1^{**} - (C_{ef}^{**})^2 - \rho_0^{**} (U_0^{**})^2 (C_{ef}^{**})^2) = 0. \end{aligned}$$

Если произвести замену  $U_0^{**}$  на  $U_0^*$ ,  $\rho_0^{**}$  на  $\rho_0^*$  и индекса  $tr$  на индекс  $fin$ , то полином в левой части последнего уравнения будет аналогичен полиному в левой части уравнения для определения  $U_{fin}$ . Следовательно, изучаемое уравнение также имеет три корня:  $U_{tr} = U_0^{**}$  (что соответствует начальным данным задачи) и

$$U_{tr}^\pm = \frac{2 - C + \rho_0^{**} (U_0^{**})^2 \pm \sqrt{(C - \rho_0^{**} (U_0^{**})^2)^2 + 4\rho_0^{**} (U_0^{**})^2 (1 - \rho_0^{**} (C_{ef}^{**})^2)}}{2\rho_0^{**} U_0^{**}}. \quad (4)$$

В дальнейшем будем рассматривать значение  $U_{tr} = U_{tr}^-$  (по аналогии с  $U_{fin}^-$ ).

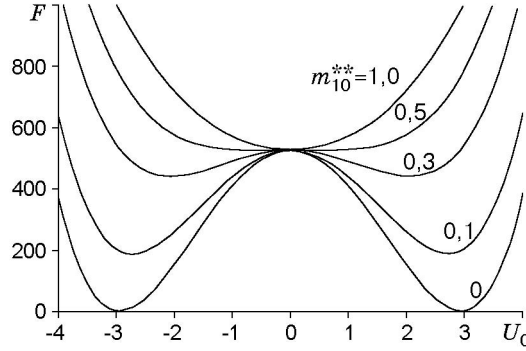


Рис. 2. График квадратичной функции  $F(U_0)$

Исследуем подкоренное выражение равенства (4), которое можно представить в виде биквадратного уравнения

$$F(U_0^{**}) = (\rho_0^{**})^2 (U_0^{**})^4 - 2\rho_0^{**} (U_0^{**})^2 (C - 2 + 2\rho_0^{**} (C_{ef}^{**})^2) + C^2 = 0,$$

имеющего решение

$$U_0^{**} = \pm \sqrt{[C - 2 + 2\rho_0^{**} (C_{ef}^{**})^2 \pm \sqrt{(C - 2 + 2\rho_0^{**} (C_{ef}^{**})^2)^2 - C^2}] / \rho_0^{**}}.$$

При  $m_{10}^{**} = 0$  внутреннее подкоренное выражение обращается в нуль, и получается два кратных действительных корня  $U_0^{**} = \pm \sqrt{-C/\bar{\rho}}$ . При  $m_{10}^{**} = 1$  внутреннее подкоренное выражение также обращается в нуль, но получается два кратных мнимых корня  $U_0^{**} = \pm i\sqrt{|C|}$ , так как  $C < 0$ . При остальных значениях  $m_{10}^{**} \in (0, 1)$  внутреннее подкоренное выражение становится отрицательным, так как  $\rho_0^{**} (C_{ef}^{**})^2 = m_{10}^{**} + a^2 \bar{\rho} m_{20}^{**} < a^2 \bar{\rho}$ . Следовательно, действительные решения отсутствуют.

На рис. 2 представлен график квадратичной функции  $F(U_0)$  для смеси воды и кварцевого песка при различных начальных объемных концентрациях смеси. Как показано на рис. 2, существует три точки экстремума, которые при  $m_{10}^{**} \in [0; 0,5)$  соответствуют двум локальным минимумам при  $U_{I,II} = \pm \sqrt{(C - 2 + 2\rho_0^{**} (C_{ef}^{**})^2) / \rho_0^{**}}$  и максимуму при  $U_{III} = 0$ .

При  $m_{10}^{**} = 0,5$  точки локальных минимумов и максимума сходятся в одну точку (точку сборки)  $U_I = U_{II} = U_{III} = 0$ , в которой достигается минимум, при  $m_{10}^{**} \in (0,5; 1]$  существует один действительный минимум при  $U = 0$ . Следует отметить, что точки минимумов  $U_I$  и  $U_{II}$  смещаются от  $\pm \sqrt{-C/\bar{\rho}}$  до нуля, при этом значение  $F(U_0)$  меняется от нуля до  $C^2$  для  $m_{10}^{**} \in [0; 0,5]$ , а положение точки  $U = 0$  является постоянным, тогда как значение  $F(U_0) = C^2$  в ней зависит только от компонентов, входящих в изучаемую смесь. Например, для смеси воды и кварцевого песка  $C^2 = 522,1225$ .

Таким образом, выражение (4) позволяет определить относительную скорость смеси за проходящей УВЗ как функцию  $U_{tr} = U_{tr}(D_{tr})$ .

Получим уравнение для определения  $D_{tr}$ . Для этого из третьего уравнения системы (3), которое выражает равенство массовых скоростей на КР, находим относительную скорость смеси за отраженной УВЗ

$$U_r = U_{tr} + D_{tr} - D_r. \quad (5)$$

Используя первое и второе уравнения системы (3) и условие равенства давлений на КР, получаем выражение

$$P_{fin} + \rho_{fin} U_{fin}^r (U_{fin}^r - U_r) = \rho_0^{**} U_0^{**} (U_0^{**} - U_{tr}),$$

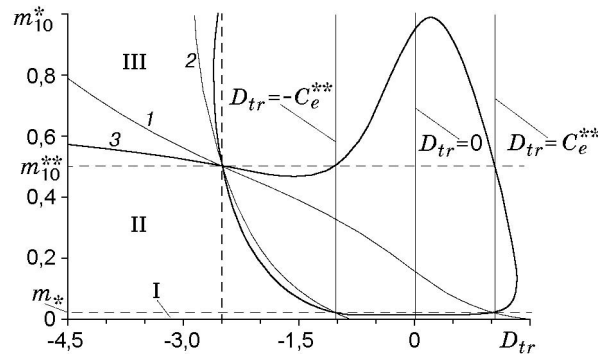


Рис. 3. Корни уравнения (7) при  $D = -2,5$ ,  $m_{10}^{**} = 0,5$

где  $U_{fin}^r = u_{fin} - D_r = U_{fin} - D_r - U_0^*$ , которое позволяет выразить скорость отраженной УВ2 как функцию  $D_r = D_r(D_{tr}, U_{tr}(D_{tr}))$  в следующем виде:

$$D_r = U_{fin} - U_0^* + [P_{fin} - \rho_0^{**} U_0^{**} (U_0^{**} - U_{tr})] / [\rho_{fin} (U_{fin} - U_0^* + U_0^{**} - U_{tr})]. \quad (6)$$

Исследуем последнее уравнение системы (3) для определения скорости проходящей (преломленной) УВ3. Подставив  $P_{tr}$  и  $P_r$  из уравнения состояния и проведя ряд несложных преобразований, получим уравнение для  $\rho_{tr}$  и  $\rho_r$

$$C \rho_{tr}^2 \xi_1^{**} \xi_2^{**} + C \rho_r^2 \xi_1^* \xi_2^* + \rho_{tr} \rho_r^2 (C_{ef}^*)^2 (\xi_1^* \xi_2^{**} - \xi_1^{**} \xi_2^*) - \rho_{tr}^2 \rho_r (C_{ef}^{**})^2 (\xi_1^* \xi_2^{**} - \xi_1^{**} \xi_2^*) - C \rho_{tr} \rho_r (\xi_1^* \xi_2^{**} + \xi_1^{**} \xi_2^*) = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) является функцией одной неизвестной — скорости проходящей УВ3  $D_{tr}$ , так как  $\rho_{tr}$  и  $\rho_r$  выражаются через параметры  $U_{tr}$ ,  $U_r$ ,  $U_{fin}^r$ ,  $U_0^{**}$ , которые в свою очередь являются функциями  $D_{tr}$ . Корни уравнения (7) найдены графически. На рис. 3 показано поведение корней уравнения (7) как функции скорости преломленной УВ3 для различных начальных объемных концентраций легкого компонента перед границей КР  $m_{10}^*$  при  $D = -2,5$ ,  $m_{10}^{**} = 0,5$ . Из рис. 3 следует, что для всех  $m_{10}^* \in (0, 1)$  имеется три постоянных корня, соответствующих состоянию покоя ( $D_{tr} = 0$ ) и равновесной скорости звука ( $D_{tr} = \pm C_e^{**}$ ). Два решения (кривые 1, 2) существуют для всех значений  $m_{10}^* = 1 \div 0$ . При этом они уменьшаются при изменении скорости проходящей волны от отрицательных до положительных значений. Поведение остальных корней на рис. 3 представлено кривой 3 (линией с замкнутым участком). Вертикальной штриховой линией показана скорость падающей УВ. Также следует отметить наличие точки  $m_*$ , отделяющей область неустойчивого течения (расположенную ниже точки  $m_*$ ), в которой не выполняется условие теоремы Цемплена. Эта величина определена в [3] при построении карты решений. На основе изложенного выше сформулируем

**Утверждение 1.** Область существования решения задачи о падении УВ на КР в зависимости от значения  $m_{10}^*$  можно разделить на три области (см. рис. 3).

В области I объемные концентрации первой фазы перед КР  $m_{10}^* \in (0, m_*)$ , что соответствует случаю, когда на границу КР падает волна разрежения. При  $m_{10}^* = m_*$  существует три корня:  $D_{tr} = 0$ ,  $D_{tr} = \pm C_e^{**}$  (см. рис. 3). Следует отметить, что значение  $m_*$  зависит только от скорости распространения волны, взаимодействующей с КР.

В области II объемная концентрация первой фазы  $m_{10}^* \in (m_*, m_{10}^{**})$ . Здесь падающая УВ1 распространяется по более плотной смеси и на границе КР встречается с менее плотной (см. рис. 1, б). При  $m_{10}^* = m_{10}^{**}$  существуют четыре корня:  $D_{tr} = 0$ ,

$D_{tr} = \pm C_e^{**}$ ,  $D_{tr} = D$ . Последний корень соответствует случаю, когда на КР отсутствует разрыв объемной концентрации и падающая УВ1 проходит через КР без изменений.

Область III соответствует значениям  $m_{10}^* \in (m_{10}^{**}, 1)$ . В этом случае падающая УВ1 распространяется по смеси с меньшей плотностью, чем за КР (см. рис. 1,а).

При уменьшении скорости падающей УВ область I увеличивается: при  $D = -1,5$   $m_* = 0,149$ , при  $D = -2$   $m_* = 0,058$ , при  $D = -2,5$   $m_* = 0,020$ , при  $D = -3$   $m_* = 0$ , при  $D < -3$  область I отсутствует. Ширина областей II, III зависит только от объемной концентрации легкого (тяжелого) компонента за КР.

Из полученных решений выбирались решения, удовлетворяющие следующим условиям: во-первых, УВЗ должна быть устойчивой, и, следовательно, ее скорость должна быть больше равновесной скорости звука, т. е.  $D_{tr} \notin [-C_e^{**}, C_e^{**}]$ ; во-вторых, направление движения проходящей УВЗ должно совпадать с направлением падающей УВ1, т. е.  $\text{sign}(D_{tr}) = \text{sign}(D)$ . Таким образом, из множества решений поставленной задачи физическим требованиям удовлетворяют лишь решения в области сверхзвуковых по равновесной скорости звука течений. Для случая, представленного на рис. 3, в этой области в зависимости от значения  $m_{10}^*$  может находиться от двух до пяти корней уравнения (7).

Результаты численных расчетов в нестационарном приближении показали, что на практике реализуется единственный корень, который в дальнейшем используется в качестве решения (кривая 2 на рис. 3). По найденному решению  $D_{tr}$  определяются остальные равновесные параметры потока.

В табл. 1–3 представлены значения скорости проходящей и отраженной УВ, скорости КР, скорости смеси за падающей УВ1, давления на КР и в конечном равновесном состоянии за падающей УВ1, плотности за падающей, проходящей и отраженной УВ для различных значений перепадов объемных концентраций на границе КР и скорости падающей УВ. Анализ данных табл. 1–3 позволяет сделать следующие выводы. Скорость проходящей УВЗ  $D_{tr}$  возрастает при увеличении скорости падающей УВ1 и начальной

Таблица 1

Равновесные параметры смеси ( $D = -1,5$ )

$m_{10}^*$	$D_{tr}$	$D_r$	$u_{\text{КР}}$	$u_{fin}$	$P_{\text{КР}}$	$P_{fin}$	$\rho_{fin}$	$\rho_{tr}$	$\rho_r$
$m_{10}^{**} = 0,1$									
0,2	-1,879	1,512	-0,065	-0,075	0,303	0,263	2,443	2,574	2,459
0,3	-2,120	1,460	-0,167	-0,213	0,880	0,688	2,511	2,698	2,582
0,4	-2,282	1,351	-0,247	-0,338	1,401	1,008	2,568	2,787	2,714
0,5	-2,395	1,210	-0,310	-0,452	1,848	1,238	2,611	2,855	2,853
0,6	-2,475	1,048	-0,359	-0,555	2,209	1,382	2,635	2,907	3,002
0,7	-2,527	0,877	-0,394	-0,648	2,472	1,4524	2,631	2,949	3,158
0,8	-2,555	0,703	-0,412	-0,728	2,618	1,4520	2,584	2,963	3,314
0,9	-2,557	0,541	-0,414	-0,792	2,628	1,384	2,468	2,965	3,446
$m_{10}^{**} = 0,5$									
0,2	-1,116	ВР	-0,094	-0,075	0,192	0,263	2,443	1,994	2,413
0,3	-1,270	ВР	-0,244	-0,213	0,566	0,688	2,511	2,259	2,462
0,4	-1,397	ВР	-0,360	-0,338	0,919	1,008	2,568	2,459	2,531
0,5	-1,500	—	-0,452	-0,452	1,238	1,238	2,611	2,611	2,611
0,6	-1,581	0,884	-0,522	-0,555	1,507	1,382	2,635	2,725	2,697
0,7	-1,641	0,716	-0,574	-0,648	1,718	1,4524	2,631	2,806	2,782
0,8	-1,678	0,552	-0,606	-0,728	1,855	1,4520	2,584	2,856	2,856
0,9	-1,691	0,404	-0,616	-0,792	1,902	1,384	2,468	2,872	2,893

Таблица 2

Равновесные параметры смеси ( $D = -2,5$ )

$m_{10}^*$	$D_{tr}$	$D_r$	$u_{KP}$	$u_{fin}$	$P_{KP}$	$P_{fin}$	$\rho_{fin}$	$\rho_{tr}$	$\rho_r$
$m_{10}^{**} = 0,1$									
0,1	-2,500	—	-0,375	-0,375	2,332	2,332	2,924	2,924	2,924
0,2	-2,831	1,995	-0,631	-0,685	4,438	3,974	3,196	3,197	3,262
0,3	-3,017	1,707	-0,810	-0,928	6,072	5,002	3,428	3,397	3,589
0,4	-3,146	1,430	-0,949	-1,137	7,428	5,659	3,651	3,559	3,940
0,5	-3,246	1,151	-1,063	-1,325	8,573	6,048	3,885	3,695	4,345
0,6	-3,325	0,859	-1,157	-1,499	9,563	6,222	4,147	3,812	4,849
0,7	-3,389	0,542	-1,236	-1,662	10,408	6,213	4,462	3,911	5,533
0,8	-3,440	0,188	-1,299	-1,817	11,101	6,042	4,868	3,993	6,565
0,9	-3,475	-0,213	-1,344	-1,963	11,606	5,719	5,428	4,052	8,402
$m_{10}^{**} = 0,5$									
0,1	-1,554	BP	-0,499	-0,375	1,414	2,332	2,924	2,687	2,789
0,2	-1,929	BP	-0,820	-0,685	2,887	3,974	3,196	3,176	3,032
0,3	-2,176	BP	-1,035	-0,928	4,108	5,002	3,428	3,480	3,286
0,4	-2,358	BP	-1,196	-1,137	5,148	5,659	3,651	3,705	3,563
0,5	-2,500	—	-1,325	-1,325	6,048	6,048	3,885	3,885	3,885
0,6	-2,614	0,647	-1,431	-1,499	6,828	6,222	4,147	4,032	4,283
0,7	-2,707	0,325	-1,518	-1,662	7,497	6,213	4,462	4,155	4,813
0,8	-2,779	-0,029	-1,587	-1,817	8,047	6,042	4,868	4,253	5,589
0,9	-2,831	-0,423	-1,636	-1,963	8,454	5,719	5,428	4,324	6,892

Таблица 3

Равновесные параметры смеси ( $D = -3,3$ )

$m_{10}^*$	$D_{tr}$	$D_r$	$u_{KP}$	$u_{fin}$	$P_{KP}$	$P_{fin}$	$\rho_{fin}$	$\rho_{tr}$	$\rho_r$
$m_{10}^{**} = 0,1$									
0,1	-3,300	—	-1,128	-1,128	9,247	9,247	3,775	3,775	3,775
0,2	-3,494	1,433	-1,367	-1,439	11,872	11,020	4,115	4,083	4,221
0,3	-3,626	1,137	-1,538	-1,687	13,856	11,996	4,409	4,314	4,655
0,4	-3,729	0,859	-1,672	-1,903	15,495	12,497	4,701	4,505	5,129
0,5	-3,814	0,580	-1,785	-2,101	16,917	12,654	5,023	4,670	5,696
0,6	-3,888	0,285	-1,883	-2,289	18,192	12,537	5,416	4,818	6,430
0,7	-3,954	-0,044	-1,971	-2,470	19,367	12,183	5,940	4,954	7,478
0,8	-4,015	-0,429	-2,052	-2,647	20,480	11,618	6,721	5,083	9,182
0,9	-4,073	-0,904	-2,130	-2,823	21,557	10,852	8,053	5,208	12,605
$m_{10}^{**} = 0,5$									
0,1	-2,569	BP	-1,389	-1,128	6,511	9,247	3,775	3,973	3,450
0,2	-2,851	BP	-1,655	-1,439	8,611	11,020	4,115	4,352	3,812
0,3	-3,040	BP	-1,840	-1,687	10,207	11,996	4,409	4,623	4,168
0,4	-3,184	BP	-1,983	-1,903	11,522	12,497	4,701	4,840	4,559
0,5	-3,300	—	-2,101	-2,101	12,654	12,654	5,023	5,023	5,023
0,6	-3,398	0,089	-2,202	-2,289	13,654	12,537	5,416	5,183	5,621
0,7	-3,483	-0,248	-2,222	-2,470	14,556	12,183	5,940	5,326	6,463
0,8	-3,559	-0,638	-2,368	-2,647	15,380	11,618	6,721	5,456	7,804
0,9	-3,626	-1,114	-2,439	-2,823	16,136	10,852	8,053	5,574	10,386



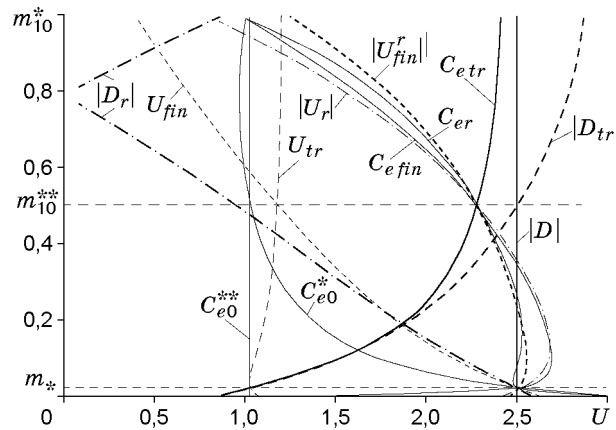


Рис. 4. Характерные скорости смеси

объемной концентрации твердых частиц перед границей КР и уменьшается при увеличении начальной объемной концентрации легкого компонента. Как и следовало ожидать, при взаимодействии падающей УВ1 с менее плотной средой ( $m_{10}^* < m_{10}^{**}$ ) скорость проходящей УВ3 меньше скорости падающей. Скорость отраженной УВ2 уменьшается, когда уменьшается начальная объемная концентрация частиц в смеси, при этом степень торможения увеличивается с ростом скорости падающей УВ1. Следует отметить, что при падении более слабой УВ ( $D = -1,5$ ) на границу КР отраженная УВ2 всегда движется в противоположном направлении. С увеличением скорости падающей УВ1 ( $D = -2,5; -3,3$ ) при больших объемных концентрациях легкого компонента перед границей КР отраженная УВ2 сносится потоком, сформировавшимся за падающей УВ1. Таким образом, отраженная УВ2 относительно неподвижного наблюдателя может двигаться в том же направлении, что и проходящая УВ3, но с меньшей скоростью (см. табл. 1–3). Скорость границы КР увеличивается как при увеличении скорости падающей УВ1, так и при росте начальных объемных концентраций легкого компонента перед и за границей КР. Давление на КР с ростом  $m_{10}^*$ ,  $m_{10}^{**}$  и  $D$  возрастает, при этом, если  $m_{10}^* > m_{10}^{**}$ , то  $P_{\text{КР}}$  превышает давление, установившееся за падающей УВ1, в противном случае  $P_{\text{КР}} < P_{\text{fin}}$  и в отраженной волне давление уменьшается (реализуется течение с волной разрежения). Аналогично меняется плотность смеси, т. е. при  $m_{10}^* > m_{10}^{**}$  плотность за преломленной и отраженной УВ больше плотности за падающей УВ1, при  $m_{10}^* < m_{10}^{**}$   $\rho_{\text{fin}}$  всегда больше  $\rho_r$ , а  $\rho_{\text{tr}}$  может быть больше либо меньше  $\rho_{\text{fin}}$  в зависимости от скорости падающей УВ1 и значения  $m_{10}^*$ .

**Условия устойчивости течения.** На рис. 4 показана зависимость характерных скоростей смеси при падении УВ1, распространяющейся со скоростью  $D = -2,5$  по смеси, от объемной концентрации. За КР объемные концентрации компонентов равны ( $m_{10}^{**} = m_{20}^{**} = 0,5$ ). К характерным скоростям относятся скорость падающей УВ1 (сплошная вертикальная линия  $|D|$ ), скорость преломленной УВ3 (штриховая линия  $|D_{\text{tr}}|$ ), скорость отраженной УВ2 (штрихпунктирная линия  $D_r$ ), массовая скорость смеси за падающей УВ1 в присоединенной системе координат (тонкая пунктирная линия  $U_{\text{fin}} = u_{\text{fin}} - D$ ), массовая скорость смеси за преломленной УВ в относительной системе координат (тонкая штриховая линия  $U_{\text{tr}}$ ), относительная равновесная скорость перед отраженной УВ (пунктирная линия  $|U_{\text{fin}}^r|$ ), относительная равновесная скорость за отраженной УВ (тонкая штрихпунктирная линия  $|U_r|$ ), равновесные скорости звука (тонкие сплошные линии  $C_{e0}^*$ ,  $C_{e0}^{**}$ ,  $C_{e\text{fin}}$ ,  $C_{e\text{er}}$ ,  $C_{e\text{tr}}$ ) в начальных состояниях перед и за КР и в состояниях за падающей, отраженной и преломленной УВ.

Равновесная скорость звука рассчитывается по формуле

$$C_e^2 = \frac{\xi_1}{m_1} \frac{m_1 C - \rho \xi_1}{m_1^2 C - \rho \xi_1}, \quad m_1 = m_1^e(\rho),$$

где  $C = 1 - a^2 \bar{\rho}$ ; значения  $C_{e0}^*$ ,  $C_{e0}^{**}$ ,  $C_{efin}$ ,  $C_{etr}$ ,  $C_{er}$  определяются при подстановке равновесных параметров смеси для соответствующих равновесных состояний перед и за КР, а также за падающей, проходящей и отраженной УВ.

Согласно теореме Цемплена в случае устойчивого течения должны выполняться два условия: 1) относительная скорость падающей УВ больше равновесной скорости звука в смеси перед фронтом УВ; 2) относительная скорость потока за фронтом падающей УВ меньше равновесной скорости звука в конечном состоянии. Таким образом, падающая УВ1 является устойчивой при  $|D| > C_{e0}^*$  и  $|u_{fin} - D| < C_{efin}$ , проходящая УВ3 — при  $|D_{tr}| > C_{e0}^{**}$  и  $|u_{tr} - D_{tr}| < C_{etr}$ , отраженная УВ2 — при  $|u_{fin} - D_r| > C_{efin}$  и  $|u_r - D_r| < C_{er}$ . Из рис. 4 следует, что падающая УВ1 устойчиво распространяется по смеси при  $m_{10}^* \in (m_*, 1)$ , проходящая УВ3 устойчива на том же интервале, что и падающая УВ1, отраженная УВ2 устойчива на интервале  $m_{10}^* \in (m_{10}^{**}, 1)$ . При остальных значениях  $m_{10}^*$  условие теоремы Цемплена не выполняется, следовательно, течение является неустойчивым. Из проведенного выше анализа следует

**Утверждение 2.** Если  $m_{10}^* \in (m_{10}^{**}, 1)$ , то падающая, проходящая и отраженная УВ являются устойчивыми (см. рис. 1,а).

Если  $m_{10}^* \in (m_*, m_{10}^{**})$ , то падающая и проходящая УВ являются устойчивыми, а от КР отражается ВР (см. рис. 1,б).

Если  $m_{10}^* \in (0, m_*)$ , то реализуется волновая картина течения с падающей, проходящей и отраженной ВР.

Рассмотрим предельный случай, когда перепад объемных концентраций на границе КР отсутствует, т. е.  $m_{10}^* = m_{10}^{**}$ . Этот случай соответствует распространению УВ по двухкомпонентной смеси. При этом скорость проходящей УВ равна скорости падающей УВ ( $D_{tr} = D$ ), а скорость отраженной УВ определяется как  $D_r = u_r - U_r$ . Скорость КР равна массовой скорости смеси за падающей УВ ( $u_{кр} = u_{fin}$ ). В этом случае равновесные параметры смеси следующие:  $P_{кр} = P_{fin}$ ,  $\rho_r = \rho_{tr} = \rho_{fin}$ ,  $U_{fin}^r = U_r = -C_{efin}$ ,  $U_{tr} = U_{fin}$ . В табл. 1–3 значения параметров, соответствующих этому случаю, выделены курсивом.

Полученные результаты сравним с результатами, полученными в предельном случае, когда за границей КР находится абсолютно непроницаемое тело, т. е. падающая УВ1 взаимодействует с жесткой стенкой. Задача о взаимодействии УВ с жесткой стенкой в равновесном приближении изучена в [5].

В табл. 4 приведены значения равновесных параметров смеси за падающей УВ1 и установившихся после взаимодействия УВ с жесткой стенкой при  $D = -2,5$  и различных  $m_{10}^*$ . Из табл. 4 следует, что скорость  $D_r$  УВ, отраженной от жесткой стенки, больше скорости УВ, отраженной от границы КР (см. табл. 2). Отметим, что в исследуемом случае отсутствует возможность изменения направления движения УВ2, отраженной от жесткой границы. В табл. 4 приведены также значения коэффициента ослабления УВ2, отраженной от КР ( $k_{кр}/k_w$ ), представляющего собой отношение приращения давления при взаимодействии падающей УВ1 с КР, за которым  $m_{10}^{**} = 0,1$  ( $P_{кр} - P_{fin}$ ), к приращению давления при взаимодействии УВ с жесткой стенкой ( $P_r - P_{fin}$ ). Коэффициент  $k_{кр}/k_w$  увеличивается от нуля, когда перепад объемной концентрации на КР отсутствует ( $\Delta m = 0$ ), до 0,197 при  $\Delta m = 0,8$ .

**Асимптотические решения.** Исследуем предельные решения поставленной задачи в случае стремления объемных концентраций компонентов смеси к нулю и единице. Возможны три случая: 1) падающая УВ1 распространяется по двухкомпонентной смеси

Таблица 4

Равновесные параметры смеси за падающей и отраженной УВ при  $D = -2,5$  (жесткая стенка)

$m_{10}^*$	$u_{fin}$	$P_{fin}$	$D_r$	$P_r$	$k_{KP}/k_W$
0,1	-0,375	2,332	2,622	5,622	0
0,2	-0,685	3,974	2,446	10,828	0,0677
0,3	-0,928	5,002	2,271	15,186	0,105
0,4	-1,138	5,659	2,095	19,084	0,132
0,5	-1,326	6,048	1,909	22,700	0,152
0,6	-1,499	6,222	1,704	26,135	0,168
0,7	-1,662	6,213	1,470	29,449	0,181
0,8	-1,817	6,042	1,191	32,655	0,190
0,9	-1,964	5,719	0,846	35,662	0,197

и взаимодействует с однородным материалом; 2) УВ1 движется в чистом материале и взаимодействует с двухкомпонентной смесью; 3) УВ1 распространяется по чистому однокомпонентному материалу и взаимодействует с однородным материалом.

Рассмотрим первый случай, когда падающая УВ1 распространяется по двухкомпонентной смеси и взаимодействует с КР, за которым находится однородный материал. Уравнение состояния для однородного материала за границей КР имеет вид  $P^{**} = (a^{**})^2(\rho - \rho_0^{**})$ , где  $a^{**}$ ,  $\rho_0^{**}$  — безразмерные скорость звука и плотность в однородном материале. Это уравнение состояния используется при решении системы (3). Выражения для параметров смеси записываются в следующем виде:

- скорость проходящей УВ  $U_{tr} = -(a^{**})^2/D_{tr}$ ;
- скорость смеси за отраженной УВ  $U_r = (a^{**})^2/U_0^{**} + D_{tr} - D_r$ ;
- скорость отраженной УВ  $D_r = U_{fin} - U_0^* + \{P_{fin} - \rho_0^{**}[D_{tr}^2 - (a^{**})^2]\} / [\rho_{fin}(U_{fin} - U_0^* - D_{tr} - U_{tr})]$ .

Из условия равенства давлений на КР получается уравнение для определения скорости проходящей УВ  $D_{tr}$

$$[1 + \rho_0^{**}(D_{tr}^2 - (a^{**})^2)]^2 - [1 + \rho_0^{**}(D_{tr}^2 - (a^{**})^2)][C + \rho_r(C_{ef}^*)^2] + C\rho_r\xi_1^* = 0,$$

где  $\rho_r = \rho_{fin}(U_{fin} - U_0^* - D_r)/(D_{tr} - D_r + U_{tr})$ . На рис. 5 показано поведение корней этого уравнения (кривые 1-5) в зависимости от скорости проходящей УВ  $D_{tr}$  при скорости падающей УВ  $D = -2,5$ . Скорость звука и истинная плотность для чистого материала составляли:  $a^{**} = 3000$  м/с,  $\rho^{**} = 1825$  кг/м<sup>3</sup> (в безразмерном виде  $a^{**} = 2$ ,  $\rho^{**} = 1,825$ ).

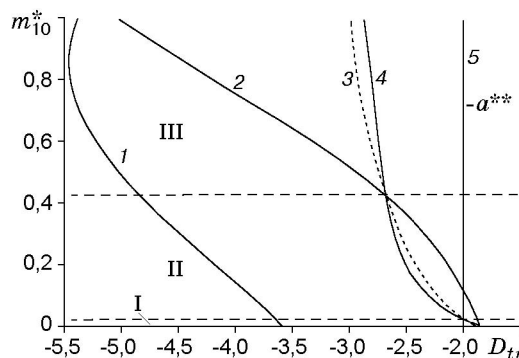


Рис. 5. Скорости УВ, проходящей из смеси в однородный материал

Таблица 5

Скорости УВ, проходящей из чистого материала в смесь

$D_{tr}$	$m_{10}^{**} = 0,3$		$m_{10}^{**} = 0,5$		$m_{10}^{**} = 0,7$	
	Уравнение (8)	Уравнение (7)	Уравнение (8)	Уравнение (7)	Уравнение (8)	Уравнение (7)
$D_{tr}^I$	-6,345	-6,124 -6,342	-5,408	-5,006 -5,404	-4,340	-3,771 -4,335
$D_{tr}^{II}$	-3,129	-3,107 -3,129	-2,857	-2,831 -2,857	-2,660	-2,630 -2,660
$D_{tr}^{III}$	-2,709	-2,754 -2,710	-2,552	-2,593 -2,553	-2,462	-2,502 -2,463
$D_{tr}^{IV}$	-1,187	-1,187	-1,026	-1,026	-0,969	-0,969
$D_{tr}^V$	1,187	1,187	1,026	1,026	0,969	0,969
$D_{tr}^{VI}$	3,902	4,264 3,906	6,411	8,848 6,428	9,972	—

Примечание. В графах 3, 5, 7 первое значение получено при  $m_{10}^* = 0,9$ , второе — при  $m_{10}^* = 0,999$ .

Существуют решения, соответствующие состоянию покоя ( $D_{tr} = 0$ ) и скорости звука в чистом материале за КР ( $D_{tr} = \pm a^{**}$ ), два из которых не приведены на рис. 5. На рис. 5 горизонтальными штриховыми линиями показаны границы областей I–III (см. утверждение 1). Отметим, что положение верхней границы соответствует условию равенства плотностей в чистом материале и смеси ( $\rho^{**} = \rho_0^*$ ). Корню, реализующемуся при численных расчетах нестационарной задачи, соответствует кривая 3.

Изучим второй предельный случай, когда УВ распространяется по чистому однокомпонентному веществу и взаимодействует со смесью двух конденсированных материалов. Уравнение состояния для чистого материала принято в виде  $P^* = (a^*)^2(\rho - \rho_0^*)$ , где  $a^*$ ,  $\rho_0^*$  — безразмерные скорость звука и плотность в однородном материале. В этом случае скорость потока за падающей УВ определяется как  $U_{fin} = (a^*)^2/U_0^*$ , а выражения для плотности и давления имеют вид  $\rho_{fin} = (U_0^*)^2\rho_0^*/(a^*)^2$ ,  $P_{fin} = \rho_0^*((U_0^*)^2 - (a^*)^2)$ . Скорость смеси за прошедшей УВ3 определяется из выражения (4), за отраженной УВ2 — из (5), скорость отраженной УВ2 — из (6). Четвертое уравнение системы (3), используемое для определения скорости проходящей УВ  $D_{tr}$ , записывается в виде

$$[1 + (a^*)^2(\rho_r - \rho_0^*)]^2 U_{tr} - [1 + (a^*)^2(\rho_r - \rho_0^*)][C U_{tr} + \rho_0^{**} U_0^{**} (C_{ef}^{**})^2] + C \rho_0^{**} U_0^{**} \zeta_1^{**} = 0, \quad (8)$$

где  $\rho_r = (\rho_0^* U_0^*/(a^*)^2)((a^*)^2 - D_r U_0^* - (U_0^*)^2)/(U_{tr} + D_{tr} - D_r)$ ;  $U_{tr}$  определяется по формуле (4).

Решения уравнения (8), соответствующие случаю наличия перед КР чистой жидкости ( $a^* = 1$ ,  $\rho_0^{**} = 1$ ), можно получить из уравнения (7), рассмотренного выше, при  $m_{10}^* \rightarrow 1$ . Результаты численного решения уравнения (7) (при определении корней уравнения для  $D_{tr}$ ,  $D_r$ ,  $U_r$ ,  $U_{tr}$ ,  $u_{KP}$ ,  $u_{fin}$ ,  $P_{KP}$ ,  $P_{fin}$ ,  $\rho_{fin}$ ,  $\rho_{tr}$ ,  $\rho_r$ ), полученные при  $m_{10}^* = 1 - \varepsilon$ , незначительно отличаются от результатов решения уравнения (8). В частности, при  $D = -2,5$  и значениях  $m_{10}^{**} = 0,3; 0,5; 0,7$  в интервале скоростей проходящей УВ от  $-10$  до  $10$  определено шесть корней (I–VI) уравнения (8) (табл. 5). В табл. 5 для каждого значения  $m_{10}^{**}$  представлены также решения, полученные из уравнения (7) при  $m_{10}^* = 0,9; 0,999$ . Из табл. 5

следует, что корни  $D_{tr}^{IV}$  и  $D_{tr}^V$  соответствуют значениям  $-C_e^{**}$  и  $C_e^{**}$  (скорости звука в смеси за КР). С увеличением  $m_{10}^*$  решение, полученное по формуле (7), приближается к точному решению, полученному из (8). В численных расчетах нестационарной задачи реализуется корень  $D_{tr}^{II}$ . Изменение корней  $D_{tr}$  в интервале  $m_{10}^* = 0,9 \div 0,999$  для общего решения (7) с  $m_{10}^{**} = 0,5$  показано на рис. 3. Отметим, что в рассмотренном примере чистый материал имеет меньшую плотность, чем смесь, поэтому всегда реализуется волновая картина, представленная на рис. 1, а.

Исследуем третий случай, когда имеется два чистых материала, разделенных КР. Для определенности полагаем  $m_{10}^{**} \rightarrow 0$ ,  $m_{10}^* \rightarrow 1$ . Для чистых материалов используются уравнения состояния вида  $P_i = a_i^2(\rho_i - \rho_{i0})$ , где нижний индекс  $i = 1$  соответствует материалу, находящемуся справа от КР (жидкая фаза),  $i = 2$  — материалу, находящемуся слева от КР (твердая фаза). Обезразмеривание уравнений осуществлялось по значениям параметров жидкой фазы. По материалу 1 со скоростью  $D$  движется УВ, за фронтом которой реализуется состояние со следующими газодинамическими параметрами:  $U_{fin} = 1/U_{10}$ ,  $\rho_{fin} = U_{10}^2$ ,  $P_{fin} = U_{10}^2 - 1$ . Из условий на проходящей УВ определяем параметры  $U_{tr} = a^2/U_{20}$ ,  $\rho_{tr} = \bar{\rho}U_{20}^2/a^2$ ,  $P_{tr} = \bar{\rho}(U_{20}^2 - a^2)$ . Из условий на отраженной УВ имеем  $U_r = 1/U_{fin}^r$ ,  $\rho_r = U_{10}^2(U_{fin}^r)^2$ ,  $P_r = U_{10}^2(U_{fin}^r)^2 - 1$ . Используя условия на КР после его взаимодействия с падающей УВ, получаем два выражения: в случае равенства давлений на КР скорость отраженной УВ  $D_r = D_r(U_{20}(D_{tr}))$  записывается в виде  $D_r = U_{fin} - U_{10} \mp \sqrt{\bar{\rho}(U_{20}^2 - a^2) + 1/U_{10}}$ , в случае равенства массовых скоростей на КР скорость проходящей УВ  $D_{tr}$  определяется из соотношения  $U_{tr} + D_{tr} = U_r + D_r$ . Подставляя полученные ранее выражения для  $U_{tr}$ ,  $U_r$ ,  $D_r$ , зависящие только от  $D_{tr}$ , получаем трансцендентное уравнение, которое для УВ, падающей со скоростью  $D = -2,5$ , имеет четыре действительных корня:  $-7,671$ ;  $-3,715$ ;  $-3,000$ ;  $3,000$ . Модуль значения последних двух решений соответствует скорости звука в твердом материале за КР. Проведенные численные эксперименты показали, что реализуется второй корень. Таким образом, при переходе УВ из жидкости в твердый материал устанавливаются следующие параметры:  $D_{tr} = -3,715$ ;  $D_r = -0,618$ ;  $U_{fin} = 0,400$ ;  $U_{tr} = 2,422$ ;  $U_r = -0,675$ ;  $\rho_{fin} = 6,250$ ;  $\rho_{tr} = 4,064$ ;  $\rho_r = 13,727$ ;  $P_{fin} = 5,250$ ;  $P_{кр} = 12,727$ ;  $u_{кр} = -1,292$ . Данные результаты совпадают с полученными из решения (7) при  $m_{10}^{**} = 0,0001$ ,  $m_{10}^* = 0,9999$ .

**Выводы.** В рамках математической модели равновесного приближения механики гетерогенных сред смеси двух конденсированных материалов исследована проблема взаимодействия УВ с КР, разделяющим две двухкомпонентные смеси с различными объемными концентрациями тяжелых частиц. В частности:

— получено асимптотическое по временам релаксации скоростей и давлений, стремящихся к нулю, решение, позволяющее определить волновую картину и параметры течения смеси, устанавливающиеся после взаимодействия УВ с КР;

— построена карта течений смеси, включающая три области с различными типами течения;

— показана возможность применения полученных результатов для предсказания поведения УВ, проходящих из однородного материала в смесь или из смеси в однородный материал, т.е. получена асимптотическая картина течения при стремлении объемной концентрации одного из компонентов к нулю или единице.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Федоров А. В.** Математическое описание течения смеси конденсированных материалов при высоких давлениях // Физическая газодинамика реагирующих сред. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990. С. 119–128.

2. **Жилин А. А., Федоров А. В., Фомин В. М.** Бегущая волна в двухскоростной смеси сжимаемых сред с различными давлениями // Докл. РАН. 1996. Т. 350, № 2. С. 201–205.
3. **Жилин А. А., Федоров А. В.** Структура ударной волны в двухскоростной смеси сжимаемых сред с различными давлениями // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 2. С. 10–19.
4. **Жилин А. А., Федоров А. В.** Распространение ударных волн в двухфазной смеси с различными давлениями компонентов // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 1. С. 55–63.
5. **Жилин А. А., Федоров А. В.** Отражение ударных волн от жесткой границы в смеси конденсированных материалов. 1. Равновесное приближение // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 5. С. 73–78.
6. **Жилин А. А., Федоров А. В.** Отражение ударных волн от жесткой границы в смеси конденсированных материалов. 2. Неравновесное приближение // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 6. С. 3–10.
7. **Жилин А. А., Федоров А. В.** Отражение ударной волны от жесткой стенки в смеси жидкого металла и твердых частиц // Физика горения и взрыва. 2000. Т. 36, № 4. С. 97–107.

*Поступила в редакцию 22/X 2001 г.*

---