

УДК 539.376

## РЕШЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

А. А. Должковой, Н. Н. Попов, В. П. Радченко

Самарский государственный технический университет, 443100 Самара  
E-mails: alexdol@poria.ru, popov@pm.samgtu.ru, radch@samgtu.ru

Методом малого параметра в третьем приближении получено решение физически и статистически нелинейной задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы, находящейся под действием внутреннего давления. Вычислены дисперсии случайных скоростей деформаций ползучести и перемещений. Полученные результаты сравниваются с решением аналогичной задачи в первом и втором приближениях. Предложена методика оценки надежности толстостенной трубы по деформационным критериям отказа.

**Ключевые слова:** стохастическая неоднородность, статистическая нелинейность, установившаяся ползучесть, толстостенная труба, краевая задача, метод малого параметра.

1. Существенное влияние случайных возмущений механических характеристик материала на поля деформаций и напряжений и необходимость построения соответствующих стохастических моделей для расчетов на прочность отмечались во многих работах (см., например, [1–3]). Особую актуальность эта проблема приобретает для деформации ползучести, разброс экспериментальных значений которой может составлять до 50–70 %, и такие результаты приходится рассматривать как приемлемые [3–5].

Исследование напряженно-деформированного состояния элементов конструкций, работающих в условиях нелинейной ползучести, является достаточно сложной задачей даже в детерминированной постановке. Необходимость учета микронеоднородностей материала приводит к стохастическим краевым задачам, в которых кроме физической нелинейности определяющих уравнений приходится учитывать и статистическую нелинейность. Отмеченные сложности приводят к тому, что аналитические решения стохастических краевых задач ползучести получены лишь в ряде простейших случаев [6–9].

Одним из методов решения стохастических краевых задач как в упругой области, так и в условиях ползучести является метод малого параметра [6–10]. Однако вследствие существенных трудностей вычисления моментов второго и более высоких порядков случайной функции он позволяет найти решения краевых стохастических задач установившейся ползучести лишь в первом приближении [6, 8].

В настоящей работе ставится задача построения аналитического решения краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы под действием внутреннего давления методом малого параметра до третьего приближения.

Рассмотрим данную задачу в цилиндрических координатах для случая плоского деформированного состояния ( $\varepsilon_z(r, t) = 0$  или  $\dot{\varepsilon}_z(r, t) = 0$ ) в предположении, что стохастические неоднородности материала цилиндрической оболочки описываются функцией одной

переменной — радиуса  $r$ . При этом компоненты тензоров деформаций и напряжений будут также случайными функциями только радиуса  $r$ .

Деформации ползучести  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_\varphi$  в соответствии с теорией вязкого течения (установившейся ползучести) описываются следующими реологическими соотношениями в стохастической форме [9]:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_r &= -(\sqrt{3}/2)c(\sigma_\varphi - \sigma_r)^n[1 + \alpha U(r)], \\ \dot{\varepsilon}_\varphi &= (\sqrt{3}/2)c(\sigma_\varphi - \sigma_r)^n[1 + \alpha U(r)],\end{aligned}\quad (1)$$

где  $\sigma_r, \sigma_\varphi$  — радиальное и тангенциальное напряжения;  $U(r)$  — случайная функция, описывающая стохастическую неоднородность материала оболочки трубы, статистические характеристики которой известны:  $\langle U \rangle = 0$ ,  $\langle U^2 \rangle = 1$ ;  $\alpha$  — коэффициент вариации механических свойств ( $0 < \alpha < 1$ );  $c, n$  — постоянные материала;  $\langle \cdot \rangle$  — символ математического ожидания.

Напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi$  удовлетворяют дифференциальному уравнению равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \quad (2)$$

и граничным условиям

$$\sigma_r(a) = -q, \quad \sigma_r(b) = 0, \quad (3)$$

где  $a$  и  $b$  — внутренний и наружный радиусы трубы;  $q$  — давление.

Компоненты тензора скоростей деформаций удовлетворяют условию совместности

$$r \frac{d\dot{\varepsilon}_\varphi}{dr} + \dot{\varepsilon}_\varphi - \dot{\varepsilon}_r = 0. \quad (4)$$

Рассмотрим задачу определения напряженного состояния трубы, которая сводится к решению системы уравнений (1), (2), (4) относительно напряжений при граничных условиях (3). Эта система может быть приведена к статистически нелинейному уравнению второго порядка относительно радиального напряжения (штрихом обозначается дифференцирование по  $r$ ):

$$r(1 + \alpha U(r))\sigma_r'' + \left(\frac{n+2}{n}(1 + \alpha U(r)) + \frac{r}{n}\alpha U_r'\right)\sigma_r' = 0. \quad (5)$$

Для получения приближенного аналитического решения этого уравнения используется метод разложения радиального напряжения  $\sigma_r$  по малому параметру  $\alpha$ :

$$\sigma_r = \sigma_{r0} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \sigma_{rk}, \quad \langle \sigma_r \rangle = \sigma_{r0}. \quad (6)$$

Подставляя (6) в уравнение (5) и приравнявая множители при одинаковых степенях  $\alpha$ , получаем следующую систему уравнений:

$$r\sigma_{r0}'' + \frac{n+2}{n}\sigma_{r0}' = 0; \quad (7)$$

$$r\sigma_{r1}'' + \frac{n+2}{n}\sigma_{r1}' = -\frac{r}{n}U'\sigma_{r0}'; \quad (8)$$

$$\begin{aligned}r\sigma_{rk}'' + \frac{n+2}{n}\sigma_{rk}' &= -\frac{r}{n}U'[\sigma_{rk-1}' - U\sigma_{rk-2}' + U^2\sigma_{rk-3}' - \dots + (-1)^{k-1}U^{k-1}\sigma_{r0}'], \\ k &= 2, 3, 4, \dots\end{aligned}\quad (9)$$

Решение данной системы в рекуррентной форме связано с трудностями вычислительного характера. Поэтому ограничимся системой четырех первых уравнений. Она будет состоять из уравнений (7), (8) и следующих двух уравнений, полученных из (9) при  $k = 2, 3$ :

$$r\sigma''_{r2} + \frac{n+2}{n}\sigma'_{r2} = -\frac{r}{n}U'(\sigma'_{r1} - U\sigma'_{r0}); \quad (10)$$

$$r\sigma''_{r3} + \frac{n+2}{n}\sigma'_{r3} = -\frac{r}{n}U'(\sigma'_{r2} - U\sigma'_{r1} + U^2\sigma'_{r0}). \quad (11)$$

Система уравнений (7), (8), (10), (11) при граничных условиях (3) дает следующее решение:

$$\sigma_{r0} = A[b^{-2/n} - r^{-2/n}]; \quad (12)$$

$$\sigma_{r1} = \frac{2A}{n^2}[(a^{-2/n} - r^{-2/n})H_1 - I_1(r)]; \quad (13)$$

$$\sigma_{r2} = \frac{2A}{n^2}\left[\frac{n+1}{2n}I_2(r) - \frac{2H_1}{n^2}I_1(r) + C_1(a^{-2/n} - r^{-2/n})\right]; \quad (14)$$

$$\sigma_{r3} = \frac{2A}{n^2}\left[-\frac{2n^2+3n+1}{6n^2}I_3(r) + \frac{(n+1)H_1}{n^3}I_2(r) - \frac{2}{n^2}C_1I_1(r) + C_2(a^{-2/n} - r^{-2/n})\right], \quad (15)$$

где

$$A = q/(a^{-2/n} - b^{-2/n}); \quad H_k = BI_k(b) \quad (k = 1, 2, 3); \quad B = 1/(a^{-2/n} - b^{-2/n});$$

$$I_k(r) = \int_a^r U^k(x)x^{-1-2/n} dx \quad (k = 1, 2, 3);$$

$$C_1 = \frac{2H_1^2}{n^2} - \frac{n+1}{2n}H_2; \quad C_2 = \frac{2n^2+3n+1}{6n^2}H_3 - \frac{n+1}{n^3}H_1H_2 + \frac{2}{n^2}C_1H_1.$$

Выражение (12) — известное детерминированное решение [11], а (13)–(15) — решения, обусловленные стохастической постановкой задачи. Таким образом, решение (12)–(15) определяет радиальное напряжение  $\sigma_r$  в третьем приближении.

Теперь найдем приближенные значения компонент тензора скоростей деформаций  $\dot{\epsilon}_r$  и  $\dot{\epsilon}_\varphi$ , имеющих представление (1). Величину  $\sigma_\varphi - \sigma_r$ , входящую в соотношения (1), с помощью полученных решений (12)–(15) и (2) можно представить в виде

$$\sigma_\varphi - \sigma_r = r(\sigma'_{r0} + \alpha\sigma'_{r1} + \alpha^2\sigma'_{r2} + \alpha^3\sigma'_{r3}). \quad (16)$$

Возводя левую и правую части соотношения (16) в степень  $n$  и подставляя полученное выражение в (1), можно найти выражение для компоненты  $\dot{\epsilon}_\varphi$ :

$$\dot{\epsilon}_\varphi = r^n(\sigma'_{r0} + \alpha\sigma'_{r1} + \alpha^2\sigma'_{r2} + \alpha^3\sigma'_{r3})^n(1 + \alpha U).$$

Разлагая степенную функцию  $(\sigma'_{r0} + \alpha\sigma'_{r1} + \alpha^2\sigma'_{r2} + \alpha^3\sigma'_{r3})^n$  в ряд Тейлора по  $\alpha$  и учитывая только члены до третьего порядка малости, после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_\varphi = \frac{T}{r^2} \left[ 1 + \frac{2\alpha}{n}H_1 + \frac{2\alpha^2(n+1)}{n^3}H_1^2 - \frac{\alpha^2(n+1)}{n^2}H_2 + \frac{\alpha^3(2n^2+3n+1)}{3n^3}H_3 - \right. \\ \left. - \frac{2\alpha^3(n+1)^2}{n^4}H_1H_2 + \frac{4\alpha^3(n+1)(n+2)}{3n^5}H_1^3 + o(\alpha^3) \right] = -\dot{\epsilon}_r, \quad (17) \end{aligned}$$

где  $T = (\sqrt{3})^{n-1}cA^n/n^n$ .

С учетом соотношения (17) выражение для функции перемещений имеет следующий вид:

$$u(t) = \varepsilon_\varphi r = (\dot{\varepsilon}_\varphi t)r = T \frac{t}{r} \left[ 1 + \frac{2\alpha}{n} H_1 + \frac{2\alpha^2(n+1)}{n^3} H_1^2 - \frac{\alpha^2(n+1)}{n^2} H_2 + \frac{\alpha^3(2n^2+3n+1)}{3n^3} H_3 - \frac{2\alpha^3(n+1)^2}{n^4} H_1 H_2 + \frac{4\alpha^3(n+1)(n+2)}{3n^5} H_1^3 + o(\alpha^3) \right]. \quad (18)$$

**2.** Найдем основные статистические характеристики радиального перемещения  $u(t)$ . Эти характеристики будем вычислять в предположении, что случайная функция  $U(r)$ , задающая случайное поле возмущений механических свойств материала, распределена по нормальному закону. В этом случае моменты нечетных порядков равны нулю, а центральные моменты четных порядков выражаются через моменты второго порядка. Например, центральные моменты четвертого порядка вычисляются по формуле [12]

$$\langle \overset{\circ}{I}_1 \overset{\circ}{I}_2 \overset{\circ}{I}_3 \overset{\circ}{I}_4 \rangle = k_{12} k_{34} + k_{13} k_{24} + k_{14} k_{23}, \quad (19)$$

где  $\overset{\circ}{I}_k$  — центрированные случайные величины;  $k_{ij}$  — моменты второго порядка. Все моменты второго порядка выражаются через моменты случайной функции  $I_k(r)$ :

$$\begin{aligned} \langle I_1(r) \rangle &= \int_a^r \langle U(x) \rangle x^{-1-2/n} dx = 0, \\ \langle I_1^2(r) \rangle &= \int_a^r \int_a^r \langle U(x_1) U(x_2) \rangle x_1^{-1-2/n} x_2^{-1-2/n} dx_1 dx_2 = \\ &= \int_a^r \int_a^r K(x_2 - x_1) x_1^{-1-2/n} x_2^{-1-2/n} dx_1 dx_2, \\ \langle I_2(r) \rangle &= \int_a^r \langle U^2(x) \rangle x^{-1-2/n} dx = \int_a^r x^{-1-2/n} dx = \frac{n}{2} (a^{-2/n} - r^{-2/n}), \\ \langle I_3(r) \rangle &= \int_a^r \langle U^3(x) \rangle x^{-1-2/n} dx = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $K(x_2 - x_1)$  — корреляционная функция случайного однородного поля  $U(r)$ .

Учитывая формулы (20), получаем следующее соотношение для средних перемещений:

$$M_u = \langle u(t) \rangle = T \frac{t}{r} \left[ 1 + \frac{2\alpha^2(n+1)\langle H_1^2 \rangle}{n^3} - \frac{\alpha^2(n+1)\langle H_2 \rangle}{n^2} + o(\alpha^3) \right]. \quad (21)$$

Рассматривая выражения (17) и (18) как суммы зависимых случайных функций, для дисперсий случайных перемещений и случайных скоростей деформаций можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} D_u = D[u(t)] &= T^2 \frac{t^2}{r^2} \left[ \frac{4\alpha^2}{n^2} D[H_1] + \frac{4\alpha^4(n+1)^2}{n^6} D[H_1^2] + \frac{\alpha^4(n+1)^2}{n^4} D[H_2] + \right. \\ &+ \frac{\alpha^6(2n^2+3n+1)^2}{9n^6} D[H_3] + \frac{4\alpha^6(n+1)^4}{n^8} D[H_1 H_2] + \left. \frac{16\alpha^6(n+1)^2(n+2)^2}{9n^{10}} D[H_1^3] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{4\alpha^4(2n^2 + 3n + 1)}{3n^4} \langle \dot{H}_1 \dot{H}_3 \rangle - \frac{12\alpha^4(n + 1)^2}{n^5} \langle \dot{H}_1^2 \dot{H}_2 \rangle + \frac{16\alpha^4(n + 1)(n + 2)}{3n^6} \langle \dot{H}_1^4 \rangle - \\
 & - \frac{4\alpha^6(2n^2 + 3n + 1)(n + 1)^2}{3n^7} \langle \dot{H}_1 \dot{H}_2 \dot{H}_3 \rangle + \frac{8\alpha^6(2n^2 + 3n + 1)(n + 1)(n + 2)}{9n^8} \langle \dot{H}_1^3 \dot{H}_3 \rangle - \\
 & - \frac{16\alpha^6(n + 1)^3(n + 2)}{9n^9} \langle \dot{H}_1^4 \dot{H}_2 \rangle + o(\alpha^6) \Big]; \quad (22)
 \end{aligned}$$

$$D[\dot{\varepsilon}_\varphi] = D[\dot{\varepsilon}_r] = D_u/(t^2 r^2). \quad (23)$$

Используя формулу (19), запишем подробно каждое слагаемое формул (21)–(23):

$$D[H_1] = \langle H_1^2 \rangle = B^2 IK(n),$$

$$D[H_1^2] = \langle \dot{H}_1^4 \rangle = 3\langle H_1^2 \rangle^2 = 3B^4 (IK_1(n))^2, \quad \langle H_2 \rangle = B \langle I_2(b) \rangle = n/2,$$

$$D[H_2] = \langle \dot{H}_2^2 \rangle = B^2 \int_a^b \int_a^b \langle U^2(x_1)U^2(x_2) \rangle x_1^{-1-2/n} x_2^{-1-2/n} dx_1 dx_2 = \frac{n^2}{4} + 2B^2 IK_2(n),$$

$$D[H_3] = \langle \dot{H}_3^2 \rangle = B^2 \int_a^b \int_a^b \langle U^3(x_1)U^3(x_2) \rangle x_1^{-1-2/n} x_2^{-1-2/n} dx_1 dx_2 = 9B^2 IK_1(n),$$

$$\begin{aligned}
 D[H_1 H_2] = \langle \dot{H}_1^2 \dot{H}_2^2 \rangle & = B^4 \int_a^b \int_a^b \int_a^b \int_a^b \langle U(x_1)U(x_2)U^2(x_3)U^2(x_4) \rangle \times \\
 & \times x_1^{-1-2/n} x_2^{-1-2/n} x_3^{-1-2/n} x_4^{-1-2/n} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \\
 & = (n^2/4)B^2 IK_1(n) + (n/2)B^3 IK_3(n) + 2B^4 (IK_1(n))^2 + 4B^4 IK_4(n),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D[H_1^3] = \langle \dot{H}_1^6 \rangle & = B^6 \int_a^b \int_a^b \int_a^b \int_a^b \int_a^b \int_a^b \langle U(x_1)U(x_2)U(x_3)U(x_4)U(x_5)U(x_6) \rangle \times \\
 & \times x_1^{-1-2/n} x_2^{-1-2/n} x_3^{-1-2/n} x_4^{-1-2/n} x_5^{-1-2/n} x_6^{-1-2/n} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 dx_6 = \\
 & = 9B^6 (IK_1(n))^3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle \dot{H}_1^2 \dot{H}_2 \rangle & = B^3 \int_a^b \int_a^b \int_a^b \langle U(x_1)U(x_2)U^2(x_3) \rangle x_1^{-1-2/n} x_2^{-1-2/n} x_3^{-1-2/n} dx_1 dx_2 dx_3 = \\
 & = (n/2)B^2 IK_1(n) + 2B^3 IK_3(n),
 \end{aligned}$$

$$\langle \dot{H}_1 \dot{H}_3 \rangle = B^2 \int_a^b \int_a^b \langle U(x_1)U^3(x_2) \rangle x_1^{-1-2/n} x_2^{-1-2/n} dx_1 dx_2 = 3B^2 IK_1(n),$$

$$\begin{aligned}
 \langle \dot{H}_1^4 \rangle & = B^4 \int_a^b \int_a^b \int_a^b \int_a^b \langle U(x_1)U(x_2)U(x_3)U(x_4) \rangle \times \\
 & \times x_1^{-1-2/n} x_2^{-1-2/n} x_3^{-1-2/n} x_4^{-1-2/n} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 3B^4 (IK_1(n))^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \dot{H}_1 \dot{H}_2 \dot{H}_3 \rangle &= B^3 \int_a^b \int_a^b \int_a^b \langle U(x_1) U^2(x_2) U^3(x_3) \rangle \times \\
&\quad \times x_1^{-1-2/n} x_2^{-1-2/n} x_3^{-1-2/n} dx_1 dx_2 dx_3 = (3n/2) B^2 IK_1(n) + 6B^3 IK_3(n), \\
\langle \dot{H}_1^3 \dot{H}_3 \rangle &= B^4 \int_a^b \int_a^b \int_a^b \int_a^b \langle U(x_1) U(x_2) U(x_3) U^3(x_4) \rangle \times \\
&\quad \times x_1^{-1-2/n} x_2^{-1-2/n} x_3^{-1-2/n} x_4^{-1-2/n} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 9B^4 (IK_1(n))^2, \\
\langle \dot{H}_1^4 \dot{H}_2 \rangle &= B^5 \int_a^b \int_a^b \int_a^b \int_a^b \int_a^b \langle U(x_1) U(x_2) U(x_3) U(x_4) U^2(x_5) \rangle \times \\
&\quad \times x_1^{-1-2/n} x_2^{-1-2/n} x_3^{-1-2/n} x_4^{-1-2/n} x_5^{-1-2/n} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 = \\
&\quad = (3n/2) B^4 (IK_1(n))^2 + 6B^5 IK_1(n) IK_3(n),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
IK_1(n) &= \int_a^b \int_a^b K(x_2 - x_1) x_1^{-1-2/n} x_2^{-1-2/n} dx_1 dx_2; \\
IK_2(n) &= \int_a^b \int_a^b K^2(x_2 - x_1) x_1^{-1-2/n} x_2^{-1-2/n} dx_1 dx_2; \\
IK_3(n) &= \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(x_2 - x_1) K(x_3 - x_2) x_1^{-1-2/n} x_2^{-1-2/n} x_3^{-1-2/n} dx_1 dx_2 dx_3; \\
IK_4(n) &= \int_a^b \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(x_2 - x_1) K(x_3 - x_2) K(x_4 - x_3) \times \\
&\quad \times x_1^{-1-2/n} x_2^{-1-2/n} x_3^{-1-2/n} x_4^{-1-2/n} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.
\end{aligned}$$

**3.** Как следует из вышеприведенных формул, для вычисления дисперсий необходимо иметь зависимость для корреляционной функции.

Статистическая обработка опытных данных показывает, что корреляционные функции механических характеристик являются знакопеременными затухающими функциями [13, 14] и их можно аппроксимировать выражением

$$K(\rho) = e^{-\gamma|\rho|} (\cos(\beta\rho) + (\gamma/\beta) \sin \beta|\rho|), \quad \rho = x_2 - x_1, \quad \gamma > 0, \quad (24)$$

где  $\gamma, \beta$  — постоянные величины, определяемые по опытным данным из условий наилучшей аппроксимации.

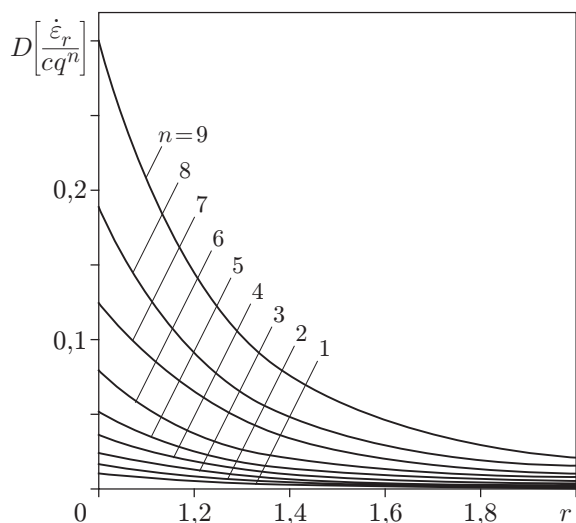


Рис. 1

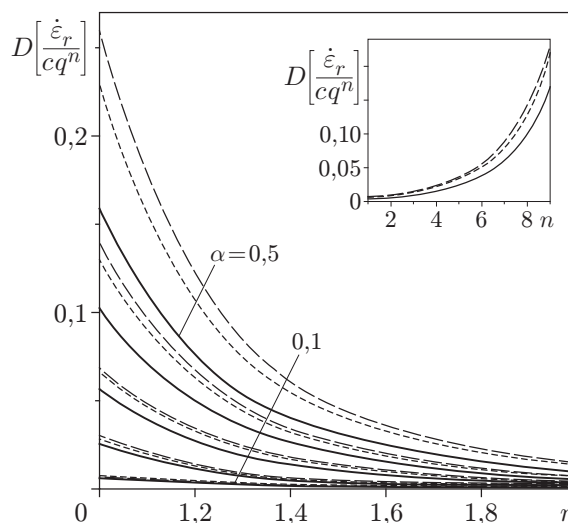


Рис. 2

Рис. 1. Зависимости дисперсий приведенных скоростей деформаций от  $r$  для различных  $n$  при  $\alpha = 0,3$

Рис. 2. Дисперсии приведенных скоростей деформаций в первом (сплошные линии), втором (пунктирные линии) и третьем (штриховые линии) приближениях для различных  $\alpha$  при  $n = 5$

Далее вычисления моментов второго порядка проводились в предположении, что корреляционная функция случайного однородного и одномерного поля неоднородностей  $U(r)$  имеет вид (24) со следующими численными значениями параметров:  $\gamma = 10, \beta = 20$ .

Целью дальнейших исследований являлся анализ влияния второго и третьего приближений, а также значений показателя нелинейности установившейся ползучести  $n$  и коэффициента вариации  $\alpha$  на дисперсии скоростей деформаций  $\dot{\epsilon}_r$  и  $\dot{\epsilon}_\varphi$ .

Численные расчеты, выполненные для толстостенной трубы с внутренним и наружным радиусами соответственно  $a = 1, b = 2$ , показали, что дисперсии приведенных скоростей деформаций  $D[\dot{\epsilon}_r / (cq^n)]$  и  $D[\dot{\epsilon}_\varphi / (cq^n)]$  с ростом  $n$  увеличиваются, причем наибольшие значения дисперсий наблюдаются вблизи внутренней поверхности трубы, а наименьшие — в окрестности наружной поверхности трубы. Данное утверждение иллюстрируется графиком дисперсий как функций радиуса  $r$  (рис. 1). На рис. 2 представлен график, показывающий различия дисперсий, вычисленных в первом (сплошные линии), втором (пунктирные линии) и третьем (штриховые линии) приближениях. В правом верхнем углу на рис. 2 изображен срез представленного на рис. 1 графика при фиксированном  $r = 1,5$  и  $\alpha = 0,3$ , показывающий зависимость дисперсий от показателя нелинейности  $n$ , с дополнением его графиками дисперсий, вычисленных во втором и третьем приближениях.

В таблице представлены численные значения дисперсий приведенных скоростей деформаций в зависимости от  $n$  и  $\alpha$  при  $r = 1,5$ . В столбце D1 приведены значения, вычисленные с учетом только первого члена разложения приближенного решения, в столбце D2 — с учетом двух первых членов, в столбце D3 — с учетом трех первых членов.

Из приведенных на рис. 1 и 2 графиков и таблицы видно, что для слабонеоднородных материалов ( $\alpha = 0,1 \div 0,2$ ) значения дисперсий скоростей деформаций во втором и третьем приближениях различаются незначительно. Для материалов с большой степенью неоднородности ( $\alpha = 0,4 \div 0,5$ ) значения дисперсий скоростей деформаций, вычисленные

Дисперсии приведенных скоростей деформаций  
в первом (D1), втором (D2) и третьем (D3) приближениях при различных  $n$  и  $\alpha$

$\alpha$	$n$	D1	D2	D3
0,1	1	0,0006	0,0006	0,0006
	3	0,0013	0,0013	0,0013
	5	0,0030	0,0031	0,0031
	7	0,0074	0,0076	0,0076
	9	0,0179	0,0184	0,0185
	11	0,0437	0,0447	0,0451
0,2	1	0,0023	0,0028	0,0029
	3	0,0050	0,0057	0,0059
	5	0,0121	0,0135	0,0140
	7	0,0294	0,0325	0,0337
	9	0,0717	0,0788	0,0816
	11	0,1747	0,1914	0,1980
0,3	1	0,0051	0,0079	0,0085
	3	0,0113	0,0147	0,0159
	5	0,0272	0,0342	0,0367
	7	0,0663	0,0818	0,0877
	9	0,1613	0,1973	0,2114
	11	0,3930	0,4777	0,5115
0,4	1	0,0092	0,0178	0,0199
	3	0,0200	0,0309	0,0346
	5	0,0484	0,0704	0,0786
	7	0,1178	0,1668	0,1859
	9	0,2868	0,4004	0,4459
	11	0,6987	0,9664	1,0748
0,5	1	0,0141	0,0355	0,0408
	3	0,0313	0,0578	0,0671
	5	0,0757	0,1293	0,1497
	7	0,1841	0,3037	0,3513
	9	0,4482	0,7254	0,8383
	11	1,0918	1,7454	2,0154

по третьему приближению, могут превосходить соответствующие значения, вычисленные по второму приближению, в полтора раза, а вычисленные по первому приближению — в два раза. Поэтому в данном случае неучет членов третьего порядка малости может привести к необоснованному завышению показателей прочности и надежности толстостенной трубы.

4. Работоспособность многих элементов конструкций оценивается по параметрическим (деформационным) критериям отказа. Очевидно, что оценка надежности элементов конструкций по детерминированным моделям является первым (и в ряде случаев недостаточным) приближением и не учитывает естественный разброс механических характеристик и выходных параметров. Полученные выше стохастические оценки для деформаций ползучести и перемещений позволяют решить задачу о надежности толстостенной трубы по деформационному критерию отказа в статистической постановке.

Рассмотрим задачу оценки надежности толстостенной трубы, когда срок службы определяется моментом достижения перемещением  $u(t)$  некоторой заданной величины  $u_*$ .

Пусть условием безотказной работы трубы является выполнение соотношения

$$u(t) < u_*,$$



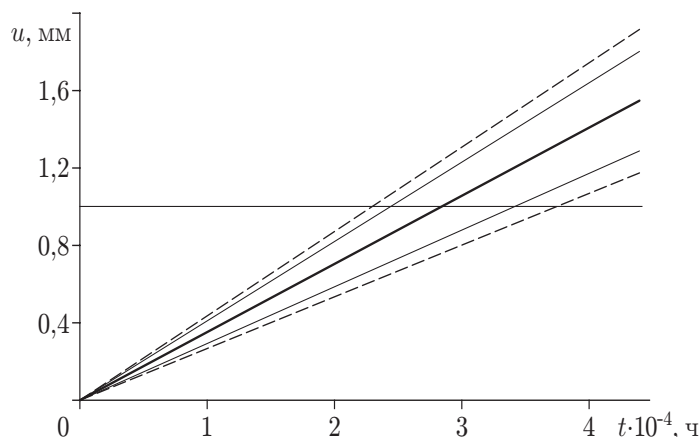


Рис. 3. Статистическая оценка перемещения на внутреннем диаметре для толстостенной трубы из стали 12ХМФ ( $T = 590$  °С) с внутренним и наружным радиусами  $a = 14$  мм и  $b = 16,68$  мм при внутреннем давлении  $q = 28$  МПа

где  $u_*$  — заданная детерминированная величина. Тогда функция надежности  $P(t)$ , описывающая вероятность безотказной работы на отрезке  $[0, t]$ , равна вероятности пребывания случайной функции  $u(t)$  в допустимой области  $(0, u_*)$  на этом отрезке времени [1]:

$$P(t) = P\{u(\tau) \in (0, u_*), \tau \in [0, t]\}. \quad (25)$$

В связи с тем что перемещение при ползучести является возрастающей функцией, функция  $u(t)$ , покинув в некоторый момент времени область  $(0, u_*)$ , затем в эту область возвратиться не может. Поэтому для вероятности безотказной работы  $P(t)$  на отрезке времени  $[0, t]$  имеет место более простая формула [1]

$$P(t) = P\{u(t) \in (0, u_*)\}. \quad (26)$$

В отличие от общего случая (25), когда вычисление случайной функции требует рассмотрения выбросов случайного процесса, здесь достаточно вычислить вероятность нахождения случайной функции  $u(t)$  в заданной области в рассматриваемый момент времени, при этом используются выражения (21) и (22) для основных характеристик функции перемещения  $u(t)$ .

Для иллюстрации метода оценки надежности рассмотрим конкретный пример ползучести толстостенной трубы из стали 12ХМФ ( $T = 590$  °С) с постоянными материала  $c = 3,03 \cdot 10^{-14}$ ,  $n = 7,1$ , внутренним и наружным радиусами  $a = 14$  мм и  $b = 16,68$  мм соответственно и степенью неоднородности материала  $\alpha = 0,3$ , находящейся под действием внутреннего давления  $q = 28$  МПа [15]. В качестве параметра, определяющего ресурс трубы, используется перемещение на внутреннем радиусе, критическое значение которого  $u_* = 1$  мм.

Результаты расчетов дают следующие основные характеристики для случайных перемещений на внутреннем диаметре: математическое ожидание  $M_u = \langle u(t) \rangle = 3,52 \cdot 10^{-5}t$ ; дисперсия и среднее квадратическое отклонение для первого приближения  $D_u(t) = 3,78 \cdot 10^{-12}t^2$ ,  $s_u(t) = 1,946 \cdot 10^{-6}t$ ; для третьего приближения  $D_u(t) = 7,82 \cdot 10^{-12}t^2$ ,  $s_u(t) = 2,796 \cdot 10^{-6}t$  ( $s_u(t) = \sqrt{D_u(t)}$ ).

В качестве примера на рис. 3 показаны расчетные значения математического ожидания для перемещения на внутреннем диаметре (сплошная жирная линия) и интервалы  $u(t) \pm 3s_u(t)$  для первого (сплошные тонкие линии) и третьего (штриховые линии) приближений.

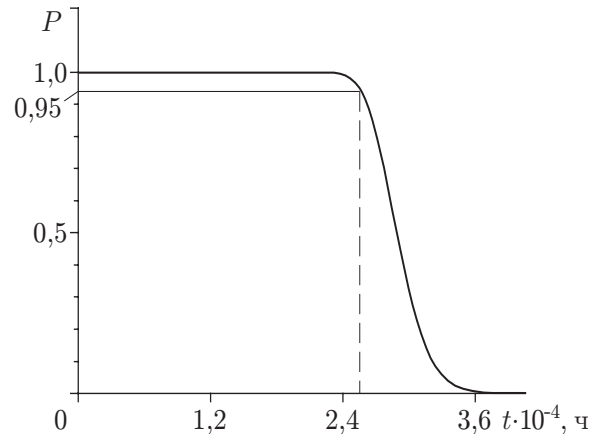


Рис. 4. Функция надежности  $P(t)$  для толстостенной трубы из стали 12ХМФ ( $T = 590$  °С) с внутренним и наружным радиусами  $a = 14$  мм и  $b = 16,68$  мм при внутреннем давлении  $q = 28$  МПа,  $u_* = 1$  мм

Результаты расчетов показали, что для заданного уровня  $u_* = 1$  мм математическое ожидание для перемещения  $u(t)$  достигается за 28 431 ч, а его трехсигмовая полоса для первого приближения имеет величину  $24\,383 \div 34\,091$  ч, для третьего —  $22\,956 \div 37\,337$  ч. Как видно из приведенного примера, учет третьего приближения дает существенные уточнения при оценке надежности.

Согласно формуле (26) для вероятности безотказной работы имеем

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} s_u(t)} \int_0^{u_*} e^{-(x - \langle u(t) \rangle)^2 / (2s_u^2(t))} dx$$

или

$$P(t) = \Phi \left[ \frac{u_* - \langle u(t) \rangle}{s_u(t)} \right] + \Phi \left[ \frac{\langle u(t) \rangle}{s_u(t)} \right],$$

где  $\Phi(x)$  — функция Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz.$$

Вероятность  $P(t)$  можно использовать при определении ресурса толстостенной трубы. Назначенный ресурс  $T_*$  определяют так, чтобы вероятность обеспечения  $T_*$  была равна заданному значению  $p_*$  вероятности безотказной работы. При этом вероятность  $p_*$  выбирают достаточно близкой к единице.

График изменения во времени вероятности безотказной работы рассматриваемой трубы для заданного значения  $u_* = 1$  мм представлен на рис. 4. Из него, в частности, следует, что при заданном значении  $u_* = 1$  мм ресурс для рассматриваемой трубы с вероятностью  $p_* = 0,95$  составляет  $t = 25\,143$  ч.

Таким образом, предлагаемый метод приближенного аналитического решения стохастической краевой задачи в условиях нелинейной установившейся ползучести позволяет уточнить существующие модели и эффективно решать проблему оценок надежности цилиндрических элементов конструкций.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Болотин В. В.** Прогнозирование ресурсов машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984.
2. **Ломакин В. А.** Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М.: Наука, 1970.
3. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
4. **Бадаев А. Н.** К вопросу об определении функции распределения параметров уравнения состояния ползучести // Пробл. прочности. 1984. № 12. С. 22–26.
5. **Радченко В. П., Дудкин С. А., Тимофеев М. И.** Экспериментальное исследование и анализ полей неупругих микро- и макронеоднородностей сплава АД-1 // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. Вып. 16. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2002. С. 111–117.
6. **Попов Н. Н., Самарин Ю. П.** Исследование полей напряжений вблизи границы стохастически неоднородной полуплоскости при ползучести // ПМТФ. 1988. № 1. С. 159–164.
7. **Кузнецов В. А.** Ползучесть стохастически неоднородных сред в условиях плоского напряженного состояния // Математическая физика: Сб. науч. тр. Куйбышев: Куйбышев. политехн. ин-т, 1977. С. 69–74.
8. **Попов Н. Н.** Нелинейная стохастическая задача ползучести толстостенной сферической оболочки // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. Вып. 9. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2000. С. 186–190.
9. **Попов Н. Н., Самарин Ю. П.** Пространственная задача стационарной ползучести стохастически неоднородной среды // ПМТФ. 1985. № 2. С. 150–155.
10. **Кунташев П. А., Немировский Ю. В.** О сходимости метода возмущений в задачах теории упругости // Изв. АН СССР. Механика твердых тел. 1985. № 3. С. 75–78.
11. **Качанов Л. М.** Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960.
12. **Свешников А. А.** Прикладные методы теории случайных функций. М.: Наука, 1968.
13. **Кукса Л. В., Лебедев А. А., Ковальчук Б. И.** О законах распределения микродеформаций в двухфазных поликристаллических сплавах при простом и сложном нагружениях // Пробл. прочности. 1986. № 1. С. 7–11.
14. **Богачев И. И., Вайнштейн А. А., Волков С. Д.** Статистическое металловедение. М.: Металлургия, 1984.
15. **Радченко В. П., Еремин Ю. А.** Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций. М.: Машиностроение-1, 2004.

*Поступила в редакцию 22/III 2005 г.*

---