УДК 539.376: 517.958

О ТЕНЗОРЕ АНИЗОТРОПИИ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Б. Д. Аннин*,**, Н. И. Остросаблин*

* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
** Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mail: annin@hydro.nsc.ru

С использованием подхода Кельвина, описывающего структуру обобщенного закона Гука, проведен анализ потенциальной модели анизотропной ползучести материалов. Рассмотрены уравнения ползучести несжимаемых трансверсально-изотропных, ортотропных материалов и материалов с кубической симметрией. Для тензоров анизотропии этих материалов определены собственные коэффициенты анизотропии и собственные тензоры.

Ключевые слова: установившаяся ползучесть, собственные коэффициенты анизотропии, собственные состояния, трансверсальная изотропия, ортотропия, несжимаемость.

Соотношения между тензором скоростей деформации и тензором напряжений для потенциальной модели установившейся анизотропной ползучести материала имеют вид [1]

$$\varepsilon_{ij} = \Phi'(f)\,\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \Phi'(f) A_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad 2f = A_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}, \quad i,j,k,l = 1,2,3, \tag{1}$$

где $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ — компоненты тензоров напряжений и скоростей деформации ползучести в декартовой прямоугольной системе координат x_i, $i = 1,2,3$; $A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{klij}$ — компоненты постоянного тензора четвертого ранга коэффициентов анизотропии; по повторяющимся буквенным индексам проводится суммирование по их допустимым значениям; штрих обозначает производную от потенциала ползучести по соответствующему аргументу. Если $\Phi'(f) = 1$ и ε_{ij} — тензор деформации, то соотношения (1) соответствуют обобщенному закону Гука для упругих анизотропных материалов.

Для многих материалов справедливо условие несжимаемости [1, 2]

$$\varepsilon_{ij}\delta_{ij} = 0, \tag{2}$$

где δ_{ij} — единичный тензор Кронекера. В предположении $\Phi'(f) \neq 0$ из (1), (2) следует

$$A_{ijkl}\delta_{ij} = 0, \qquad k,l = 1,2,3. \tag{3}$$

Примеры линейно-упругих анизотропных сред с условием (3) рассматривались в [3–7].

Для упрощения соотношений (1), (3) перейдем к векторному представлению в шестимерном пространстве (см., например, [8]) тензоров напряжений и скоростей деформаций ползучести

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6), \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-00481) и Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ 246.2012.1).

где

$$
\begin{gathered}
\sigma_1 = \sigma_{11}, \qquad \sigma_2 = \sigma_{22}, \qquad \sigma_3 = \sigma_{33}, \\
\sigma_4 = \sqrt{2}\,\sigma_{23} = \sqrt{2}\,\sigma_{32}, \qquad \sigma_5 = \sqrt{2}\,\sigma_{13} = \sqrt{2}\,\sigma_{31}, \qquad \sigma_6 = \sqrt{2}\,\sigma_{12} = \sqrt{2}\,\sigma_{21}, \\
\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}, \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \qquad \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}, \\
\varepsilon_4 = \sqrt{2}\,\varepsilon_{23} = \sqrt{2}\,\varepsilon_{32}, \qquad \varepsilon_5 = \sqrt{2}\,\varepsilon_{13} = \sqrt{2}\,\varepsilon_{31}, \qquad \varepsilon_6 = \sqrt{2}\,\varepsilon_{12} = \sqrt{2}\,\varepsilon_{21}.
\end{gathered} \tag{4}
$$

В частности, единичному тензору δ_{ij} соответствует вектор $\boldsymbol{\delta}$ с компонентами $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$, $\delta_3 = 1$, $\delta_4 = \delta_5 = \delta_6 = 0$.

Введем симметричную матрицу a_{ij} размером 6×6:

$$
a_{ij} = \begin{bmatrix}
A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & \sqrt{2}A_{1123} & \sqrt{2}\,A_{1113} & \sqrt{2}\,A_{1112} \\
A_{2211} & A_{2222} & A_{2233} & \sqrt{2}A_{2223} & \sqrt{2}\,A_{2213} & \sqrt{2}\,A_{2212} \\
A_{3311} & A_{3322} & A_{3333} & \sqrt{2}A_{3323} & \sqrt{2}\,A_{3313} & \sqrt{2}\,A_{3312} \\
\sqrt{2}A_{2311} & \sqrt{2}\,A_{2322} & \sqrt{2}\,A_{2333} & 2A_{2323} & 2A_{2313} & 2A_{2312} \\
\sqrt{2}\,A_{1311} & \sqrt{2}\,A_{1322} & \sqrt{2}\,A_{1333} & 2A_{1323} & 2A_{1313} & 2A_{1312} \\
\sqrt{2}\,A_{1211} & \sqrt{2}\,A_{1222} & \sqrt{2}\,A_{1233} & 2A_{1223} & 2A_{1213} & 2A_{1212}
\end{bmatrix}. \tag{5}
$$

Учитывая (4), (5), соотношения (1), (3) представим в виде

$$
\varepsilon_i = \Phi'(f) a_{ik}\sigma_k, \qquad 2f = a_{ij}\sigma_i\sigma_j, \qquad i, j, k = \overline{1, 6}; \tag{6}
$$

$$
a_{1k} + a_{2k} + a_{3k} = 0, \qquad k = \overline{1, 6}. \tag{7}
$$

При исследовании соотношений (6), (7) используем метод Кельвина (см., например, [9]).

Выражение (7) означает, что матрица a_{ik} имеет собственное состояние (вектор) вида $t_{i1} = \delta_i/\sqrt{3}$ и собственное значение $\mu_1 = 0$. Остальные собственные состояния (векторы) как тензоры второго ранга являются девиаторами:

$$
t_{i1}t_{ip} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\delta_i t_{ip} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(t_{1p} + t_{2p} + t_{3p}) = 0, \qquad p = \overline{2, 6}.
$$

Симметричная матрица a_{ij} коэффициентов анизотропии может быть представлена через собственные значения $\mu_1 = 0$, $\mu_2, \ldots, \mu_6$ и ортогональные собственные векторы $t_{ip}t_{iq} = \delta_{pq}$:

$$
a_{ij} = \mu_2 t_{i2}t_{j2} + \mu_3 t_{i3}t_{j3} + \mu_4 t_{i4}t_{j4} + \mu_5 t_{i5}t_{j5} + \mu_6 t_{i6}t_{j6}. \tag{8}
$$

В силу (4) каждый столбец ортогональной матрицы t_{ip} соответствует симметричному тензору второго ранга.

Выбирая столбцы t_{ip} в качестве базиса, для векторов (тензоров) ε_i, σ_i получаем [9] разложение

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_i = t_{ip}\tilde{\varepsilon}_p, \quad \tilde{\varepsilon}_p = \varepsilon_i t_{ip}, \qquad \sigma_i = t_{ip}\tilde{\sigma}_p, \quad \tilde{\sigma}_p = \sigma_i t_{ip}; \\
\tilde{\varepsilon}_1 = \varepsilon_i t_{i1} = \varepsilon_i\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\delta_i = 0, \quad \tilde{\sigma}_1 = \sigma_i\,\frac{1}{\sqrt{3}}\,\delta_i = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).
\end{gathered} \tag{9}
$$

Из (9) следует, что величины $\tilde{\varepsilon}_p$, $\tilde{\sigma}_p$, $p = \overline{1, 6}$ являются свертками двух тензоров второго ранга и инвариантны относительно ортогональных преобразований системы координат x_i. С учетом (8), (9) форма (6) записывается следующим образом:

$$
2f = \mu_2\tilde{\sigma}_2^2 + \mu_3\tilde{\sigma}_3^2 + \mu_4\tilde{\sigma}_4^2 + \mu_5\tilde{\sigma}_5^2 + \mu_6\tilde{\sigma}_6^2, \tag{10}
$$

причем она неотрицательна, если $\mu_i > 0$, $i = \overline{2, 6}$ [10]. Это предположение принимается в дальнейшем.

С учетом (8) получаем инвариантную запись соотношений (6)

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_i t_{i1} = \Phi'(f)\mu_1 t_{j1}\sigma_j, && \tilde\varepsilon_1 = \Phi'(f)\mu_1\tilde\sigma_1,\\
&\varepsilon_i t_{i2} = \Phi'(f)\mu_2 t_{j2}\sigma_j, && \tilde\varepsilon_2 = \Phi'(f)\mu_2\tilde\sigma_2,\\
&\varepsilon_i t_{i3} = \Phi'(f)\mu_3 t_{j3}\sigma_j, && \tilde\varepsilon_3 = \Phi'(f)\mu_3\tilde\sigma_3,\\
&\varepsilon_i t_{i4} = \Phi'(f)\mu_4 t_{j4}\sigma_j, && \tilde\varepsilon_4 = \Phi'(f)\mu_4\tilde\sigma_4,\\
&\varepsilon_i t_{i5} = \Phi'(f)\mu_5 t_{j5}\sigma_j, && \tilde\varepsilon_5 = \Phi'(f)\mu_5\tilde\sigma_5,\\
&\varepsilon_i t_{i6} = \Phi'(f)\mu_6 t_{j6}\sigma_j, && \tilde\varepsilon_6 = \Phi'(f)\mu_6\tilde\sigma_6.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

В (11) $\tilde\varepsilon_1 = 0$, $\mu_1 = 0$, при этом $\tilde\sigma_1 = (\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)/\sqrt{3}$ — функция, не зависящая от скоростей ползучести. Так как $\mu_i > 0$, $i = \overline{2,6}$, то из (11) находим

$$
\tilde\sigma_2 = \frac{1}{\Phi'(f)\mu_2}\,\tilde\varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \tilde\sigma_6 = \frac{1}{\Phi'(f)\mu_6}\,\tilde\varepsilon_6. \tag{12}
$$

Из (10), (12) следует соотношение

$$
2f(\Phi'(f))^2 = \frac{1}{\mu_2}\,\tilde\varepsilon_2^2 + \frac{1}{\mu_3}\,\tilde\varepsilon_3^2 + \frac{1}{\mu_4}\,\tilde\varepsilon_4^2 + \frac{1}{\mu_5}\,\tilde\varepsilon_5^2 + \frac{1}{\mu_6}\,\tilde\varepsilon_6^2.
$$

Запишем условия несжимаемости (7) в виде

$$
\begin{aligned}
&a_{11}+a_{21}+a_{31}=0, && a_{41}+a_{42}+a_{43}=0,\\
&a_{21}+a_{22}+a_{32}=0, && a_{51}+a_{52}+a_{53}=0,\\
&a_{31}+a_{32}+a_{33}=0, && a_{61}+a_{62}+a_{63}=0.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Уравнения (13) аналогичны условиям для нонора [11], который также имеет собственный вектор вида $t_{i1} = \delta_i/\sqrt{3}$ и нулевое собственное значение. Нонор N_{ijkl} представляет собой симметричный по всем индексам тензор четвертого ранга, все следы которого являются нулевыми: $N_{ijkk} = 0$.

В качестве примера в [1] рассматривается трансверсально-изотропный материал (ось симметрии x_3), для которого матрица a_{ij} имеет вид

$$
a_{ij} = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 & 0 & 0\\
a_{21} & a_{11} & a_{31} & 0 & 0 & 0\\
a_{31} & a_{31} & a_{33} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11}-a_{21}
\end{bmatrix}. \tag{14}
$$

Из условий (13) следует, что

$$
a_{21} = \frac{1}{2}\,a_{33} - a_{11}, \qquad a_{31} = -\frac{1}{2}\,a_{33},
$$

при этом матрица (14) принимает вид

$$
a_{ij} = \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{33}/2-a_{11} & -a_{33}/2 & 0 & 0 & 0\\
a_{33}/2-a_{11} & a_{11} & -a_{33}/2 & 0 & 0 & 0\\
-a_{33}/2 & -a_{33}/2 & a_{33} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{11}-a_{33}/2
\end{bmatrix}. \tag{15}
$$

Для матрицы (14) собственные значения и векторы приведены в [12]. Для матрицы (15) получаем собственные векторы

$$t_{ip} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad |t_{ip}| = -1 \tag{16}$$

и собственные значения

$$\begin{gathered} \mu_1 = 0, \qquad \mu_2 = 3a_{33}/2 > 0, \\ \mu_3 = \mu_6 = 2a_{11} - a_{33}/2 > 0, \qquad \mu_4 = \mu_5 = a_{44} > 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Квадратичная форма (10)

$$2f = \mu_2\tilde{\sigma}_2^2 + \mu_3(\tilde{\sigma}_3^2 + \tilde{\sigma}_6^2) + \mu_4(\tilde{\sigma}_4^2 + \tilde{\sigma}_5^2) \geqslant 0 \tag{18}$$

неотрицательна, если выполняются неравенства (17).

Матрица (16) совпадает с матрицей собственных состояний для изотропного материала и материала с кубической симметрией [12]. С учетом (16) получаем выражения

$$\tilde{\sigma}_1 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/\sqrt{3}, \qquad \tilde{\sigma}_2 = (\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3)/\sqrt{6},$$

$$\tilde{\sigma_3} = (\sigma_1 - \sigma_2)/\sqrt{2}, \qquad \tilde{\sigma_4} = \sigma_4, \qquad \tilde{\sigma_5} = \sigma_5, \qquad \tilde{\sigma_6} = \sigma_6$$

и уравнения (11)

$$\begin{gathered} \frac{1}{\sqrt{6}}\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3) = \Phi'(f)\mu_2\,\frac{1}{\sqrt{6}}\,(\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \Phi'(f)\mu_3\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,(\sigma_1 - \sigma_2), \\ \varepsilon_4 = \Phi'(f)\mu_4\sigma_4, \qquad \varepsilon_5 = \Phi'(f)\mu_4\sigma_5, \qquad \varepsilon_6 = \Phi'(f)\mu_3\sigma_6. \end{gathered} \tag{19}$$

Пусть в (19) $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_i = 0$, $i = \overline{2,6}$, т. е. напряженное состояние представляет собой одноосное растяжение. Тогда из (19) получаем

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 = 3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \Phi'(f)\mu_2\sigma_1, \quad \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \Phi'(f)\mu_3\sigma_1, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0;$$

$$\frac{\mu_3}{\mu_2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}. \tag{20}$$

Здесь учтено условие несжимаемости (2). Если при растяжении напряжением σ_1 экспериментально измеряются скорости деформаций ε_1, ε_2, то с использованием (20) можно определить отношение μ_3/μ_2. В [1] принято $\mu_2 = 3a_{33}/2 = 1$, т. е. выполнено обезразмеривание напряжений. Тогда из (20) следует

$$\mu_3 = 2a_{11} - \frac{1}{3} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \qquad a_{11} = \frac{1}{3(1 + \varepsilon_2/\varepsilon_1)}, \tag{21}$$

т. е. определяется постоянная a_{11}, если полученные экспериментальные данные позволяют считать правую часть (21) постоянной. Из (21) следует, что a_{11} зависит только от отношения поперечной скорости деформации ε_2 к продольной ε_1.

Пусть в (19) $\sigma_3 \neq 0$, $\sigma_4 \neq 0$, $\sigma_i = 0$, $i \neq 3, 4$, что соответствует эксперименту на совместное растяжение и кручение. Тогда из (19) получаем

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 = \Phi'(f)\mu_2(-2\sigma_3), \quad \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_4 = \Phi'(f)\mu_4\sigma_4, \quad \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = 0;$$

$$\mu_4 = a_{44} = \frac{\varepsilon_4}{3\varepsilon_3}\,\frac{2\sigma_3}{\sigma_4}. \tag{22}$$

Здесь учтено условие (2) и то, что $\mu_2 = 1$. При заданных σ_3, σ_4 по экспериментально измеренным скоростям деформаций ε_3, ε_4 с использованием (22) определяется постоянная $\mu_4 = a_{44}$, если полученные экспериментальные данные позволяют считать выражение (22) постоянным. Для рассмотренных двух примеров функция (18) принимает вид $2f = a_{11}\sigma_1^2$ или $2f = 2\sigma_3^2/3 + \mu_4\sigma_4^2$.

В случае ортотропии с осями симметрии x_1, x_2, x_3 матрица a_{ij} принимает вид

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Из условий несжимаемости (13) следует, что

$$a_{32} = \frac{1}{2}\,(a_{11} - a_{22} - a_{33}), \quad a_{31} = \frac{1}{2}\,(a_{22} - a_{11} - a_{33}), \quad a_{21} = \frac{1}{2}\,(a_{33} - a_{11} - a_{22}),$$

при этом матрица (23) записывается в виде

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & (a_{33} - a_{11} - a_{22})/2 & (a_{22} - a_{11} - a_{33})/2 & 0 & 0 & 0 \\ (a_{33} - a_{11} - a_{22})/2 & a_{22} & (a_{11} - a_{22} - a_{33})/2 & 0 & 0 & 0 \\ (a_{22} - a_{11} - a_{33})/2 & (a_{11} - a_{22} - a_{33})/2 & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{66} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Матрица (24) имеет следующие собственные значения:

$$\begin{gathered} \mu_1 = 0, \quad \mu_2 > 0, \quad \mu_3 > 0, \quad \mu_4 = a_{44} > 0, \quad \mu_5 = a_{55} > 0, \quad \mu_6 = a_{66} > 0, \\ \mu_{2,3} = \frac{1}{2}\left[a_{11} + a_{22} + a_{33} \pm \sqrt{2[(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{22} - a_{33})^2 + (a_{33} - a_{11})^2]}\,\right]. \end{gathered} \tag{25}$$

Условие положительности μ_2, μ_3 можно записать в виде

$$(a_{11} - a_{22})^2 + (a_{22} - a_{33})^2 + (a_{33} - a_{11})^2 < a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2.$$

Матрица (24) имеет собственные векторы

$$t_{ip} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & b(2c-1)/\sqrt{3} & b & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & b(2-c)/\sqrt{3} & -bc & 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -b(1+c)/\sqrt{3} & b(c-1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \frac{1}{\sqrt{1 + (c-1)^2 + c^2}}, \tag{26}$$

где

$$c = \frac{\mu_2 + 3(a_{33} - a_{11} - a_{22})/2}{2\mu_2 - 3a_{11}}.$$

Знаки корней в выражениях (25) выбираются таким образом, чтобы при $c = 1$ эти выражения переходили в выражения (17). Если матрица (24) принимает вид (15), то $c = 1$ и матрица (26) переходит в матрицу (16) собственных векторов для случая трансверсальной изотропии.

С учетом (26) запишем выражения

$$\tilde{\sigma}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad \tilde{\sigma}_2 = \frac{b}{\sqrt{3}}\,[(2c-1)\sigma_1 + (2-c)\sigma_2 - (1+c)\sigma_3],$$

$$\tilde{\sigma}_3 = b[\sigma_1 - c\sigma_2 + (c-1)\sigma_3], \quad \tilde{\sigma}_4 = \sigma_4, \quad \tilde{\sigma}_5 = \sigma_5, \quad \tilde{\sigma}_6 = \sigma_6$$

и соотношения (11)

$$\frac{b}{\sqrt{3}}\,[(2c-1)\varepsilon_1 + (2-c)\varepsilon_2 - (1+c)\varepsilon_3] = \Phi'(f)\mu_2\,\frac{b}{\sqrt{3}}\,[(2c-1)\sigma_1 + (2-c)\sigma_2 - (1+c)\sigma_3],$$

$$b[\varepsilon_1 - c\varepsilon_2 + (c-1)\varepsilon_3] = \Phi'(f)\mu_3 b[\sigma_1 - c\sigma_2 + (c-1)\sigma_3], \tag{27}$$

$$\varepsilon_4 = \Phi'(f)\mu_4\sigma_4, \qquad \varepsilon_5 = \Phi'(f)\mu_5\sigma_5, \qquad \varepsilon_6 = \Phi'(f)\mu_6\sigma_6.$$

Пусть в (27) $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_i = 0$, $i = \overline{2,6}$, т. е. имеет место одноосное растяжение по первому направлению. Тогда из (27) получаем

$$\frac{\mu_2}{\mu_3}\,(2c-1) = \frac{3(c+\nu_{21})}{2-c+(1-2c)\nu_{21}}, \qquad \nu_{21} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \tag{28}$$

Здесь учтено условие (2).

Пусть напряженное состояние соответствует растяжению по второму направлению: $\sigma_2 \neq 0$, $\sigma_i = 0$, $i \neq 2$. Тогда из (27) находим

$$\frac{\mu_2(c-2)}{\mu_3 c} = \frac{3(c\nu_{12}+1)}{(2-c)\nu_{12}+1-2c}, \qquad \nu_{12} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}. \tag{29}$$

Здесь также учитывается условие (2). Так как ν_{21}, ν_{12} можно считать известными из эксперимента, то из (28), (29), исключая μ_2/μ_3, получаем уравнение для постоянной c

$$\frac{c-2}{c(2c-1)} = \frac{(c\nu_{12}+1)[2-c+(1-2c)\nu_{21}]}{[(2-c)\nu_{12}+1-2c](c+\nu_{21})}.$$

При различных вариантах действия напряжений σ_i по измеренным в эксперименте соответствующим скоростям деформаций ползучести ε_i на основе соотношений (27) можно найти собственные значения (собственные коэффициенты анизотропии) μ_i, $i = \overline{2,6}$. Примеры определения собственных значений приведены выше для случая трансверсальной изотропии. Одно значение μ_i, например μ_2, может быть задано [1].

При одноосном напряженном состоянии экспериментальные зависимости для металлов достаточно точно описываются уравнениями [2]

$$\varepsilon_1 = b_1\sigma_1^n, \quad \varepsilon_2 = b_2\sigma_2^n, \quad \ldots, \quad \varepsilon_6 = b_6\sigma_6^n, \tag{30}$$

где b_i ($i = \overline{1,6}$), n — постоянные. Некоторые конкретные значения этих постоянных приведены в [2]. Из результатов сравнения (6) и (30) следует, что потенциальную функцию $\Phi(f)$

можно выбрать в виде $\Phi(f) = f^{(n+1)/2}$, при этом $\Phi'(f) = (n+1)f^{(n-1)/2}/2$. Например, при $\sigma_1 \neq 0$ из (6), (30) получаем выражение

$$b_1\sigma_1^n = \Phi'(f)a_{11}\sigma_1 = \frac{n+1}{2}\,f^{(n-1)/2}a_{11}\sigma_1 = \frac{n+1}{2}\Big(\frac{a_{11}}{2}\,\sigma_1^2\Big)^{(n-1)/2}a_{11}\sigma_1 = \\ = (n+1)\Big(\frac{a_{11}}{2}\Big)^{(n+1)/2}\sigma_1^n,$$

из которого следует

$$b_1 = (n+1)\Big(\frac{a_{11}}{2}\Big)^{(n+1)/2}.$$

Аналогично для других случаев $\sigma_i \neq 0$, $i = \overline{2,6}$ находим зависимость между коэффициентами анизотропии

$$b_2 = (n+1)\Big(\frac{a_{22}}{2}\Big)^{(n+1)/2}, \quad b_3 = (n+1)\Big(\frac{a_{33}}{2}\Big)^{(n+1)/2}, \quad \ldots, \quad b_6 = (n+1)\Big(\frac{a_{66}}{2}\Big)^{(n+1)/2}.$$

В случае кубической симметрии имеем соотношения

$$a_{11} = a_{22} = a_{33}, \qquad a_{21} = a_{31} = a_{32}, \qquad a_{44} = a_{55} = a_{66}.$$

Тогда матрица (24) принимает вид

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{11}/2 & -a_{11}/2 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{11}/2 & a_{11} & -a_{11}/2 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{11}/2 & -a_{11}/2 & a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}, \tag{31}$$

при этом из (25) следует

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \mu_3 = 3a_{11}/2 > 0, \quad \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = a_{44} > 0,$$

а собственные векторы t_{ip} можно выбрать в виде (16). Если к тому же $a_{44} = a_{11} - a_{21} = 3a_{11}/2 > 0$, то матрица (31) будет соответствовать несжимаемому изотропному материалу.

Таким образом, в работе с использованием подхода Кельвина получены инвариантные уравнения установившейся ползучести несжимаемых материалов при общей анизотропии и для случаев трансверсальной изотропии, ортотропии, кубической симметрии. Указаны эксперименты, позволяющие на основе этих уравнений определить собственные (инвариантные) параметры анизотропии, а также стандартные коэффициенты анизотропии. Представляет интерес экспериментальное подтверждение существования несжимаемых материалов с матрицей коэффициентов анизотропии, соответствующей нонору.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
2. **Соснин О. В.** Об анизотропной ползучести материалов // ПМТФ. 1965. № 6. С. 99–104.
3. **Pipkin A. C.** Constraints in linearly elastic materials // J. Elast. 1976. V. 6, N 2. P. 179–193.
4. **Podio-Guidugli P., Vianello M.** Internal constraints and linear constitutive relations for transversely isotropic materials // Rend. Lincei. Mat. Appl. Ser. 9. 1991. V. 2, N 3. P. 241–248.
5. **Felippa C. A., Oñate E.** Stress, strain and energy splittings for anisotropic elastic solids under volumetric constraints // Comput. Struct. 2003. V. 81, N 13. P. 1343–1357.

6. **Felippa C. A., Oñate E.** Volumetric constraint models for anisotropic elastic solids // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 2004. V. 71, N 5. P. 731–734.
7. **Kowalczyk-Gajewska K., Ostrowska-Maciejewska J.** The influence of internal restrictions on the elastic properties of anisotropic materials // Arch. Mech. 2004. V. 56, N 3. P. 205–232.
8. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
9. **Аннин Б. Д., Остросаблин Н. И.** Анизотропия упругих свойств материалов // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 6. С. 131–151.
10. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Гостехтеоретиздат, 1954.
11. **Победря Б. Е.** Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979.
12. **Остросаблин Н. И.** Собственные модули упругости и состояния для материалов кристаллографических сингоний // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1986. Вып. 75. С. 113–125.

Поступила в редакцию 24/VI 2013 г.