НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ПОЛЯ В ОХЛАЖДАЕМЫХ ДИСКАХ

В. И. Ванько

(*Новосибирск*)

Рассматривается неустановившийся тепловой процесс в двух дисках без центрального сверления. Перепад температур по толщине диска не учитывается.

1. Рассмотрим сплошной диск, прогреваемый с обода потоком рабочего газа температуры T_1=const. По торцам происходит охлаждение газом нулевой температуры, причем расход охлаждающего газа считаем бесконечно большим. В начальный момент температура диска равна температуре охлаждающего газа.

Пусть r — текущий радиус, R — радиус диска на ободе, $t°$ C — температура диска, γ_g — коэффициент теплоотдачи от рабочего газа к диску, γ_0 — коэффициент теплоотдачи от диска к охлаждающему газу, λ=const—коэффициент теплопроводности материала диска, c — удельная теплоемкость, ρ — плотность материала диска, n^2 — величина, имеющая размерность времени, τ — время, $h(x)$ — уравнение профиля, h_1 — толщина диска на ободе, B — критерий Био, F — критерий Фурье

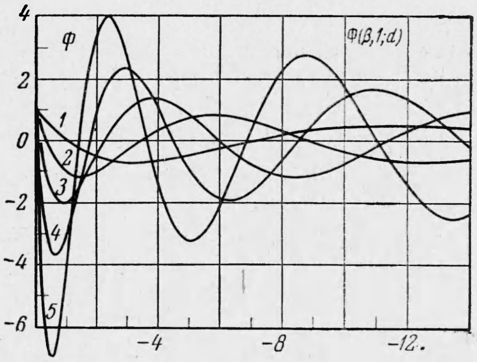
$$n^2 = \frac{R^2\rho c}{\lambda}, \qquad B = \frac{\gamma_g R}{\lambda}, \qquad F = \frac{\tau}{n^2}$$

$$f(x) = \frac{xh(x)}{h_1}, \qquad m^2 = \frac{2R^2\gamma_0}{\lambda h_1}$$

Введем безразмерные величины

$$x = \frac{r}{R} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

$$u = \frac{t}{T_1} \qquad (0 \leqslant u \leqslant 1)$$



Фиг. 1

Задача приводится к уравнению теплопроводности следующего вида [1]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - m^2 xu = n^2 f(x)\frac{\partial u}{\partial \tau} \tag{1.1}$$

с условиями

$$u(x, 0) = 0, \qquad -\frac{\partial u}{\partial x} + B(1-u) = 0 \quad \text{при } x = 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0 \tag{1.2}$$

Применяя преобразование Лапласа

$$L[u(x,\tau)] \equiv \int_0^\infty u(x,\tau)e^{-\tau s}\,d\tau = U(x,s)$$

к задаче (1.1), (1.2), с учетом начального условия имеем

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\frac{dU}{dx}\right) - m^2 xU = sn^2 f(x)\,U \tag{1.3}$$

$$U' + BU = \frac{B}{s} \quad \text{при } x = 1, \qquad U' = 0 \quad \text{при } x = 0 \tag{1.4}$$

Здесь $f(x)$ — функция, зависящая от профиля, всюду на [0, 1] положительная, она предполагается непрерывной с непрерывной производной. Характеристические уравнения, рассматриваемые в работе, соответствуют краевой задаче с собственными значениями (s)

$$(fU')' - m^2xU = sn^2fU, \quad U' + BU = 0 \quad \text{при } x = 1$$
$$U' = 0 \quad \text{при } x = 0$$

Из анализа Гильберта — Шмидта краевых задач для линейных дифференциальных уравнений следует, что в рассматриваемом случае [2]:

1) существуют собственные значения, корни уравнений, и все они действительны,

2) множество собственных значений бесконечно.

2. Рассмотрим диск гиперболического профиля $h(x) = kx^{-1}$. В уравнении (1.3) положим γ_0=const, тогда m^2 = const. Имеем

$$U'' - (m^2x + n^2s)\,U = 0 \qquad (2.1)$$

$$-U' + B\left[\frac{1}{s} - U\right] = 0 \quad \text{при } x = 1, \qquad U' = 0 \quad \text{при } x = 0 \qquad (2.2)$$

Замена переменной $t = m^2x + n^2s$ дает уравнения

$$U'' - a^2tU = 0 \qquad \left(a = \frac{1}{m}\right) \qquad (2.3)$$

которое посредством преобразования [3]

$$U = \sqrt{t}\,\eta, \quad t = a^{-1/3}\left(\frac{3}{2}\xi\right)^{2/3}$$

переходит в уравнение Бесселя мнимого аргумента

$$\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d\eta}{d\xi}\right) - \left(\xi + \frac{1}{9\xi}\right)\eta = 0$$

Решение его после перехода к переменной x имеет вид

$$U(x,\,s) = z(x)\,\{A_1I_{1/3}(bz^3) + A_2I_{-1/3}(bz^3)\} \qquad \left(z(x) = \sqrt{m^2x + n^2S},\ b = {}^2/_3\,a^{1/2}\right)$$

Производная по x запишется так:

$$U' = 3bz^3\frac{dz}{dx}\{A_1I_{-2/3}(bz^3) + A_2I_{2/3}(bz^3)\}$$

Неизвестные постоянные интегрирования A_1 и A_2 находим из граничных условий

$$A_1 = \frac{\Delta A_1}{\Delta}, \qquad A_2 = \frac{\Delta A_2}{\Delta}$$

где

$$\Delta = z_0^2I_{2/3}(bz_0^3)\,[lz_1^2I_{-2/3}(bz_1^3) + Bz_1I_{1/3}(bz_1^3)] - z_0^2I_{-2/3}(bz_0^3)\,[lz_1^2I_{2/3}(bz_1^3) + Bz_1I_{-1/3}(bz_1^3)]$$

$$\Delta A_1 = \frac{B}{S}z_0^2I_{2/3}(bz_0^3), \qquad \Delta A_2 = -\frac{B}{S}z_0^2I_{-2/3}(bz_0^3)$$

$$z_1 = z(1), \qquad z_0 = z(0), \qquad l = m^{2/3}$$

Следовательно, изображающая функция имеет вид

$$U(x,s) = \frac{\Delta A_1}{\Delta}zI_{1/3}(bz^3) + \frac{\Delta A_2}{\Delta}zI_{-1/3}(bz^3) \qquad (2.4)$$

Введем параметры

$$n^2s = -\mu^2, \qquad m^2 + n^2s = -\varkappa^2 \qquad (\mu^2 = m^2 + \varkappa^2) \qquad (2.5)$$

Так как характеристическое уравнение комплексных корней не имеет, то $\mu^2 > m^2$.

Выражение (2.4) будет суммой обобщенных полиномов [4], удовлетворяющих всем условиям теоремы обращения. Поэтому, переходя к оригиналу и учитывая связь между функциями Бесселя мнимого и действительного аргументов, получим

$$U(x,s) = \frac{B\sqrt{x}\,I_{-1/3}(bm^3\sqrt{x^3})}{lmI_{2/3}(bm^3) + BI_{-1/3}(bm^3)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B\sqrt{\mu_n^2 - m^2x}}{\mu_n^2\sqrt{\mu_n^2 - m^2}\,d\psi(\mu_n)/d\mu}\times \qquad (2.6)$$

$$\times\,[J_{1/3}(b\sqrt{(\mu_n^2 - m^2x)^3})\,J_{2/3}(b\mu_n^3) + J_{-1/3}(b\sqrt{(\mu_n^2 - m^2x)^3})\,J_{-2/3}(b\mu_n^3)]\exp(-\mu_n^2F_0)$$

где μ_n — корни уравнения (2.7)

$$\psi(\mu) = J_{2/3}(b\mu^3)\,[\varkappa lJ_{-2/3}(b\varkappa^3) - BJ_{1/3}(b\varkappa^3)] - J_{-2/3}(b\mu^3)\,[\varkappa lJ_{2/3}(b\varkappa^3) - BJ_{-1/3}(b\varkappa^3)] = 0$$

Параметры μ и $\varkappa$ связаны зависимостью (2.5), а $l = m^{2/3}$. Первый член в (2.6) дает стационарное температурное поле для чисел Био $B < \infty$. При больших числах

Био, т. е. когда температуру на ободе можно принять равной единице, распределение температур получается предельным переходом $\lim U\ (x,\tau)$ при $B \to \infty$.

3. Рассмотрим случай диска постоянной толщины сечения $h(x) = \mathrm{const}$. Коэффициент $\gamma_0 = a_0(1 + x^2)$; отсюда $m^2 = \alpha^2(1 + x^2)$. Имеем

$$U'' + \frac{1}{x}U' - (\alpha^2 x^2 + \sigma)\ U = 0 \qquad (\sigma = \alpha^2 + n^2 s) \tag{3.1}$$

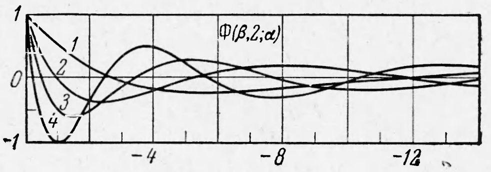
Здесь s — параметр преобразования Лапласа. Граничные условия прежние.

После замены переменной $\alpha^2 x^2 + \sigma = t$ получим уравнение с линейными относительно t коэффициентами

$$U''(t - \sigma) + U' - \frac{t}{4\alpha^2}U = 0 \tag{3.3}$$

Уравнение подобного типа после замены переменных [5]

$$U = z \exp\ (ht)\,, \qquad t = \lambda\xi + \mu$$



Фиг. 2

при соответствующем выборе параметров, именно

$$h = -\frac{1}{2\alpha}\,, \qquad \lambda = \alpha\,,\ \mu = \sigma$$

преобразуется в вырожденное гипергеометрическое

$$\xi\frac{d^2z}{d\xi^2} + (1 - \xi)\frac{dz}{d\xi} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sigma}{4\alpha}\right) z = 0 \tag{3.3}$$

Положив

$$\frac{1}{2} + \frac{\sigma}{4\alpha} = \beta,\ 1 = \gamma$$

имеем решение

$$z = A_1\Phi\ (\beta, \gamma; \xi) + A_2\psi\ (\beta, \gamma; \xi)$$

Здесь $\Phi\ (\beta, \gamma; \xi)$ — вырожденный гипергеометрический ряд

$$(\Phi\ (\beta, \gamma; \xi) = 1 + \frac{\beta}{\gamma}\frac{\xi}{1!} + \frac{\beta\,(\beta + 1)}{\gamma\,(\gamma + 1)}\frac{\xi^2}{2!} + \ldots$$

Так как $\gamma = 1$, то, как следует из теории, второе решение (3.3) содержит логарифмический член. Поэтому в силу граничного условия при $x = 0$ необходимо положить $A_2 = 0$. Изображение имеет вид

$$U\ (x,\ s) = A_1 \exp\left\{-\frac{dx^2}{2} - \frac{\sigma}{2\alpha}\right\}\Phi\left(\frac{1}{2} + \frac{\sigma}{4\alpha}\,,\ 1;\ \alpha x^2\right)$$

Найдем A_1 из условия при $x = 1$

$$U\ (x, s) = B\exp\left(-\frac{\alpha x^2}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{\Phi\ (\beta, \gamma; \alpha x^2)}{s\,[(B - \alpha)\,\Phi\,(\beta, \gamma; \alpha) + 2\alpha\beta\Phi\,(\beta + 1, \gamma + 1; \alpha)]}\quad \begin{pmatrix} B > 0 \\ \alpha > 0 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Найдем оригинал (3.4). Знаменатель имеет нулевой корень $s = 0$. Исследуем расположение корней уравнения

$$\chi\,(\beta) = (B - \alpha)\ \Phi\ (\beta, 1; \alpha) + 2\alpha\beta\Phi\ (\beta + 1, 2; \alpha) = 0 \tag{3.5}$$

В области $\beta > 0$ функции $\Phi(\beta,\ 1; \alpha)$ и $\Phi(\beta + 1,\ 2;\ \alpha)$ представляют собой бесконечные ряды с положительными членами. Если $B - \alpha \geqslant 0$, то на правой полуоси корней нет ($B_k \leqslant 0$). Отсюда

$$\beta_k = \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2 + n^2 s_k}{4\alpha} \leqslant 0, \qquad s_k \leqslant \frac{1}{n^2}(-\alpha^2 - 2\alpha)$$

Таким образом найдется такая прямая $s = s_c$, что все полюсы (3.4) расположены левее ее. Оригинал строится по теореме обращения. Если $B - \alpha < 0$, на правой полуоси, на отрезке $[0, 1]$, найдется хотя бы один корень, так как

$$\varkappa\,(0) = B - \alpha < 0, \quad \varkappa\,(1) = (B + \alpha)\,e^\alpha > 0$$

В области $\beta > 1$ имеем $\chi(\beta) > 0$, это легко показать, если выписать члены каждого слагаемого и сравнить коэффициенты при одинаковых степенях α; и в этом случае все полюсы расположены левее некоторой прямой, но здесь нужно следить за тем, чтобы s не превышало нуля (для сходимости ряда (3.6)). Имеем

$$(0<\beta<1), \qquad \frac{1}{h^2}(-2\alpha-\alpha^2) \qquad < s < \frac{1}{n^2}(2\alpha-\alpha^2)$$

Отсюда, если $2\alpha-\alpha^2<0$, т. е. $\alpha>2$, то все $S_k<0$.

Итак, в случае $B-\alpha\geqslant 0$ и в случае $B-\alpha<0$, но $\alpha>2$, по теореме обращения имеем

$$U(x,\tau)=\frac{B\exp\{-0.5\,\alpha x^2-0.5\,\alpha\}\,\Phi(^1/_2+{}^1/_4\,\alpha,1;\alpha x^2)}{(B-\alpha)\,\Phi(^1/_2+{}^1/_4\,\alpha,1;\alpha)+2\alpha(^1/_2+{}^1/_4\alpha)\,\Phi(^3/_2+{}^1/_4\alpha,2;\alpha)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B4\alpha\exp\{-0.5\,\alpha x^2-0.5\,\alpha\}}{\beta_k\,d\chi(\beta_k)/d\beta}\,\Phi(\beta_k,1;\alpha x^2)\exp(S_kF_0)$$

$$\beta_k=\frac{1}{2}+\frac{\alpha^2+n^2S_k}{4\alpha}$$

Первый член, как обычно, дает стационарное распределение; $\lim U(x,\tau)$ при $B\to\infty$ даст предельный случай, когда температура на ободе равна единице.

Для вычисления корней уравнения (3.5) А. С. Барановой на электронно-вычислительной машине были получены таблицы вырожденных гипергеометрических рядов $\Phi(\beta, 1; \alpha)$ и $\Phi(\beta+1, 2; \alpha)$ для $-20\leqslant\beta\leqslant 0$ (шаг $h(\beta)=0.1$) и $1\leqslant\alpha\leqslant 10$ (шаг $h(\alpha)=0.5$).

Подробные таблицы имеются в отчете Института гидродинамики. На фиг. 1 и 2 приведены графики $\Phi(\beta, 1; \alpha)$ и $\Phi(\beta, 2; \alpha)$ Здесь в таблице приведены корни уравнения (3.5) для некоторых значений числа Био B.

Таблица

Корни характеристического уравнения (3.5)

α	$B=0.5$	$B=1$	$B=1.5$	$B=2$
4	$-3<\beta_1<-2.9$ $-6.4<\beta_2<-6.3$ $-11<\beta_3<-10.9$ $-16.9<\beta_4<-16.9$	$-3.1<\beta_1<-3$ $-6.5<\beta_2<-6.4$ $-11.1<\beta_3<-11$ $-16.9<\beta_4<-16.8$	$-1.1<\beta_1<-1$ $-3.2<\beta_2<-3.1$ $\beta_3=-6$ $-11.1<\beta_4<-11$ $-17<\beta_5<-16.9$	$-1.1<\beta_1<-1$ $-3.2<\beta_2<-3.1$ $-6.6<\beta_3<-6.5$ $-11.2<\beta_4<-11.1$ $-17.1<\beta_5<-17$
5	$-2.6<\beta_1<-2.5$ $-5.3<\beta_2<-5.2$ $-9<\beta_3<-8.9$ $-13.7<\beta_4<-13.6$	$-2.7<\beta_1<-2.6$ $-5.4<\beta_2<-5.3$ $-9.1<\beta_3<-9$ $-13.7<\beta_4<-13.6$	$\beta_1=-1$ $-2.7<\beta_2<-2.6$ $-5.4<\beta_3<-5.3$ $-9.1<\beta_4<-9$ $-13.8<\beta_5<-13.7$	$-1.1<\beta_1<-1$ $-2.8<\beta_2<-2.7$ $-5.5<\beta_3<-5.4$ $-9.2<\beta_4<-9.1$ $-13.8<\beta_5<-13.7$

Поступила 7 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Костюк А. Г. О температурных полях в дисках турбин в условиях неустановившегося теплового режима. Тр. Московск. энергетическ. ин-та, Энергомашиностроение, вып. 23.
2. Привалов И. И. Интегральные уравнения. ОНТИ НКТП, 1937.
3. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. ИЛ, 1957.
4. Лыков А. В. Теория теплопроводности. ГИТТЛ, 1952.
5. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. Higher Transcendental Functions. New York, McGrow Hill Boac Company, 1953, vol. 1.