

**ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ЗАТУХАНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ**

Е. Д. Викторов
(Ленинград)

Коэффициент затухания свободных колебаний вязкой жидкости в круговом цилиндрическом сосуде определяется путем подсчета рассеянной за период энергии. Величина рассеянной энергии определяется отдельно в пограничном слое и вне его, причем движение жидкости за пределами слоя считается совпадающим с движением идеальной жидкости.

1. Рассмотрим стоячие колебания вязкой тяжелой жидкости глубины h , находящейся в цилиндрическом сосуде радиуса a . Предположим, что повсюду, кроме пограничного слоя, жидкость движется как идеальная, и при определении ее движения пренебрежем толщиной пограничного слоя.

Тогда потенциал скоростей для S -й формы свободных колебаний будет [1]

$$\Phi_s = \frac{2a^2 \zeta_s \omega_s}{\text{ch}(\zeta_s h / a) (\zeta_s^2 - 1) J_1(\zeta_s)} J_1\left(\zeta_s \frac{r}{a}\right) \text{ch}\left(\zeta_s \frac{z+h}{a}\right) \sin \eta \sin \omega_s t \quad (1.1)$$

Здесь r, η, z — цилиндрические координаты с началом отсчета в центре свободной поверхности жидкости, t — время, J_1 — функция Бесселя первого рода, первого порядка, ζ_s — положительные корни частотного уравнения $J_1'(\zeta) = 0$, ω_s — частота S -й формы колебаний жидкости, g — ускорение силы тяжести.

Частота ω_s определяется формулой

$$\omega_s^2 = \zeta_s \frac{g}{a} \text{th}\left(\zeta_s \frac{h}{a}\right)$$

2. Член $\sin \omega_s t$ в решении (1.1) получился при разделении переменных. Предположим, что приближенно можно учесть затухание формальным введением множителя $\exp(-n_s t)$ в выражении (1.1), т. е. примем, что в каждый момент, даже при наличии трения, жидкость движется как идеальная (всюду, за исключением пограничного слоя). Сравнение максимальных значений кинетической энергии жидкости при S -й форме колебаний через период приводит к выражению

$$n_s = \frac{\omega_s}{4\pi} \ln \frac{T_s(t_1)}{T_s(t_1 + T)} \quad (2.1)$$

Здесь T_s — кинетическая энергия жидкости при S -й форме колебаний, T — период колебаний.

3. Рассеяние энергии в единицу времени в объеме дается интегралом

$$A = \mu \int_{(V)} (2\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_3^2 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) dV \quad (3.1)$$

Здесь μ — коэффициент вязкости жидкости, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \frac{1}{2}\theta_1, \frac{1}{2}\theta_2, \frac{1}{2}\theta_3$ — компоненты тензора скоростей деформации, связанные с проекциями v_r, v_η, v_z скоростей жидкости на оси цилиндрической системы координат соотношениями

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial v_r}{\partial r}, & \varepsilon_2 &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} + v_r \right), & \varepsilon_3 &= \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \theta_1 &= \frac{\partial v_\eta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \eta}, & \theta_2 &= \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}, & \theta_3 &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \eta} + \frac{\partial v_\eta}{\partial r} - \frac{v_\eta}{r} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Определив скорости v_r, v_η, v_z по выражению для потенциала (1.1), вычислим интеграл (3.1) по всему объему жидкости. Предполагая, что h достаточно велико, так что

$$2h \ll \frac{a}{\zeta_s} \text{sh}\left(2 \frac{\zeta_s h}{a}\right), \quad \text{ch}^2\left(\zeta_s \frac{h}{a}\right) \approx \frac{1}{2} \text{sh}\left(2 \zeta_s \frac{h}{a}\right)$$

получим после интегрирования и ряда преобразований

$$A_s = 4\pi a^3 \omega_s^2 \Phi(\zeta_s) \sin^2 \omega_s t \quad (3.3)$$

где

$$\Phi(\zeta_s) = \frac{\zeta_s}{(\zeta_s^2 - 1)^2 J_1^2(\zeta_s)} \left[2(\zeta_s^2 - 1) J_1^2(\zeta_s) + 1 - J_1^2(\zeta_s) \left(1 + \frac{2}{\zeta_s^2} \right) - 2 \int_0^{\zeta_s} \frac{1}{x} J_1^2(x) dx \right] \quad (3.4)$$

Тогда рассеяние энергии за период будет

$$P_s = \int_0^{\tau} A_s dt = 4\pi\mu a^3 \omega_s \Phi(\zeta_s) \left(\tau = \frac{2\pi}{\omega_s} \right) \quad (3.5)$$

4. Вычисление потери энергии в пограничном слое можно упростить, заметив, что у боковых стенок цилиндра члены с $\partial v_z / \partial r$ и $\partial v_\eta / \partial r$ значительно превосходят остальные слагаемые и не будем учитывать пограничный слой у дна цилиндра. Для определения слагаемых $\partial v_z / \partial r$ и $\partial v_\eta / \partial r$ решим две вспомогательные задачи.

В первой из них бесконечный цилиндр радиуса a , наполненный вязкой несжимаемой жидкостью, движется вдоль своей оси так, что стенки его имеют скорость $v = v_0 \sin \omega_s t$. Требуется найти распределение скоростей в жидкости при установившемся движении.

Во второй задаче бесконечный цилиндр радиуса a , наполненный вязкой несжимаемой жидкостью, движется вдоль своей оси со скоростью $v = v_0 \sin \omega_s t$. Требуется найти распределение скоростей в жидкости при установившемся движении.

Для первой задачи уравнения Навье — Стокса вырождаются в одно

$$\frac{\partial v_\eta}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_\eta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\eta}{\partial r} - \frac{v_\eta}{r^2} \right), \quad v_r = v_z = 0$$

с граничным условием

$$v_\eta(a, t) = v_0 \sin \omega_s t$$

Здесь ν — кинематическая вязкость. Разыскивая решение в виде

$$v_\eta(r, t) = R(r) T(t)$$

имеем

$$v_\eta(r, t) = v_0 \Psi_1(r, t) = \frac{v_0}{\text{ber}_1^2(a\rho_s) + \text{bei}_1^2(a\rho_s)} \left\{ \text{bei}_1(a\rho_s) \text{ber}_1(r\rho_s) - \text{ber}_1(a\rho_s) \text{bei}_1(r\rho_s) \right\} \cos \omega_s t + \left\{ \text{bei}_1(a\rho_s) \text{ber}_1(r\rho_s) + \text{ber}_1(a\rho_s) \text{bei}_1(r\rho_s) \right\} \sin \omega_s t \quad (4.1)$$

$$(\rho_s = \sqrt{\omega_s / \nu})$$

Функции $\text{ber}_1(x)$ и $\text{bei}_1(x)$ определяются из соотношения

$$\text{ber}_1(x) + i \text{bei}_1(x) = -J_1(x e^{-1/4 i \pi})$$

Для второй задачи уравнения Навье — Стокса также вырождаются в одно

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \quad v_r = v_\eta = 0$$

с граничным условием

$$v_z(a, t) = v_0 \sin \omega_s t$$

Решая эту задачу, получим для скорости выражение

$$v_z(r, t) = v_0 \Psi_0(r, t) = \frac{v_0}{\text{ber}_0^2(a\rho_s) + \text{bei}_0^2(a\rho_s)} \left\{ [\text{bei}_0(a\rho_s) \text{ber}_0(r\rho_s) - \text{ber}_0(a\rho_s) \text{bei}_0(r\rho_s)] \cos \omega_s t + [\text{bei}_0(a\rho_s) \text{bei}_0(r\rho_s) + \text{ber}_0(a\rho_s) \text{ber}_0(r\rho_s)] \sin \omega_s t \right\} \quad (4.2)$$

$$(\rho_s = \sqrt{\omega_s / \nu})$$

Здесь, подобно предыдущему,

$$\text{ber}_0(x) + i \text{bei}_0(x) = J_0(x e^{-1/4 i \pi})$$

Будем считать скорость жидкости на границе, разделяющей пограничный слой и внутреннюю область, равной скорости идеальной жидкости у стенок сосуда. Это дает возможность найти распределение скоростей в пограничном слое

$$v_z(r, \eta, z, t) = \left[\frac{1}{\sin \omega_s t} \frac{\partial \varphi_s}{\partial z} \right]_{r=a} (\sin \omega_s t - \psi_0(r, t)) \quad (4.3)$$

$$v_\eta(r, \eta, z, t) = \left[\frac{1}{\sin \omega_s t} \frac{\partial \varphi_s}{a \partial \eta} \right]_{r=a} (\sin \omega_s t - \psi_1(r, t)) \quad (4.4)$$

Если заметить, что для маловязких жидкостей $a\rho_s \gg 1$ (для воды, например, при $a = 5$ см и $\nu = 0.01$ см²/сек имеем $a\rho_1 = 215$), то, пользуясь известными асимптотическими разложениями функций $\text{ber}_n(x)$ и $\text{bei}_n(x)$, можно выражения (4.3) и (4.4) упростить

$$v_z = \frac{2a\zeta_s\omega_s}{\text{ch}(\zeta_s h/a)(\zeta_s^2 - 1)} \text{sh}\left(\zeta_s \frac{z+h}{a}\right) \sin \eta \left\{ \sin \omega_s t - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}} \exp\left[-(a-r)\frac{\rho_s}{\sqrt{2}}\right] \sin\left[(a-r)\frac{\rho_s}{\sqrt{2}} + \omega_s t\right] \right\} \quad (4.5)$$

$$v_\eta = \frac{2a\omega_s}{\text{ch}(\zeta_s h/a)(\zeta_s^2 - 1)} \text{ch}\left(\zeta_s \frac{z+h}{a}\right) \cos \eta \left\{ \sin \omega_s t - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}} \exp\left[-(a-r)\frac{\rho_s}{\sqrt{2}}\right] \sin\left[(a-r)\frac{\rho_s}{\sqrt{2}} + \omega_s t\right] \right\} \quad (4.6)$$

Вычисляя интеграл (3.1) по объему и интегрируя затем по времени, получим потерю энергии за период в пограничном слое

$$P_s' = \frac{\sqrt{2}\pi^2 \mu a^2 \rho_s \omega_s (\zeta_s^2 + 1)}{\zeta_s (\zeta_s^2 - 1)^2} \quad (4.7)$$

5. Для определения коэффициента затухания нужно знать еще полную энергию жидкости

$$T_s = \frac{d}{2} \omega_s^2 \int_{(V)} \left\{ \text{grad} \left[\frac{\varphi_s}{\sin \omega_s t} \right] \right\}^2 dV \quad (5.1)$$

Здесь d — плотность жидкости. Вычисляя интеграл (5.1), получим

$$T_s = \frac{\pi d a^5 \omega_s^2}{\zeta_s (\zeta_s^2 - 1)} \text{th} \left(\zeta_s \frac{h}{a} \right) \quad (5.2)$$

Так как $T_s(t_1 + T) = T_s(t_1) - P_s - P_s'$, то, согласно (2.1),

$$n_s = \frac{\omega_s}{4\pi} \ln \frac{T_s}{T_s - P_s - P_s'} \quad (5.3)$$

Но $P_s + P_s' \ll T_s$, поэтому (5.3) можно приближенно переписать в виде

$$n_s = \frac{\omega_s}{4\pi} \frac{P_s + P_s'}{T_s} \quad (5.4)$$

В формуле (3.4) первое слагаемое в квадратных скобках превосходит остальные, и различие между слагаемыми быстро увеличивается с ростом s . Это дает возможность упростить выражение (5.4). Учитывая только первое слагаемое в (3.4), положив $\text{th}(\zeta_s h/a) \approx 1$ и подставив (3.5), (4.7), и (5.2) в (5.4), получим

$$n_s = \frac{2\nu\zeta_s^2}{a^2} + \frac{\nu\rho_s}{2\sqrt{2}a} \frac{\zeta_s^2 + 1}{\zeta_s^2 - 1} \quad (5.5)$$

В этой формуле первое слагаемое характеризует потерю энергии вне пограничного слоя, второе — в пограничном слое. Легко видеть, что при первых формах колебаний основную роль играют потери энергии в пограничном слое.

6. Изложенный способ подсчета коэффициента затухания применим для жидкостей, не образующих на свободной поверхности пленки адсорбированного вещества. Наличие такой пленки приводит к появлению около нее пограничного слоя и к сильному увеличению коэффициента затухания [2]. Влияние пленки можно грубо учесть при помощи предположения о недеформируемости ее в своей плоскости и подсчета дополнительной потери энергии как для плоского пограничного слоя.

Недавно появившаяся работа Г. Н. Микишева и Н. Я. Дорожкина [3] содержит результаты экспериментального исследования свободных колебаний различных жидкостей, позволяющие проверить предлагаемый способ определения коэффициента затухания. При сравнении расчетных результатов с экспериментальными нужно учесть, что в работе [3] логарифмическим декрементом затухания названа величина nT , вместо обычно применяемой $1/2nT$.

Сравнение расчетных коэффициентов затухания с опытными для жидкостей, не образующих поверхностной пленки, показывает достаточно хорошее совпадение их значений. Так, при радиусе цилиндра $a = 10$ см расчетное значение коэффициента затухания колебаний первой формы для ацетона ($\nu = 0.6$) на 21% ниже опытного, для скипидара ($\nu = 1.80$) — на 12% ниже опытного. Для воды же с небольшой примесью глицерина из-за неучтенного влияния поверхностной пленки экспериментальное значение коэффициента затухания втрое превосходит расчетное.

Поступила 10 X 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. О х о ц и м с к и й Д. Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
2. Л е в и ч В. Г. К теории поверхностных явлений. Советская наука, 1941.
3. М и к и ш е в Г. Н., Д о р о ж к и н Н. Я. Экспериментальное исследование свободных колебаний жидкости в сосудах. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 4.

О МЕХАНИЗМЕ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ ПРИ ДЕТОНАЦИИ СПЛОШНЫХ ВЗРЫВЧАТЫХ ВЕЩЕСТВ

А. Я. Анин, Л. Н. Стесин

(Москва)

Известно, что в жидких взрывчатых веществах (ВВ) детонационный фронт неоднороден. Реакция возникает не по всему сечению, а в отдельных очагах, образованных столкновением косых ударных волн [1,2].

В работе [3] изучалось влияние порошков некоторых неорганических соединений ($BaSO_4$, HgO и др.) на переход малой скорости детонации в большую в желатиндинамите, который представляет собой сплошное однородное ВВ. Оказалось, что наличие неоднородностей в заряде — частиц порошкообразной добавки — существенно облегчает переход малой скорости в большую, если удельный вес частиц превышает 2.8 г/см³. Этому явлению было дано следующее объяснение. На частицах добавки происходит отражение ударного фронта детонационной волны. В местах столкновения волн, отраженных от соседних частиц, происходит подъем давления и температуры, что вызывает быстрое разложение вещества в этих точках, распространяющееся затем на прилегающий объем ВВ.

В данной работе исследовалось влияние порошкообразных добавок на величину критического диаметра детонации твердого, сплошного, однородного, с макроскопической точки зрения, ВВ. В качестве таких ВВ были выбраны баллиститные пороха марок НБ и Н, представляющие пластифицированные нитрополимеры. Порох НБ содержит в своем составе 40% нитроглицерина, порох Н — 28% нитроглицерина и 11% динитрогуола.

Для создания неоднородностей в порохе использовались порошкообразные неорганические вещества, для которых приводим удельный вес ρ [г/см³] и размеры частиц δ [см]:

	CaCO ₃	MgO	Bi ₂ O ₃	PbO	HgO	W
ρ , г/см ³ =	2.71	3.2—3.7	8.2—8.9	8.0—9.5	11.14	19.3
δ , см =	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$

Наиболее надежно определен размер частиц мела, которые измерялись двумя способами: фильтрацией газа через порошок и измерением под микроскопом. Оба метода дали хорошо совпадающие результаты.

Заряды ВВ представляли собой цилиндрические стержни длиной 25—30 см. Инцидирование детонации в исследуемых зарядах производилось дополнительным детонатором из литого ТГ 50/50. Регистрация прохождения детонации производилась фоторегистратором СФР, при этом одновременно измерялась скорость детонации. С целью получения более четкого следа детонации на фотопленке заряды обертывались одним слоем целлофана.